Příklad Markovova procesu s mlsným hazardérem

M. H. má 3 kremrole

Hází mincí - orel + 1 kremrole

- panna − 1 kremrole

Hra končí jestliže má 0 kremrolí nebo 5 kremrolí.

Jaká je pravděpodobnost, že hra skončí po 4 hodech.

Markovův proces n stavů $n = 6$

stavy jsou počty korun 0, 1, 2, 3, 4, 5

Markovova matice P je matice $n \times n$ (6×6)

P_{ij} = pravděpodobnost přechodu ze stavu j do stavu i po 1 házení mincí

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Počáteční stav

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3

Stav po 1. kole

$$x^{(1)} = P \cdot x^{(0)}$$

Stav po 2. kole

$$x^{(2)} = P \cdot x^{(1)} = P \cdot (P x^{(0)}) = P^2 x^{(0)}$$

Stav po i-tém kole je

$$x^{(i)} = P \cdot x^{(i-1)} = P^i x^{(0)}$$

Stav po 4. kole je

$$x^{(4)} = P^4 \cdot x^{(0)} = P^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 3/16 \\ 0 \\ 5/16 \\ 0 \\ 3/8 \end{pmatrix}$$

Pravděpodobnost, že na konci po 4. kole je pravd. že hráč bude mít 0 nebo 5 korun

$$= 1/8 + 3/8 = 4/8 = \frac{1}{2}.$$

INVERZNÍ MATICE

Nechť A je matice $n \times n$ s prvky v $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Matici B typu $n \times n$ nazveme inverzní k A, jestliže

$$A \cdot B = B \cdot A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Tvrzení: K dané matici A typu $n \times n$ existuje nejvýše jedna inverzní.

Důkaz: Nechť matice B a C mají vlastnost inverzní matice k A, tj

$$AB = BA = E \qquad AC = CA = E$$

Počítáme

$$B = B \cdot E = B(A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = E \cdot C = C$$

Elementární řádkové operace

- násobení řádku číslem $\neq 0$
- výměna 2 řádků
- k danému řádku přičteme násobek jiného řádku

Elementární matice je matice, která vznikne z jednotkové ER operací nebo ES operací

e ..... element. řádk. operace, její provedení na matici A značíme $e(A)$.

Věta: Pro všechny element. řádkové operace platí

$$e(A) = e(E) \cdot A$$

<u>Důkaz:</u> Násobení 1. řádku číslem c

$A = (a_{ij})$

$$e(E) \cdot A = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = e(A)$$

e = výměna 1. a 2. řádku

$$e(E) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ & & & \end{pmatrix} = e(A)$$

7

e – k 2. řádku přičteme c-násobek 1. řádku

$$e(E)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ - & - & - & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$e(E)\,A$$

2. řádek 1. sloupec

$$b_{21} = ca_{11} + a_{21}$$

$$b_{22} = ca_{12} + a_{22}$$

$$b_{23} = ca_{13} + a_{23}$$

Tvrzení: je-li A matice $n\times n$ a e je elem. řádková operace, pak

$$e(A) = A\cdot e(E)$$

Věta: Každá elementární matice má matici inverzní a ta je rovněž elementární.

Důkaz: e … výměna 1. a 2. řádku

$$e(E)\cdot e(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

jiný důkaz podle 1. tvrzení

$$e(E)\cdot e(E) = e(e(E)) = E$$

e_c … vynásobení 1. řádku číslem c

$e_{c^{-1}}$ … vynásobení 1. řádku číslem c^{-1}

$$e_{c^{-1}}(E)\cdot e_c(E) = e_{c^{-1}}(e_c(E)) = E$$

$$e_c(E)\cdot e_{c^{-1}}(E) = e_c(e_{c^{-1}}(E)) = E$$

e k 2. řádku přičteme c-násobek 1. řádku

$$e(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

e' … k 2. řádku přičteme $(-c)$ násobek 1. řádku

$$e'(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -c & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$e'(E)\cdot e(E) = e'(e(E)) = E$$

$$e(E)\cdot e'(E) = e(e'(E)) = E$$

Věta: Jestliže matice A a B mají inverzní matice, postupně A^{-1} a B^{-1}, pak $A\cdot B$ má inverzní matici

$$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$$

Důkaz:

$$(A\cdot B)(B^{-1}\cdot A^{-1}) = (A\cdot(B\cdot B^{-1}))\cdot A^{-1} = (A\cdot E)\cdot A^{-1} =$$

$$= A\cdot A^{-1} = E$$

Analogicky spočítáme, že

$$(B^{-1}\cdot A^{-1})(A\cdot B) = E$$

Algoritmus na výpočet inverzní matice – tzv. úplná Gaussova eliminace

A matice $n \times n$

je ve schod. tvaru

$$n\left\{\underbrace{\left(A \mid E\right)}_{2n}\right. \xrightarrow{\text{ERO}} \left(\tilde{A} \mid \tilde{B}\right)$$

A má inverzní matici právě když $\tilde{A}$ nemá nulový řádek

Jestliže $\tilde{A}$ nemá nulový řádek, pokračujeme v algoritmu

$$\left(\tilde{A} \mid \tilde{B}\right) \xrightarrow{\text{ERO}} \left(E \mid B\right)$$

Závěr: B je inverzní k A.

A

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \overset{12}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Zręczna Gaussa ~ eliminacja

A^{-1} istnieje

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Důkaz algoritmu

$$(A\,|\,E) \overset{ERO}{\sim} \sim \Big(\overbrace{\underbrace{P_k \dots P_3\, P_2\, P_1}_{\text{elementární matice } e_i(E)} A}^{\tilde{A}} \;\Big|\; \overbrace{P_k \dots P_2 \cdot P_1 E}^{\tilde{B}}\Big)$$

A má inverzní matici právě když ji má $\hat{A}$.

$\hat{A} = P \cdot A$, kde $P = P_k P_{k-1} \dots P_1$

matice $P_k P_{k-1} \dots P_1$ mají inverzní, tedy i jejich součin, matice P má inverzi.

Má-li A inverzi, pak $\hat{A}$ má inverzi $\hat{A}^{-1} = A^{-1} \cdot P^{-1}$.

Dále platí $\quad P^{-1}\hat{A} = P^{-1}(PA) = (P^{-1}P)A = A$

Tedy, má-li $\hat{A}$ inverzi, má inverzi i matice A.

Má-li $\tilde{A}$ nulový řádek, pak nemá inverzi.

$$\tilde{A} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \neq E$$

Má-li $\tilde{A}$ nulový řádek, pak nemá inverzi a ani A nemůže mít inverzní matici.

$$(A \mid E) \overset{ERO}{\sim} \cdots \sim (P_k P_{k-1} \cdots P_1 A \mid P_k P_{k-1} \cdots P_1 E)$$

$$\overset{ERO}{\sim} \cdots \sim \Big(\underbrace{P_\ell P_{\ell-1} \cdots P_k P_{k-1} \cdots P_1 A}_{E} \;\Big|\; \underbrace{P_\ell P_{\ell-1} \cdots P_k \cdots P_1 E}_{P_\ell P_{\ell-1} \cdots P_1} \Big)$$

(1) $(P_\ell P_{\ell-1} \cdots P_1) \cdot A = E$ Ukážeme, že $P_\ell P_{\ell-1} \cdots P_1$ je inverzní k A.

2 (1) spočítáme inverzní matici A

$$P_e P_{e-1} \dots P_1 \cdot A = E \qquad | \; P_e^{-1} \text{ zleva}$$

$$P_e^{-1}(P_e P_{e-1} \dots P_1 A) = P_e^{-1}$$

$$P_{e-1} \dots P_1 A = P_e^{-1} \qquad | \; P_{e-1}^{-1} \text{ zleva}$$

$$P_{e-1}^{-1}(P_{e-1} \dots P_1 A) = P_{e-1}^{-1} P_e^{-1}$$

$$P_{e-2} \dots P_1 A = P_{e-1}^{-1} P_e^{-1}$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\boxed{A = P_1^{-1} \cdot P_2^{-1} \dots P_{e-1}^{-1} P_e^{-1}}$$

(2) $$A \cdot (P_e P_{e-1} \dots P_1) = P_1^{-1} P_2^{-1} \dots \overbrace{P_e^{-1} P_e} P_{e-1} \dots P_1 =$$

$$= P_1^{-1} \cdots P_{l-1}^{-1} \underbrace{P_l^{-1} P_l}_{E} P_{l-1} \cdots P_1 = P_1^{-1} \cdots \underbrace{P_{l-1}^{-1} P_{l-1}}_{E} \cdots P_1 =$$

$$= P_1^{-1} \cdots \underbrace{P_{l-2}^{-1} P_{l-2}}_{E} \cdots P_1 = \cdots = P_1^{-1} P_1 = E.$$

Matice $B = P_l P_{l-1} \cdots P_1$ je inverzní k A neboť jsme dokázali

$$B \cdot A = E$$

$$A \cdot B = E.$$