PRŮNIK A SOUČET VEKT. PODPROSTORŮ

U vekt. prostor nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$V \subset U$ je vekt. podprostor, jestliže

(0) $V \neq \emptyset$

(1) $\forall u, v \in V \quad u+v \in V$

(2) $\forall a \in \mathbb{K} \ \forall u \in V \quad a \cdot v \in V$

Lemma Průnik dvou podprostorů je opět vekt. podprostor.

Důkaz: V_1 a V_2 podprostory v U.

$u, v \in V_1 \cap V_2 \quad u+v \in V_1$ neboť V_1 je vekt. podprostor

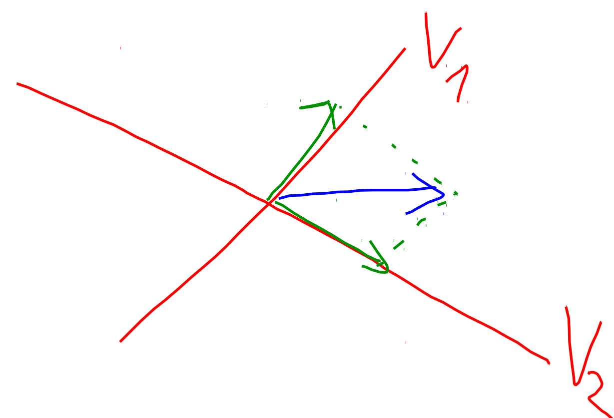
$u+v \in V_2$ neboť V_2 je vekt. podprostor.

Proto $u+v \in V_1 \cap V_2$.

Analogicky dokážeme $\forall a \in \mathbb{K}$ $\forall u \in V_1 \cap V_2$ je $au \in V_1 \cap V_2$.

Víme, že $\vec{o} \in V_1$, $\vec{o} \in V_2$, proto $\vec{o} \in V_1 \cap V_2$ a $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

<u>Pozor</u>! Sjednocení vekt. podprostorů není obecně vekt. podprostor! Příklad: $V = \mathbb{R}^2$



$V_1 \cup V_2$ není vekt. podprostor

modrý vektor neleží ve $V_1 \cup V_2$

V lineární algebře místo sjednocení podprostorů budeme pracovat s pojmem součtu podprostorů.

Definice součtu Nechť V_1 a V_2 jsou dva podprostory v U. Pak součet podprostorů je množina

$$V_1 + V_2 = \{ u \in U : \exists v_1 \in V_1 \ \exists v_2 \in V_2 : u = v_1 + v_2 \}$$

Kratší zápis

$$V_1 + V_2 = \{ v_1 + v_2 \in U, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \}$$

Lemma: Součet vekt. podprostorů je opět vektorový podprostor.

Předně, protože $\vec{o} \in V_1$, $\vec{o} \in V_2$, tak $\vec{o} = \vec{o} + \vec{o} \in V_1 + V_2$.

Tedy $V_1 + V_2 \neq \emptyset$.

$u, v \in V_1 + V_2$. Potom $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$

$v = v_1 + v_2$ $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$

Potom

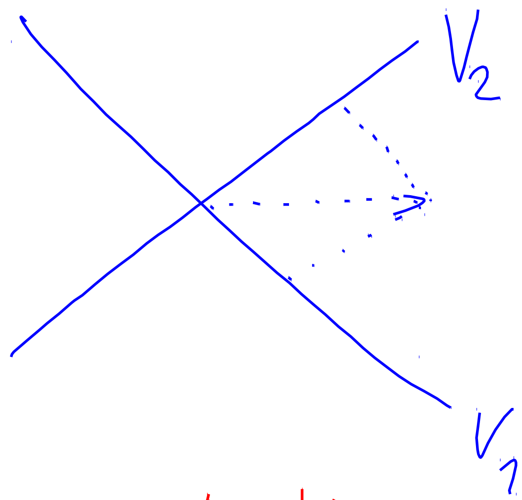
$$u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in V_2} \in V_1 + V_2$$

neboť V_1 je vekt. podprostor

neboť V_2 je vekt. podprostor

Analogicky pro násobek.

Příklad $U = \mathbb{R}^2$, V_1, V_2 dvě přímky procházející počátkem



$$V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2$$

Vždy platí $V_1 \subseteq V_1 + V_2$, $V_2 \subseteq V_1 + V_2$.
Navíc $V_1 + V_2$ je nejmenší vekt. podprostor obsahující oba podprostory V_1 a V_2.

Jiný příklad $\quad U = \mathbb{R}^4$

$$V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4;\ \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

$$V_2 = \{(0, y_2, 0, y_4) \in \mathbb{R}^4\}$$

$V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$ Ukážeme, že každý vektor z $\mathbb{R}^4$ je součtem vektorů z V_1 a V_2:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underbrace{(x_1, x_2, x_3, -x_1-x_2-x_3)}_{V_1} + \underbrace{(0, 0, 0, x_1+x_2+x_3+x_4)}_{V_2}$$

$$= \underbrace{(x_1, -x_1-x_3-x_4, x_3, x_4)}_{V_1} + \underbrace{(0, x_1+x_2+x_3+x_4, 0, 0)}_{V_2}.$$

Definice direktního součtu

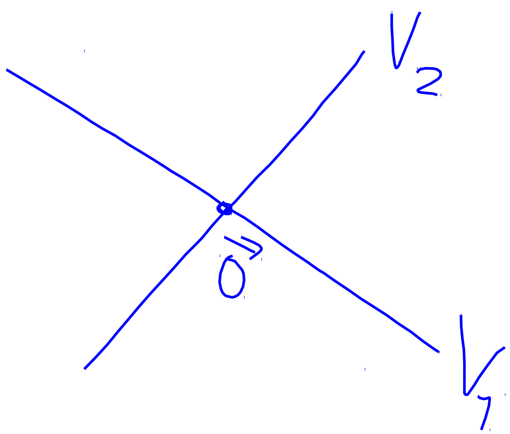
Nechť U je vekt. prostor a V_1, V_2 jeho podprostory. Součet $V_1 + V_2$ je direktní, jestliže

$$V_1 \cap V_2 = \{\vec{o}\}$$

V tomto případě píšeme $V_1 \oplus V_2 = V_1 + V_2$.

První příklad součtu v $\mathbb{R}^2$ byl direktní:

$U = \mathbb{R}^2$



$$V_1 \cap V_2 = \{\vec{o}\}$$

$$V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2.$$

Součet v druhém příkladu není direktní:

$U = \mathbb{R}^4$, V_1, V_2

$$V_1 \cap V_2 = \{ (0, y_2, 0, y_4) \in \mathbb{R}^4;\ y_2 + y_4 = 0 \}$$
$$= \{ (0, p, 0, -p) \in \mathbb{R}^4;\ p \in \mathbb{R} \} \supsetneqq \{\vec{o}\}$$

Součet $V_1 + V_2$ není direktní.

Lemma: Součet podprostorů $V_1 + V_2$ je direktní, právě když

$$\forall u \in V_1 + V_2 \ \underbrace{\exists!}_{\text{existuje právě jedna}} v_1 \in V_1 \ \exists! v_2 \in V_2 \quad u = v_1 + v_2$$

9

<u>Důkaz:</u> Nechť $V_1 \cap V_2 = \{\vec{o}\}$ a nechť $u \in V_1 + V_2$

lze napsat $$u = v_1 + v_2$$ $$u = u_1 + u_2$$ $v_1, u_1 \in V_1$, $v_2, u_2 \in V_2$

Rozdíl těchto vyjádření dává vztah

$$(v_1 + v_2) - (u_1 + u_2) = \vec{o}$$

$$V_1 \ni \underset{\underset{V_1}{\cap}}{v_1} - \underset{\underset{V_1}{\cap}}{u_1} = \underset{\underset{V_2}{\cap}}{u_2} - \underset{\underset{V_2}{\cap}}{v_2} \in V_2$$

Tedy vektor $v_1 - u_1 = u_2 - v_2 \in V_1 \cap V_2 = \{\vec{o}\}$.

$$v_1 - u_1 = u_2 - v_2 = \vec{o} \implies v_1 = u_1,\ v_2 = u_2.$$

Součet lze napsat jediným způsobem.

10

Nechť každý prvek z V_1+V_2 lze napsat jako součet jednoznačně.

$\vec{o} \in V_1 + V_2$

$$\vec{o} = \underset{\substack{\cap \\ V_1}}{\vec{o}} + \underset{\substack{\cap \\ V_2}}{\vec{o}} \qquad (*)$$

Nechť $u \in V_1 \cap V_2$. Potom

$$\vec{o} = \underset{\substack{\cap \\ V_1}}{u} + \underset{\substack{\cap \\ V_2}}{(-u)} \qquad (*)$$

Z jednoznačnosti a rovnosti $(*)$ plyne

$$u = \vec{o}$$

$$-u = \vec{o}.$$

Tedy každý vektor z průniku je nulový.

Věta o dimenzi součtu a průniku

Analogie s množinami:

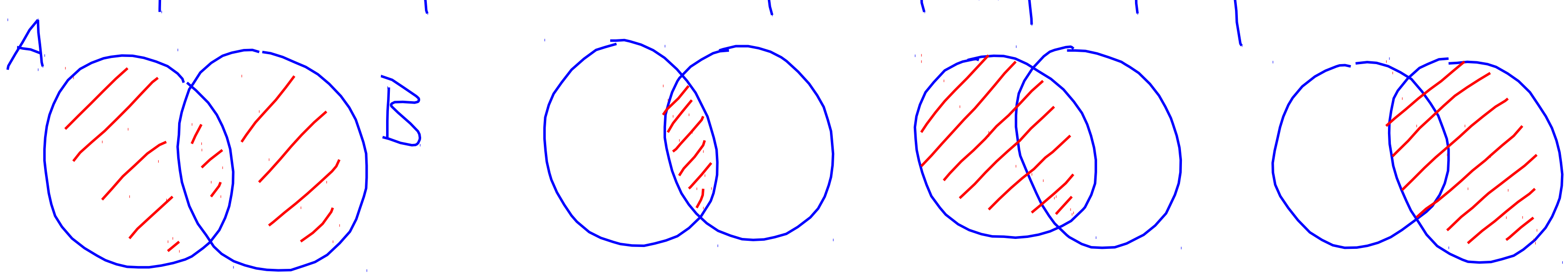
M konečná množina

A, B dvě její podmnožiny $|A| \dots$ počet prvků množiny A

$|B| \dots$ —— " —— B

Platí:

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$$



Věta o dimenzi součtu a průniku

Nechť U je vekt. prostor konečné dimenze a V a W dva jeho podprostory: Potom

$$\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W$$

množina M $\longleftrightarrow$ vekt. prostor U

konečná $\longleftrightarrow$ konečné dimenze

A, B podmnožiny $\longleftrightarrow$ V, W vekt. podprostory

$A \cup B$ $\longleftrightarrow$ $V + W$

počty prvků $\longleftrightarrow$ dimenze

Příklad: $U = \mathbb{R}^4$, $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4;\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

$V_2 = \{(0, y_2, 0, y_4) \in \mathbb{R}^4\}$

$$\dim(\underbrace{V_1 + V_2}) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

$$\dim \mathbb{R}^4 + \dim\{(0,p,0,-p) \in \mathbb{R}^4\} = \dim V_1 + \dim V_2$$

$$\overset{\|}{4} + 1 = 3 + 2$$

$\dim V_1$ .... najdeme řešení soustavy a bázi podprostoru:

x_2, x_3, x_4 parametry $\quad (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4)$

báze $(-1, 1, 0, 0)$ $(-1, 0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 1)$

dimenze je 3. Báze V_2 je $(0,1,0,0)$, $(0,0,0,1)$ $\dim V_2 = 2$.

<u>Důkaz věty</u>: $\underbrace{\dim(V_1+V_2)}_{k+s+p} + \underbrace{\dim(V_1\cap V_2)}_{k} = \underbrace{\dim V_1}_{k+s} + \underbrace{\dim V_2}_{k+p}$.

Musíme zvolit vhodné báze po součástí dimenzí:

$$\begin{aligned} V_1\cap V_2 &\subseteq V_1 \subseteq V_1+V_2 \\ &\subseteq V_2 \subseteq V_1+V_2 \end{aligned}$$

Nechť $v_1, v_2, \dots v_k$ je báze $V_1\cap V_2$. Lin. nezávislé vektory $v_1, \dots v_k$ v podprostoru V_1 musíme doplnit na bázi V_1.

$v_1, v_2, \dots v_k, u_1, \dots u_s$ báze V_1.

Obdobně je doplníme na bázi V_2:

$v_1, v_2, \dots, v_k, y_1, y_2, \dots, y_p$ báze V_2.

Nyní $\dim(V_1 \cap V_2) = k$

$\dim V_1 = k+s$

$\dim V_2 = k+p$

Dokážeme: $\dim(V_1+V_2) = k+p+s$.

Pak totiž bude platit

$$\dim(V_1+V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$

K tomu stačí, když dokážeme, že vektory $v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, \dots, u_s, y_1, \dots, y_p$ tvoří bázi V_1+V_2.

(1) $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_s, y_1, \dots, y_p$ generují V_1+V_2.

16

Nechť $w_1 \in V_1$, $w_2 \in V_2$

$v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_s$ je báze V_1, tedy

$$w_1 = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 u_1 + \dots + b_s u_s$$

$v_1, \dots, v_k, y_1, \dots, y_p$ je báze V_2, tedy

$$w_2 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k + d_1 y_1 + \dots + d_p y_p.$$

Odtud

$$w_1 + w_2 = (a_1 + c_1) v_1 + \dots + (a_k + c_k) v_k + b_1 u_1 + \dots + b_s u_s + d_1 y_1 + \dots + d_p y_p.$$

Každý prvek z $V_1 + V_2$ je lin. kombinací $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_s, y_1, \dots, y_p$.

(2) $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_s, y_1, \dots, y_p$ jsou LN.

Nechť

$$a_1v_1+\dots+a_kv_k+b_1u_1+\dots+b_su_s+c_1y_1+\dots+c_py_p=\vec{0}. \quad (*)$$

Tuto rovnost přepíšeme takto:

$$V_1 \ni a_1v_1+\dots+a_kv_k+b_1u_1+\dots+b_su_s=-c_1y_1-\dots-c_py_p \in V_2$$

Proto $-c_1y_1-\dots-c_py_p \in V_1\cap V_2$. Můžeme to napsat jako lin. kombinaci prvků báze $V_1\cap V_2$.

$$-c_1y_1-\dots-c_py_p=d_1v_1+\dots+d_kv_k.$$

Odtud

$$d_1v_1+\dots+d_kv_k+c_1y_1+\dots+c_py_p=\vec{0}$$

$v_1,\dots,v_k,y_1,\dots,y_p$ jako vektory báze V_2 jsou LN. Proto

$$c_1=c_2=\dots=c_p=0$$

Dosadíme do (*) a dostaneme

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 u_1 + \dots + b_s u_s = \vec{0}.$$

Vektory $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_s$ jako prvky báze V_1 jsou LN.

Proto

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = b_1 = \dots = b_s = 0.$$

Dokázali jsme, že

$$a_1 = \dots = a_k = b_1 = \dots = b_s = c_1 = \dots = c_p = 0.$$

Tedy $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_s, y_1, \dots, y_p$ jsou LN.

Počítání součtu

Nechť podprostory V_1 a V_2 jsou zadány jako lin. obaly nějakých vektorů:

$$V_1 = [v_1, v_2, \dots, v_k] = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k,\ a_i \in K\}$$

$$V_2 = [y_1, y_2, \dots, y_r] = \{b_1 y_1 + \dots + b_r y_r \in U,\ b_j \in K\}$$

$$V_1 + V_2 = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 y_1 + \dots + b_r y_r \in U,\ a_i, b_j \in K\}$$

$$= [v_1, \dots, v_k, y_1, \dots, y_r].$$

Chceme-li najít bázi součtu V_1+V_2, stačí z vektorů $v_1, \dots, v_k, y_1, \dots, y_r$ vybrat LN se stejným lin. obalem.

Počítání průniku

Nechť opět

$$V_1 = [v_1, v_2, v_3]$$

$$V_2 = [y_1, y_2, y_3]$$

$$V_1 \cap V_2 = \{ z \in U,\ \underline{z} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = \underline{b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3} \}$$

Hledáme $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in K$, která jsou řešením rovnice

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3$$

kterou lze přepsat takto:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 - b_1 y_1 - b_2 y_2 - b_3 y_3 = \vec{o}.$$

Tato rovnice vždy vede na soustavu homogenních rovnic. Její řešení závisí na několika parametrech, např. na 2 parametrech:

$$b_1 = 3p + 2s$$
$$b_2 = p$$
$$b_3 = s$$

Potom

$$V_1 \cap V_2 = \{ z = (3p+2s)y_1 + p y_2 + s y_3 \in U \} =$$

$$= \{ z = p(3y_1+y_2) + s(2y_1+y_3) \} = [3y_1+y_2, 2y_1+y_3].$$

22

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Definice: Nechť U a V jsou vekt. prostory nad $\mathbb{K}$.
Zobrazení $\varphi: U \to V$
se nazývá lineární (homomorfismus vekt. prostorů),
jestliže platí

(1) $\forall u_1, u_2 \in U \quad \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$.

(2) $\forall a \in K \ \forall u \in U \quad \varphi(au) = a \cdot \varphi(u)$

Příklady:

1. $U = V = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$\varphi(x) = ax + b$, $\quad a, b$ pevná reálná čísla.

Toto se na střední škole nazývala lineární funkce.

Je to lin. zobrazení ve smyslu naší definice?

$$\varphi(x+y) = a(x+y) + b = ax + ay + b$$

$$\varphi(x) + \varphi(y) = ax + b + ay + b = ax + ay + 2b$$

Rovnost $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

nastane, právě když $b = 0$ a $\varphi(x) = ax$.

③ Daleko obecněji: v předchozím příkladě píšeme vektory $\mathbb{R}^2$ jako sloupcové vektory $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Zobrazení pak lze zapsat pomocí maticového násobení takto:

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Vezměme: $U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^k$, A matice typu $k \times n$ a definujme

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

$$\varphi(x) = \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax.$$

Toto zobrazení je lineární!

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(x+y) &= A(x+y) = Ax + Ay = \\ &= \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(ax) &= A(ax) = a(Ax) = a\varphi(x). \end{aligned}}$$

φ je lineární