Zkouška má 3 části

semestrální 8 písemek po 2b 8/16

nad 8 : 2

písemka ve zkouškovém

teor. část 5/10

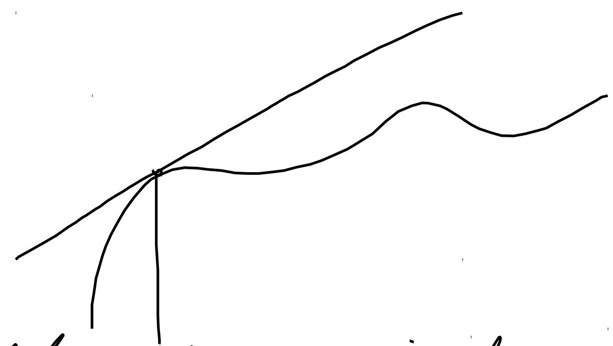
prak. část 7/12 +

ústní zkouška

K čemu je dobrá lin. algebra

- řešení soustav lin. rovnic
- popis geometrických objektů
  - analytická geometrie

- zavádí pojmy používané v jiných částech matematiky
- lineární zobrazení → umožňuje „linearizovat" složitější problémy



- aplikace (kryptografie, poč. tomografie, modelování růstu populace, dehl. sítích)

3

Počítání s reálnými a komplexními čísly

Značení

$\mathbb{N}$ přirozená čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\cap$

$\mathbb{Z}$ celá čísla $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$

$\cap$

$\mathbb{Q}$ racionální čísla $\frac{p}{q}$ $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$

$\cap$

$\mathbb{R}$ reálná čísla $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\cap$

$\mathbb{C}$ komplexní čísla (množina řešení rovnice $x^2 = -1$)

$z = \underbrace{a}_{\text{reálná část}} + i \overbrace{b}^{\text{im. část}}$

$z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

kompl. sdružené číslo

$\bar{z} = a - ib$

Vlastnosti reálných a kompl. čísel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$+ : \mathbb{K}\times\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ $\qquad (a,b) \longmapsto a+b$

$\mathbb{K}\times\mathbb{K} = \{(a,b),\ a\in\mathbb{K},\ b\in\mathbb{K}\}$

Prvku (a,b) přiřadíme prvek $a+b\in\mathbb{K}$

komutativní $\quad a+b=b+a$

asociativní $\quad (a+b)+c = a+(b+c)$

neutrální prvek je 0 $\quad \exists 0\in\mathbb{K}\ \forall a\in\mathbb{K}\quad a+0=a$

opačný prvek $\quad \forall a\in\mathbb{K}\ \exists(-a)\in\mathbb{K}\quad a+(-a)=0$

násobení $\quad \cdot\ \mathbb{K}\times\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$

je opět

komutativní $\quad a\cdot b=b\cdot a$

asociativní $\quad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

neutrální prvek je 1

$a\cdot 1=a$

Ke každému prvku existuje převrácený prvek (inverzní)

$\forall a \neq 0\ \exists a^{-1}\quad a\cdot a^{-1}=1.$

Distributivní násobení vzhledem ke sčítání

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$

Soustava k-rovnic o neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ je

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2\\
&\;\;\vdots\\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k
\end{aligned}
$$

$a_{ij} \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, $b_i \in \mathbb{K}$. Hledáme $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{K}$ taková, aby rovnice byly splněny.

a_{ij}

i … řádek

j … neznámá u které koeficient stojí

Matice soustavy

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn}
\end{pmatrix}
$$

Rozšířená matice soustavy

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k
\end{array}\right)
$$

Homogenní soustava je soustava, kde všechna $b_i = 0$. Má vždy řešení $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Řešení soustavy je každá n-tice čísel $x_1, x_2, \dots x_n$, která splňuje všechny rovnice.

- soustava nemusí mít žádné řešení $\quad$ $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 + x_2 = 2$
- soustava může mít více řešení $\quad$ $x_1 + x_2 = 1$
- soustava může mít jediné řešení $\quad$ $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 - x_2 = 0$

Ekvivalentní soustavy jsou soustavy, jejichž množiny řešení jsou stejné.

Ekvivalentní úpravy jsou změny soustavy rovnic, které vedou k ekvivalentní soustavě, tj. nemění množinu řešení.

Elementární ekvivalentní úpravy

- rovnici vynásobíme číslem $c \neq 0$
- přehodíme pořadí 2 rovnic
- k dané rovnici přičteme c-násobek jiné rovnice

Obvykle rovnice nepíšeme, pracujeme pouze s rozšířenou maticí soustavy. Tam se element. ekvivalentní úpravy nazývají jako tzv. elementární řádkové operace (ERO, ERO)

- i-tý řádek matice vynásobíme číslem $c \neq 0$
- přehodíme i-tý a j-tý řádek
- k i-tému řádku přičteme c-násobek j-tého řádku, $j \neq i$

Schodovitý tvar matice

vedoucí koeficient v i-tém řádku matice je první nenulové číslo tohoto řádku

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{tato není matice ve schod. tvaru}$$

Matice je ve **schodovitém tvaru**, jestliže

1. nulové jsou pod nenulovými řádky
2. jestliže a_{ij} je vedoucí koeficient i-tého řádku, pak vedoucí koeficient $(i+1)$-ního řádku je $a_{i+1\,l}$, kde $l > j$.

9

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Soustavu, která má matici ve schod. tvaru, umíme vyřešit

$$\begin{aligned} x_1 + 0 \cdot \underline{x_2} - 2x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_4 + 2\underline{x_5} &= 1 \end{aligned}$$

x_2 a x_5 volíme jako parametry

$$x_5 = p$$
$$x_2 = q$$

Z 3. rovnice spočítáme x_4 $\qquad x_4 = 1 - 2x_5 = 1 - 2p$

Z 2. rovnice spočítáme x_3 $\qquad x_3 = -2x_4 - x_5 = -2 + 4p - p = -2 + 3p$

2 1. rovnice spočítáme x_1

$$x_1 = 3+2x_3 - x_4 - x_5 = 3-4+6p - 1+2p-p =$$
$$= -2+7p$$

Řešení soustavy je
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ je $(-2+7p, q, -2+3p, 1-2p, p)$ $\quad p \in K$

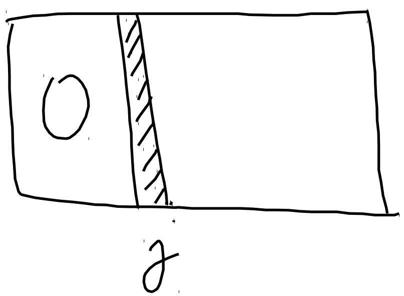
Soustavu, která má matici ve schodovitém tvaru, řešíme takto:
je-li v ní řádek $0 \; 0 \; \dots \; 0 \mid b_i \neq 0$,
pak nemá řešení
jinak neznámé, které nestojí u ved. koeficientů některého řádku zvolíme za parametry a neznámé, které stojí u ved. koeficientů postupně spočítáme zdola nahoru.

GAUSSOVA ELIMINACE

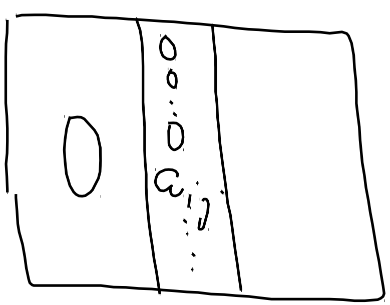
Každou matici lze pomocí elementárních řádk. operací převést do schod. tvaru.

Postup v důkazu se nazývá Gaussova eliminace. Jde v podstatě o algoritmus.

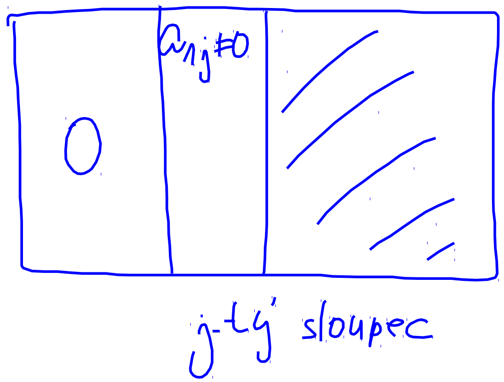
- najdeme 1. nenulový sloupec – nechť je j-tý



V něm najdeme nějaké nenulové číslo $a_{ij} \neq 0$. Pokud $i \neq 1$, vyměníme 1. a i-tý řádek.



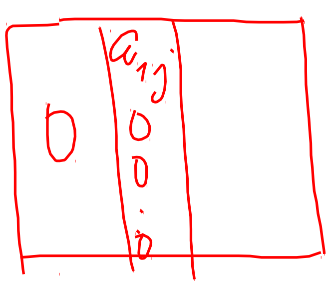
12



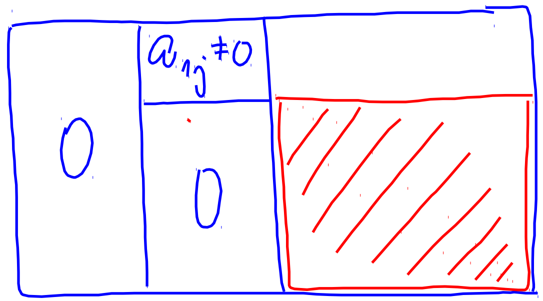
a_{1j} je vedoucím koeficientem 1. řádku.
Chceme pomocí element. řádk. úprav dostat pod a_{1j} samé nuly.

Nechť $a_{ij} \neq 0$. Pak k i-tému řádku přičteme $\left(-\dfrac{a_{ij}}{a_{1j}}\right)$ násobek 1. řádku. V i-tém řádku a j-tém sloupci bude tedy stát nyní číslo

$$a_{ij} + \left(-\frac{a_{ij}}{a_{1j}}\right) a_{1j} = a_{ij} - a_{ij} = 0.$$



- Jsme v této situaci



V tomto okamžiku vezmeme matici vyznačenou v obrázku červeně a s ní budeme provádět úplně stejný postup.

Řádkové operace v červené matici lze chápat jako operace jsou „navíc" jsou pouze nuly

- Tento postup provádíme tak dlouho, dokud nezískáme buď nulovou matici nebo matici s jedním řádkem.

v modré matici, na místech, která

Příklad Soustava

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 \phantom{{}+4x_3} - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Rozšířená matice soustavy

výměna 1. a 3.

od 2. odečteme 3-násobek 1.

od 3. odečtu 2-násobek 1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

od 3. odečteme 2.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2 \\ 5x_2 - 8x_3 + x_4 &= -6 \\ 0 &= 3 \end{aligned}$$

Soustava nemá řešení.