

Podpora výuky předmětu Diskrétní matematika

Řešení sbírky příkladů

Lucia Macášková, Tadeáš Kučera,
Jan Kvapil, Vladimír Sedláček

27. ledna 2016

Obsah

1	Logika	3
2	Množiny	6
3	Zobrazení a mohutnost množin	8
4	Relace	12
5	Uspořádané množiny	17
6	Ekvivalence	23
7	Kombinatorika	26
8	Grafy	29

Řešení příkladů

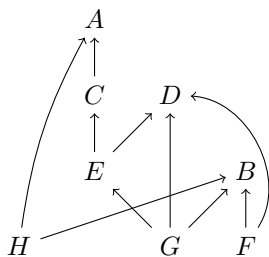
1 Logika

Řešení 1.1. V první části si stačí uvědomit, že dvě formule jsou ekvivalentní, jestliže mají stejnou tabulku pravdivostních hodnot, což je relace, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Díky tomu je následná definice relace \rightarrow kořektní. Relace \rightarrow je navíc reflexivní a tranzitivní, protože tuto vlastnost má i „obyčejná“ implikace. Antisymetrie plyne z toho, že pokud se dva výroky navzájem implikují, pak jsou ekvivalentní, tudíž leží ve stejné třídě rozkladu (což je přesně důvod, proč jsme tento rozklad vůbec vytvořili – „obyčejná“ implikace totiž antisymetrická není).

Řešení 1.2.

- a) A : Vrah byl malý, kulhající muž a vražednou zbraní byla opotřebovaná, železná motyka. B : Vrah byl malý muž. D : Vrah kulhal. C : Vražednou zbraní byla opotřebovaná, železná motyka. E : Motyka byla opotřebovaná. F : Motyka byla železná. G : Motyka byla železná nebo opotřebovaná.
- b) $A : x = 2$, $B : x = 3$, $C : x \mid 12$, $D : x \mid 18$, $E : x \mid 36$.
- c) A : Je to zelené jablko. B : Je to jablko. D : Roste to na stromě. C : Je to zelené. E : Není to modré. F : Roste to na stromě nebo to není modré.

Řešení 1.3. K zápisu řešení jsme využili Hasseova diagramu, tedy např. výrok G implikuje i výrok C , přestože tato skutečnost není naznačena samostatnou šipkou.



Řešení 1.4. Platí tyto čtyři ze všech osmi možných:

- $\forall k \geq 2 \forall n \exists r : k^r \in [n, k \cdot n]$
- $\forall k \geq 2 \exists n \exists r : k^r \in [n, k \cdot n]$
- $\exists k \geq 2 \forall n \exists r : k^r \in [n, k \cdot n]$
- $\exists k \geq 2 \exists n \exists r : k^r \in [n, k \cdot n]$

Řešení 1.5.

- a) ψ_2 platí, stačí volit $x_1 = x_3 = 1$, pak $1 \cdot 1 \leq x_2 x_4$ pro všechna $x_2, x_4 \in \mathbb{N}$.
- b) ψ_2 platí, stačí volit x_1 libovolně a položit $x_3 = x_1 x_2$, pak $x_1 x_2 \leq x_1 x_2 x_4$ pro všechna $x_4 \in \mathbb{N}$.
- c) ψ_2 neplatí, stačí na konci zvolit $x_4 \in \mathbb{N}$ splňující $x_4 > \frac{x_1 x_2}{x_3}$ (takové x_4 zřejmě vždy existuje).
- d) ψ_n platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, stačí volit $x_1 = x_3 = \dots = x_{2n-1} = 1$, pak $1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \leq x_2 x_4 \dots x_{2n}$ pro všechna $x_2, x_4, \dots, x_{2n} \in \mathbb{N}$.
- e) ψ_n neplatí pro žádné $n \in \mathbb{N}$, stačí na konci zvolit $x_{2n} \in \mathbb{N}$ splňující $x_{2n} > \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{x_3 x_4 \dots x_{2n-1}}$ (takové x_{2n} zřejmě vždy existuje).
- f) ψ_n platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, stačí volit $x_1, x_3, \dots, x_{2n-3}$ libovolně a položit $x_{2n-1} = x_1 x_2 \dots x_n$, pak

$$x_1 x_2 \dots x_n \leq x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n-2} x_1 x_2 \dots x_n x_{2n}$$

pro všechna $x_2, x_4, \dots, x_{2n} \in \mathbb{N}$.

- g) ψ_n neplatí pro žádné $n \in \mathbb{N}$, stačí na konci zvolit $x_{2n} \in \mathbb{N}$ splňující $x_{2n} > \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{x_3 x_4 \dots x_{2n-1}}$ (takové x_{2n} zřejmě vždy existuje).

Řešení 1.6.

- a) φ_2 platí, stačí na konci zvolit $x_4 \in \mathbb{N}$ splňující $x_4 \geq \frac{x_1 x_3}{x_2}$ (takové x_4 zřejmě vždy existuje).
- b) φ_2 platí, stačí na konci zvolit $x_4 \in \mathbb{N}$ splňující $x_4 \geq \frac{x_1 x_2}{x_3}$ (takové x_4 zřejmě vždy existuje).
- c) φ_2 neplatí, je-li totiž zvoleno $x_3 \in \mathbb{N}$ tak, že $x_1 x_2 < x_3$ (což se vždy může stát), již nelze zvolit $x_4 \in \mathbb{N}$ tak, aby $x_1 x_2 \geq x_3 x_4$.
- d) φ_n platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, stačí na konci zvolit $x_{2n} \in \mathbb{N}$ splňující $x_{2n} \geq \frac{x_1 x_3 \dots x_{2n-1}}{x_2 x_4 \dots x_{2n-2}}$ (takové x_{2n} zřejmě vždy existuje).
- e) φ_n platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, stačí zvolit $x_2 = x_4 = \dots = x_{2n} = 1$, pak $x_1 x_3 \dots x_{2n-1} \geq 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1$ pro všechna $x_1, x_3, \dots, x_{2n-1} \in \mathbb{N}$.
- f) φ_n platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, stačí na konci zvolit $x_{2n} \in \mathbb{N}$ splňující $x_{2n} \geq \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n-1}}$ (takové x_{2n} zřejmě vždy existuje).
- g) φ_n neplatí, pro žádné $n \in \mathbb{N}$ je-li totiž zvoleno $x_{2n-1} \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n-2}} < x_{2n-1}$$

(což se vždy může stát), již nelze zvolit $x_{2n} \in \mathbb{N}$ tak, aby $x_1 x_2 \dots x_n \geq x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}$.

Řešení 1.7. Řešení se nejspíše ověří pomocí tabulek pravdivostních hodnot.

- a) $v(X \vee Y)$,
- b) $v(X \wedge Y)$,
- c) $v(X \wedge Y)$,
- d) $v(X \vee Y)$,
- e) $v(X \text{ XOR } Y)$ (XOR je tzv. vylučné „nebo“).

Řešení 1.8.

- a) Hledaná spojka je jednoznačně určena hodnotami valuací v, w , kde $v(X) = v(Y) = 0, w(X) = 0, w(Y) = 1$, přičemž tyto volby jsou na sobě nezávislé (hodnoty ostatních valuací jsou totiž určeny symetrií vůči transformaci $(X, Y) \mapsto (\neg X, \neg Y)$). Proto je možných hledaných spojek celkem $2^2 = 4$.
- b) Hledaná spojka je jednoznačně určena hodnotami valuací v, w , kde $v(X) = v(Y) = 0, w(X) = 0, w(Y) = 1$, přičemž tyto volby jsou na sobě nezávislé (hodnoty ostatních valuací totiž plynou z antisymetrie vůči transformaci $(X, Y) \mapsto (\neg X, \neg Y)$). Proto je možných hledaných spojek celkem $2^2 = 4$.
- c) Zadaná ekvivalence musí platit pro všechny valuace v, w . Nejprve předpokládejme $v(X) = 1, v(Y) = 0$. Platí-li $v(X \square Y) = 1$, pak $v(X \square \neg X) = 1$ a tedy $v((X \square \neg X) \square Y) = 1$, ale přitom $v(Y) = 0$. Proto musí platit $v(X \square Y) = 0$. Díky tomu pro $w(X) = 0, w(Y) = 0$ dostáváme $w(X \square \neg X) = 0$ a tedy $w((X \square \neg X) \square Y) = 1$, což odpovídá rovnosti $w(Y) = 1$. Protože už víme, že výraz $X \square \neg X$ může při vhodné valuaci nabýt libovolné z hodnot 0, 1, musíme nyní položit $u(X \square Y) = u(Y)$ pro všechny valuace u , což je v souladu s dosavadními volbami. Hledaná spojka tedy existuje jediná. (Všimněme si, že se vlastně jedná o „projekci“ na druhý argument.)

Řešení 1.9. Příkladem hledané spojky je třeba spojka $\square(X, Y) \cong \neg(X \rightarrow Y)$. Například pro valuaci v , která splňuje $v(X) = 1, v(Y) = 0, v(Z) = 1$ platí $v((X \square Y) \square Z) = 0$, ale $v(X \square (Y \square Z)) = 1$.

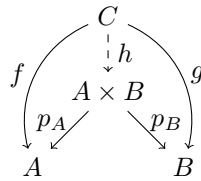
2 Množiny

Řešení 2.1. Pro spor předpokládejme, že M je nekonečná. Uvažujme posloupnost $\{m_i\}_{i=0}^{\infty}$ prvků množiny M tak, že m_0 je nejmenší prvek množiny M , m_1 je nejmenší prvek množiny $M \setminus \{m_0\}$, obecně pro každé $i \in \mathbb{N}_0$

$$m_i = \min \{M \setminus \{m_j, j < i\}\}.$$

Protože je M nekonečná, tak pro žádné $j \in \mathbb{N}_0$ nebude množina $M \setminus \{m_j, j < i\}$ prázdná. Posloupnost jsme tedy definovali korektně, protože každá neprázdná podmnožina M má nejmenší prvek. Je zřejmé, že $\{m_i\}_{i=0}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost. Množina všech jejích prvků je podmnožina M , která však nemá největší prvek. To je spor s předpokladem.

Řešení 2.2. Pokud nějaké zobrazení $h : C \rightarrow A \times B$ splňuje $p_A \circ h = f$ a $p_B \circ h = g$, pak pro všechna $c \in C$ musí platit $p_A(h(c)) = f(c)$ a $p_B(h(c)) = g(c)$, tedy $h(c) = (f(c), g(c))$. Na druhou stranu takto definované zobrazení h obě podmínky splňuje, takže je jednoznačně určené.

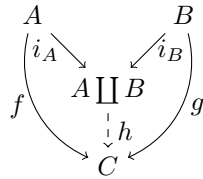


Obr. 1: Diagram kategoriálního součinu.

Řešení 2.3. Sjednocení přes systém množin je definováno jako množina všech prvků, které leží v některé z množin tohoto systému. Je-li tento systém prázdný, neobsahuje žádné množiny, ve kterých by prvky mohly ležet, proto je toto sjednocení prázdné.

Řešení 2.4. Průnik systému množin je definován jako množina všech prvků, které leží v každé množině daného systému. Je-li však tento systém prázdný, každá jeho množina splní naprosto cokoliv (neboť žádná taková neexistuje), zejména obsahuje všechny prvky množiny A . Proto je průnik prázdného systému roven A . Všimněme si, že je zde podstatný fakt, že uvažujeme podmnožiny libovolné, ale fixní množiny A . Pokud bychom se ptali pouze na průnik prázdného systému bez jakéhokoli kontextu, nebyl by výsledek definován, protože neexistuje nic jako „množina všech prvků“.

Řešení 2.5. Pokud nějaké zobrazení $h : A \amalg B \rightarrow C$ splňuje $h \circ i_A = f$ a $h \circ i_B = g$, pak pro všechna $a \in A$ musí platit $h(i_A(a)) = f(a)$ a pro všechna $b \in B$ musí platit $h(i_B(b)) = g(b)$, tedy $h((1, a)) = f(a)$ a $h((2, b)) = g(b)$ pro všechna $a \in A, b \in B$, což korektně definuje zobrazení h . Na druhou stranu takto definované zobrazení h obě podmínky splňuje, takže je jednoznačně určené. (Všimněte si, že tato úloha je „duální“ k úloze 2.2 – diagramy vypadají téměř stejně, jen se změnil směr šipek).



Obr. 2: Diagram kategoriálního součtu.

Řešení 2.6.

- a) Neplatí.
- b) Platí. Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.
- c) Neplatí.
- d) Neplatí.
- e) Neplatí.
- f) Platí.
- g) Neplatí. Uvažme $A = \{2\}, B = \{\{2\}\}, C = \{\{\{2\}\}\}$.
- h) Neplatí. Uvažme $A \neq \emptyset, B \subseteq A, B \neq \emptyset, C = \emptyset$.
- i) Neplatí. „Odečtením“ prázdné množiny se daná množina nikdy nemění.
- j) Platí.
- k) Platí.
- l) Neplatí.
- m) Platí.

Řešení 2.7. Platí $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ a $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Proto musí v právě jedné z inkluzí ze zadání nastat rovnost. Protože navíc požadujeme $\{\emptyset\} \notin A$, dostáváme $A = \{\emptyset\}$.

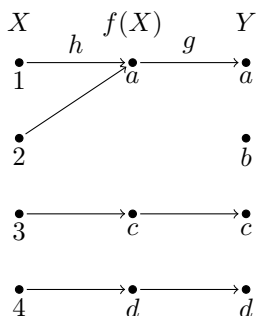
Řešení 2.8.

- a) $\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ je prvočíslo}\}$,
- b) $\{2^{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$,
- c) $\{2^n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$,
- d) $\{n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 10^k \mid n \in \{1, 2, \dots, 9\}\}$,
- e) $\{n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 10^k \mid n \in \mathbb{N}\}$.

3 Zobrazení a mohutnost množin

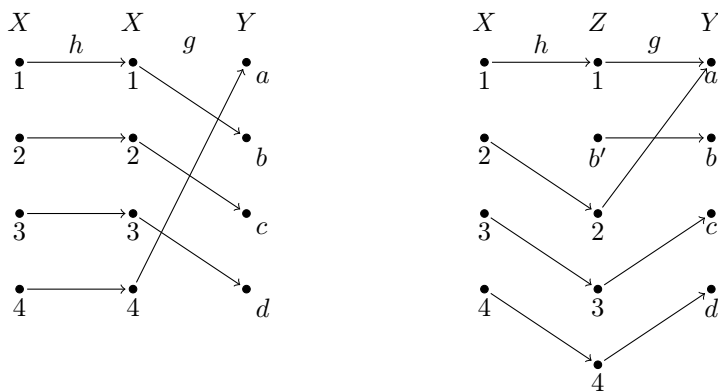
Řešení 3.1.

- a) Každé zobrazení $f : X \rightarrow Y$ můžeme napsat jako složení surjekce na jeho obraz a inkluze tohoto obrazu do Y . Formálně, definujme zobrazení $h : X \rightarrow f(X)$ a $g : f(X) \rightarrow Y$ předpisy $h(x) = f(x)$ a $g(y) = y$, potom platí $f = g \circ h$.



Obr. 3: Příklad zobrazení f jako složení surjekce a inkluze.

- b) Nejdříve zkusme uvážit h jako identitu na množině X (ta je určitě injektivní) a položit $g = f$. Pokud je f surjektivní, jsme hotovi. V opačném případě můžeme uvážit množinu $Y \setminus f(X)$ (tedy množinu složenou z prvků Y , na které se nic nezobrazilo). Protože množina $Y \setminus f(X)$ nemusí být obecně disjunkt s X , uvažme její „kopii“ W (tj. existuje bijekce $k : W \rightarrow Y \setminus f(X)$), která je disjunkt s X . Položíme-li nyní $Z = X \cup W$, můžeme definovat $h : X \rightarrow Z$ předpisem $h(x) = x$ a $g : Z \rightarrow Y$ definujeme pomocí dvou zúžení $g|_X = f$ a $g|_W = k$.



Je-li f surjektivní.

Není-li f surjektivní, $W = \{b'\}$.

Obr. 4: Příklad zobrazení f jako složení inkluze a surjekce.

Řešení 3.2.

- Diagram nedefinuje funkci, neboť existuje prvek z množiny X , který se na nic nezobrazuje.
- Diagram definuje funkci $f : X \rightarrow Y$ (každý prvek z množiny X se zobrazí na právě jeden prvek z množiny Y). Navíc f je surjektivní, ale není injektivní.
- Diagram nedefinuje funkci, neboť existuje prvek z množiny X , který se zobrazí na dva různé prvky z množiny Y .
- Diagram definuje funkci $f : X \rightarrow Y$ (analogicky jako v bodě b)). Funkce f je injektivní, ale není surjektivní.

Řešení 3.3.

- R není zobrazením, protože student může studovat na více univerzitách současně.
- R je zobrazením, studentův věk je určen jednoznačně.
- R je zobrazení, právě když všichni studenti mají právě jednoho partnera či partnerku.

Řešení 3.4.

- Platí

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &= \left\{x \in X \mid f(x) \in \bigcap_{i \in I} A_i\right\} \\ &= \{x \in X \mid \forall i \in I : f(x) \in A_i\} \\ &= \{x \in X \mid \forall i \in I : x \in f^{-1}(A_i)\} \\ &= \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i). \end{aligned}$$

- Platí

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &= \left\{x \in X \mid f(x) \in \bigcup_{i \in I} A_i\right\} \\ &= \{x \in X \mid \exists i \in I : f(x) \in A_i\} \\ &= \{x \in X \mid \exists i \in I : x \in f^{-1}(A_i)\} \\ &= \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i). \end{aligned}$$

Mohutnost množin

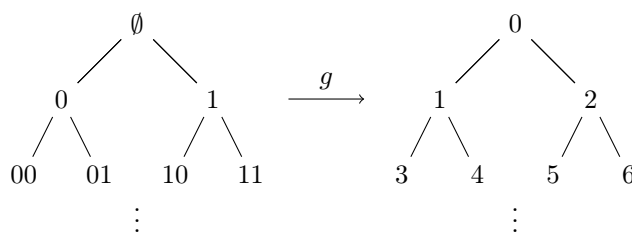
Řešení 3.5.

- Prvky $A, B \in P$ spolu leží v jádře, právě když $|A| = |B|$, tj. množiny A a B mají stejnou mohutnost.

- b) Třídy rozkladu P/J_f jsou tvořeny právě množinami se stejnou mohutností, tím rovnou dostáváme požadovanou bijekci $g : P/J_f \rightarrow \mathbb{N}_0$, která každé třídě přiřadí počet prvků nějaké její množiny (díky konstrukci rozkladu P/J_f je toto zobrazení definováno korektně).

Řešení 3.6. Uvažme zobrazení f , které každému nezápornému celému číslu přiřadí jeho zápis v binární soustavě. Snadno lze ověřit, že se jedná o bijekci, takže množina vrcholů nekonečného binárního stromu je spočetná.

Jiné řešení je zobrazeno na obrázku 5.

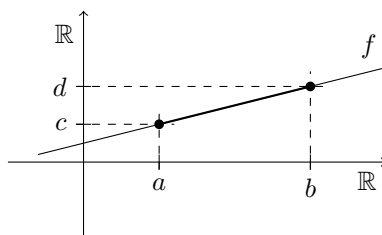


Obr. 5: Zobrazení binárního stromu na množinu $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Řešení 3.7. Hledejme zobrazení $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ ve tvaru $f(x) = kx + l$, kde $k, l \in \mathbb{R}$. Toto zobrazení můžeme geometricky interpretovat jako přímku v rovině (viz obrázek) procházející body $[a, c]$ a $[b, d]$, přitom je jasné, že se jedná o bijekci. Díky tomu dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c &= ka + l, \\ d &= kb + l. \end{aligned}$$

Odtud dopočítáme, že $k = \frac{d-c}{b-a}$ a $l = c - ka$, celkem tedy $f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$.



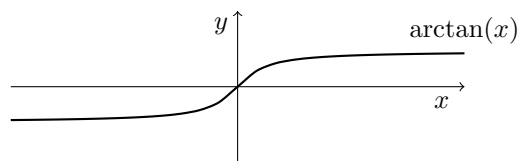
Obr. 6: Přímka zadávající bijektivní zobrazení mezi intervaly (a, b) a (c, d) .

Řešení 3.8. Díky předchozímu příkladu a faktu, že relace „mít stejnou mohutnost“ je tranzitivní (neboť složení dvou bijekcí je opět bijekce), stačí najít bijekci mezi nějakým konkrétním otevřeným intervalem a \mathbb{R} . Zvolme např. $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, přičemž definujme $f(x) = \arctan x$ (viz obrázek).

Dalším příkladem může být funkce $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, kde

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 2, & x \in (0, \frac{1}{2}), \\ 2 - \frac{1}{1-x}, & x \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Bijektivitu f i g lze snadno ověřit.



Obr. 7: Graf funkce \arctan zadávající bijekci mezi $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a \mathbb{R} .

Řešení 3.9. Pro všechny podbody platí

$$A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

- a) Množina A musí být spočetná. Víme totiž, že průnik $A \cap B$ je konečný. Pokud by nyní A byla konečná, byla by konečná i množina $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Podobně pokud by A byla nespočetná, byla by nespočetná i $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- b) Množina A musí být konečná nebo spočetná. V opačném případě by průnik $A \cap B$ byl nejvýše spočetný, a tedy množina $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ by musela být nespočetná.
- c) Množina A musí být nespočetná. V opačném případě by průnik $A \cap B$ byl nejvýše spočetný, a tedy množina $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ by musela být nespočetná.

4 Relace

Řešení 4.1. Uvědomme si, že každá relace na množině A je jednoznačně určena výběrem uspořádaných dvojic prvků z A a naopak každý takový výběr jednoznačně určuje relaci. Protože prvky v dané dvojici vybíráme nezávisle na sobě, je počet takových dvojic $|A|^2$, a tedy počet všech relací na množině A je $2^{|A|^2}$.

Řešení 4.2.

- a) Protože počet r všech relací na konečné množině A je konečný (konkrétně $2^{|A|^2}$, jak víme z předchozího příkladu), můžeme uvážit postupně relace

$$R^1, R^2, \dots, R^{r+1}.$$

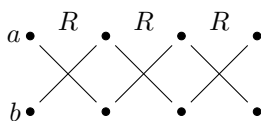
Z Dirichletova principu nyní vyplývá, že alespoň dvě z těchto relací jsou stejné.

Naopak je-li A nekonečná, uvedeme protipříklad. Buď $A = \mathbb{N}$ a relace $R = \{(k, k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Pak pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $R^n = \{(k, k+n) \mid k \in \mathbb{N}\}$, tedy pro libovolná $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$ platí $R^n \neq R^m$.

- b) Necht' například $A = \{a, b\}$ a $R = \{(a, b), (b, a)\}$, potom

$$R^{2k} = \{(a, a), (b, b)\},$$

ale $R^{2k+1} = R$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, neboť R pouze oba prvky permutuje.



Obr. 8: Příklad relace R , $R = R^3 \neq R^2$.

Řešení 4.3.

- a) R je reflexivní, právě když pro každé $a \in A$ platí $(a, a) \in R$, což je přesně to, že $\Delta_A \subseteq R$.
- b) R je symetrická, právě když pro všechny dvojice $(a, b) \in R$ platí $(b, a) \in R$, což nastane právě když $R = R^{-1}$.
- c) Pro $(a, b) \in R \cap R^{-1}$ platí $(b, a) \in R \cap R^{-1}$, inkluze $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$ pak znamená, že $a = b$, což nastane, právě když R je antisymetrická relace.
- d) Z vlastnosti skládání zobrazení plyne následující ekvivalence:

$$R^2 = R \circ R \subseteq R \iff \forall a, b, c \in A : ((a, b), (b, c) \in R) \implies (a, c) \in R,$$

přičemž napravo je podmínka ekvivalentní tranzitivnosti R .

- e) Začneme implikací zleva doprava. Předpokládejme, že R je reflexivní a antisymetrická. Potom zřejmě i R^{-1} je reflexivní a antisymetrická a tak i jejich průnik musí být reflexivní. Tedy $R \cap R^{-1} \supseteq \Delta_A$. Předpokládejme,

že $aR \cap R^{-1}b$, tedy současně aRb a $aR^{-1}b$, což je ekvivalentní s aRb a bRa , z čehož pro antisymetrii R plyne $a = b$. A tedy $R \cap R^{-1} = \Delta_A$.

Nyní půjdeme naopak. Předpokládáme, že $R \cap R^{-1} = \Delta_A$. Je zřejmé, že R i R^{-1} jsou reflexivní. Stačí ukázat, že R je antisymetrická, z čehož plyne rovněž antisymetričnost R^{-1} . Pro tyto potřeby necht' $a, b \in A$ jsou libovolné takové, že aRb a bRa . Proto také $aR^{-1}b$ a $bR^{-1}a$. Tedy $aR \cap R^{-1}b$ a $bR \cap R^{-1}a$. Z antisymetričnosti diagonály dostáváme ihned $a = b$, což jsme chtěli ukázat.

Řešení 4.4. Všimněme si, že antisymetričnost je speciální případ acykličnosti pro $n = 2$. Uvažme nyní relaci $R_1 = R \cup \Delta_A$, kde $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$. Vidíme, že R_1 je reflexivní a antisymetričnost se zřejmě zachovává (acykličnost ovšem z triviálních důvodů nikoli). Dále uvažme tranzitivní obal T relace R_1 (je definován přepisem $T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_1^i$ a jedná se o nejmenší tranzitivní relaci obsahující R_1 vzhledem k inkluzi). Ten je opět reflexivní, zbývá ukázat, že se neporušila ani antisymetričnost. Předpokládejme tedy, že aTb a zároveň bTa pro nějaká $a, b \in A$. Pak podle definice T existují prvky $a = a_1, a_2, \dots, a_k = b = b_1, b_2, \dots, b_l = a$ takové, že $a_1Ra_2, \dots, a_{k-1}Ra_k, b_1Rb_2, \dots, b_{l-1}Rb_l$. Odtud ovšem plyne $a = b$, jinak bychom dostali spor s acykličností R .

Řešení 4.5.

- a) $aR^{-1}b$ znamená, že a je dítětem b .
- b) $S^{-1} = S$
- c) $a(R \circ S)c$ znamená, že a je strýc nebo teta osoby c .
- d) $a(S \circ R)c$ znamená, že a je rodičem nějakého sourozence osoby c .
- e) aR^2b znamená, že a je prarodičem b .
- f) aS^2b znamená, že $a = b$ nebo jsou to sourozenci. V obou případech ale musí mít společného sourozence.

Řešení 4.6.

- a) sym.
- b) ref., sym., tranz., jde tedy o relaci ekvivalence
- c) antisym., tranz.
- d) ref., antisym., tranz.
- e) ref., sym., tranz., jde tedy o relaci ekvivalence
- f) ref., sym.
- g) sym.
- h) Buď $R = \emptyset \implies$ sym., antisym., tranz. A nebo: $R = R^2 \implies$ ref., sym., tranz.

Řešení 4.7. P i S jsou reflexivní, symetrické a tranzitivní. Obě jsou tedy ekvivalence.

Řešení 4.8. Relace R je reflexivní, neboť každý stát má sám se sebou společnou hranici. Je zřejmě symetrická. Tato relace není tranzitivní, neboť např. Česká republika a Francie nesdílí žádnou část hranice, i když obě sousedí s Německem.

Řešení 4.9. Nejprve si uvědomme, že poloha hodinové ručičky jednoznačně přiřazuje polohu ručičky minutové. Proto je ρ skutečně zobrazení. Není ale prosté, protože dané poloze dlouhé ručičky odpovídá hned 12 různých poloh malé ručičky. Proto ρ^{-1} není zobrazení. Je to relace na $[0, 2\pi)^2$, určená $(\beta, \alpha) \in \rho^{-1}$ tehdy, když existuje denní čas, kdy úhel mezi spojnici středu hodin s dvanáctkou a malou ručičkou je α a úhel mezi spojnici středu hodin s dvanáctkou a velkou ručičkou je β .

Řešení 4.10. Na prvky ρ se můžeme dívat jako na matice typu 2×2 nad reálnými čísly. chápeme-li prvek $((a, b)(c, d)) \in \rho$ jako matici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, potom výraz $ad - bc$ odpovídá determinantu této matice. Můžeme tak využít znalosti z lineární algebry.

- a) Matice složená ze dvou stejných řádků má nulový determinant, takže ρ není reflexivní. Prohození dvou řádků matice mění pouze znaménko determinantu, ale jeho absolutní hodnota se nemění, tedy ρ je symetrická. Tranzitivní relace ρ není, např.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ale

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Relace ρ není ani antisymetrická, protože např.

$$\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right|.$$

- b) Relace ρ je reflexivní, protože matice složená ze dvou stejných řádků má nulový determinant. Dále je ρ symetrická, neboť záměna řádků pouze mění znaménko nulového determinantu. Tranzitivita ρ plyne ze známého faktu, že matice má nulový determinant, právě když jsou její řádky lineárně závislé, což v případě matic typu 2×2 znamená, že jeden je nenulovým skalárním násobkem druhého, a toho že relace být nenulovým skalárním násobkem je tranzitivní. Antisymetrická není, neboť např.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení 4.11. Relace ρ není reflexivní, neboť žádný člověk není o rok starší než on sám. Také není symetrická, protože určitě existují dva lidé, z nichž jeden je o rok starší než druhý, ale ne naopak. Dále není tranzitivní, neboť je-li B o rok starší než A a zároveň C o rok starší než B , je C o dva roky starší než A , nikoli o jeden. Antisymetrická ovšem je, neboť neexistují žádní dva lidé, z nichž by každý byl o rok starší než druhý, takže z tohoto předpokladu vyplývá libovolné tvrzení, zejména pak, že tito lidé jsou totožní.

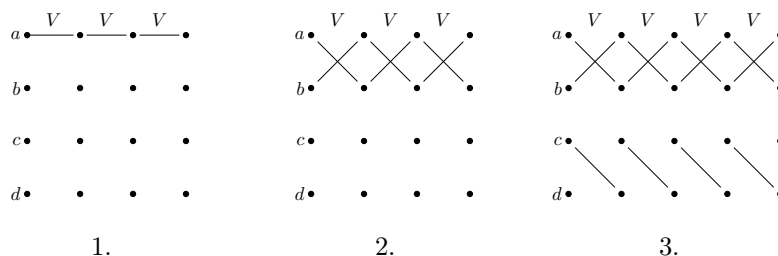
Řešení 4.12. Relace ρ není reflexivní, neboť určitě existuje alespoň jeden člověk, který sám sebe neobdivuje. Také není symetrická, protože určitě existují dva lidé, z nichž jeden obdivuje druhého, ale ne naopak. Dále není tranzitivní, neboť určitě existují tři lidé, z nichž jeden obdivuje druhého a druhý třetího, ale nikoliv první třetího. Antisymetrická také není, protože určitě existují dva různí lidé, kteří se vzájemně obdivují. (Pro konkrétní případy výše uvedených tvrzení proveďte důkladný rozbor rodin autorů této sbírky.)

Řešení 4.13. Relace ρ je reflexivní, právě když $n = 1$. Symetrická je pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tranzitivní je právě pro $n = 1$ (už kvůli tomu, že je symetrická a současně pro $n \neq 1$ není reflexivní). Antisymetrická je právě pro $n = 1$, neboť pro $n > 1$ stačí uvážit libovolné dva sousedy.

Řešení 4.14. Žádná z relací R, S není reflexivní, neboť žádný ze studentů nehrál sám se sebou páku, tedy nad sebou zejména nevyhrál. Relace R je symetrická, zatímco S ne. Relace R je tranzitivní, neboť každý student hrál s každým. O tranzitivitě S neumíme rozhodnout, neboť záleží na výsledcích utkání. Relace R není antisymetrická, avšak relace S ano, neboť žádní dva různí studenti se nemohli navzájem porazit.

Řešení 4.15.

- Zadání vyhovuje např. $V = \{(a, a)\}$ (viz obrázek).
- Zadání vyhovuje např. $V = \{(a, b), (b, a)\}$ (viz obrázek).
- Zadání vyhovuje např. $V = \{(a, b), (b, a), (c, d)\}$ (viz obrázek).



Obr. 9: Příklady relací.

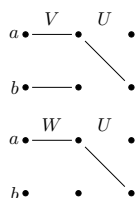
Řešení 4.16.

- Zadání vyhovuje např. $V = \{(a, b)\}$ (viz obrázek).
- Zadání vyhovuje např. $V = \{(a, b), (c, a)\}$ (viz obrázek).



Obr. 10: Příklady relací.

Řešení 4.17. Zadání vyhovují např. relace $U = \{(a, b)\}$, $V = \{(a, a), (b, b)\}$ a $W = \{(a, a)\}$ (viz obrázek).



Obr. 11: Příklad relací U, V .

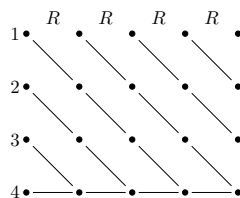
Řešení 4.18.

- Neplatí, uvažme např. $V = \{(a, a), (b, b)\}$, $U = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}$.
- Nechť $(a, b) \in V$, pak také $(a, b) \in U \circ V$, neboť z reflexivity U plyne $(b, b) \in U$. Proto platí $V \subseteq U \circ V$.

Řešení 4.19. Zadání vyhovuje např. množina $A = \{1, 2, \dots, n\}$ a relace

$$R = \{(k, k+1) \mid k \in \{1, \dots, n-1\}\} \cup \{(n, n)\}$$

a platí $R^k \neq R^l$ pro $l < k < n$, ale $R^k = R^l$ pro $n-1 \leq k < l$ (viz obrázek). Pro $n = 4$ dostáváme



Obr. 12: Příklad relace R pro $n = 4$.

Řešení 4.20.

- Je reflexivní a tranzitivní, není symetrická ani antisymetrická.
- Je nutné přidat šipky $c \mapsto b$, $c \mapsto a$, což zároveň stačí.
- Je nutné smazat jednu ze šipek $a \mapsto b$ nebo $b \mapsto a$, což zároveň stačí.

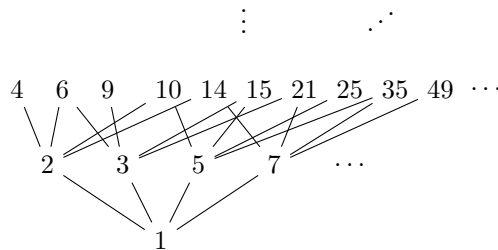
Řešení 4.21. Všechny hledané relace musí být reflexivní, tudíž každá obsahuje všechny dvojice tvaru (x, x) , $x \in \mathbb{N}$. Kdyby dále některé z nich obsahovala dvojici (y, z) , $y, z \in \mathbb{N}$, $y \neq z$, pak by kvůli podmínce symetrie obsahovala také dvojici (z, y) , takže z antisymetrie by plynulo $y = z$, což je spor. Proto zadání vyhovuje pouze jediná relace $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{N}\}$. (Uvědomme si, že stejnou úvahu bychom mohli provést nejen pro množinu \mathbb{N} , ale pro libovolnou množinu.)

5 Uspořádané množiny

Řešení 5.1.

- Předpokládejme, že existuje supremum množiny všech prvočísel a označme jej p . Tedy p je dělitelné každým prvočíslem, tedy je větší rovno každému prvočíslu. To je spor s tím, že je prvočísel nekonečně mnoho, protože existuje pouze konečně mnoho prvočísel nepřesahujících p . Sporem jsme ukázali, že tvrzení neplatí.
- Supremem prázdné množiny je zde nejmenší prvek 1. Supremum každé konečné neprázdné podmnožiny \mathbb{N} je zase nejmenší společný násobek jejích prvků. Tvrzení platí.
- Označme s nejmenší přirozené číslo (v obvyklém uspořádání) dané neprázdné podmnožiny A přirozených čísel. Každá dolní závora množiny A v uspořádání dělitelnosti musí zejména dělit číslo s . Jistě je číslo jedna dolní závorou množiny A v uspořádání dělitelnosti (1 dělí každé číslo z A). Je proto množina všech dolních závor množiny A neprázdná a konečná. Má tedy největší prvek a ten je infimem A .
- Plyne z předešlých dvou částí - každá dvouprvková podmnožina má supremum i infimum.

Řešení 5.2. Uvažme rozklad na prvočinitele čísla $k = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, kde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Bezprostředně pod číslem k se v našem diagramu nalézají právě čísla tvaru $p_1^{a_1-1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$, $p_1^{a_1} p_2^{a_2-1} \dots p_n^{a_n}$, \dots , $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n-1}$, kterých je n .



Obr. 13: Hasseův diagram pro přirozená čísla uspořádaná dělitelností.

Řešení 5.3.

- Ano, existuje. Například uvažme standardní uspořádání na množině \mathbb{N} a uspořádání tvaru $1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots$ (tedy nejdříve všechna lichá čísla, poté všechna sudá čísla uspořádaná podle velikosti viz obrázek 14). Druhé uspořádání lze formálně popsat takto

$$x \sqsubseteq y \iff (2 \mid x - y \wedge x \leq y) \vee (2 \nmid x \wedge 2 \mid y)$$

- Ano, existuje. Opět využijeme dělitelnosti. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, definujeme uspořádání

$$x \sqsubseteq_n y \iff (n \mid x - y \wedge x \leq y) \vee (r(x) \leq r(y)),$$

Obr. 14: Hasseův diagram množiny přirozených čísel uspořádaných podle \sqsubseteq .

kde $r(x)$ značí zbytek čísla x po dělení číslem n . (Jde o zobecnění principu použitého v předchozím bodě.)

- c) Tvrzení vyplývá z faktu, že lineární uspořádání \mathbb{N} odpovídají spočetným ordinálním číslům, kterých je nespočetně mnoho. Je také možné explicitně zkonstruovat nespočetně mnoho vzájemně neizomorfních uspořádání \mathbb{N} , ale to je poněkud složitější.

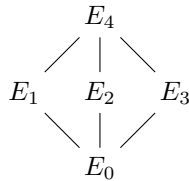
Řešení 5.4. Víme, že každá podmnožina množiny (A, \leq) má supremum. Vidíme, že A má největší prvek - je jím supremum celé množiny A . Největší prvek množiny A je pak infimem prázdné množiny. Buď $B \subseteq A$ neprázdná množina. Chceme ukázat, že má v A infimum. Buď U množina všech dolních závor množiny B , tj.

$$U = \{u \in A : \forall b \in B u \leq b\}.$$

Množina U jistě obsahuje nejmenší prvek množiny A a je tak neprázdná. Její supremum označíme m . Pokud ukážeme, že $m \in U$, bude m největší dolní závorou množiny B , tedy jejím infimem. Pro libovolné $b \in B$ platí $x \leq b$ pro každé $x \in U$. Proto b je horní závora množiny U . Ale m je jejím supremem, takže $m \leq b$ (m je nejmenší horní závora U). To ale platí pro všechna $b \in B$ a proto $m \in U$.

Řešení 5.5.

- a) Zvolme zobrazení $f : (X, \preceq) \rightarrow (P(X), \subseteq)$ definované předpisem $f(\bar{x}) = \{x \in X \mid x \leq \bar{x}\}$. Toto zobrazení je zřejmě prosté a má požadovanou vlastnost $x_1 \preceq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \subseteq f(x_2)$.
- b) Nakreslíme si Hasseův diagram dané konečné uspořádané množiny X . Ta má konečně mnoho minimálních prvků a ty zobrazíme na libovolná různá prvočísla. V každém dalším kroku škrtneme minimální prvky v našem diagramu a zaměříme se na minimální prvky takto vzniklého diagramu. Takový prvek x zobrazíme na nejmenší společný násobek jeho předchůdců (tj. právě škrtnutých minimálních prvků, které jsou pod x). Protože je X konečná množina, je konečný i tento algoritmus. Snadno nahlédneme, že s ohledem na jednoznačnost rozkladu na prvočinitele je toto zobrazení prosté.



- c) Myšlenka možného řešení spočívá ve využití následující vlastnosti racionálních čísel: mezi každými dvěma racionálními čísly existuje spočetně mnoho dalších racionálních čísel (která jsou samozřejmě opět lineárně uspořádaná) - stačí půlit intervaly. Protože i mezi libovolnými dvěma prvky libovolné nejvýše spočetně uspořádané množiny existuje nejvýše konečně mnoho prvků (v daném uspořádání), je možno hledané vnoření sestrojít.

Řešení 5.6.

- a) Označme $X = \{1, 2, 3\}$. Z podmínky reflexivity obsahuje každá ekvivalence $E \in Eq(X)$ nutně všechny prvky tvaru (x, x) pro $x \in X$. Přičemž symetrie i tranzitivita jsou splněny, dostáváme tak rovnou jednu ekvivalenci $E_0 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

Pokud přidáme prvek (x, y) , kde $x \neq y$ musíme kvůli zachování symetrie přidat i (y, x) , tranzitivita je přitom splněna. Dále tedy získáváme $E_1 = E_0 \cup \{(1, 2), (2, 1)\}$, $E_2 = E_0 \cup \{(2, 3), (3, 2)\}$ a $E_3 = E_0 \cup \{(1, 3), (3, 1)\}$.

Přidání libovolné další dvojice (u, v) , kde $u \neq v$, kterou jsme zatím nepoužili, vynutí přidání již všech dvojic. Tedy $E_4 = X \times X$. Se znalostí všech ekvivalencí na X již není těžké nakreslit Hasseův diagram pro $(Eq(X), \subseteq)$.

b)

Důkaz 1 Stačí ukázat, že každá dvojeprvková podmnožina $P = \{\sigma, \rho\}$ uspořádané množiny $Eq(X)$, má supremum a infimum. Uvažme průnik relací $\sigma \cap \rho$. Ukážeme-li, že je to ekvivalence, bude jasné, že je to také infimum P .

Reflexivní je, neboť obě relace ρ a σ jsou reflexivní a obsahují tedy diagonálu $\{(x, x), x \in X\}$, která tak leží i v jejich průniku.

Symetrie je také jednoduchá: Nechť $(x, y) \in \sigma \cap \rho$, pak

$$(x, y) \in \sigma \wedge (x, y) \in \rho.$$

Ze symetrie obou relací dostáváme $(y, x) \in \sigma \wedge (y, x) \in \rho$. Proto $(y, x) \in \sigma \cap \rho$.

Zbývá ukázat, že je $\sigma \cap \rho$ tranzitivní. Nechť tedy $(x, y), (y, z) \in \sigma \cap \rho$. Potom z tranzitivity obou relací σ a ρ plyne $(x, z) \in \sigma \cap \rho$.

Nyní najdeme supremum množiny $\{\sigma, \rho\}$. Každá horní závora $\{\sigma, \rho\}$ musí obsahovat všechny prvky σ a ρ . Tedy i naše supremum musí být minimálně $\sigma \cup \rho$. Všimněme si, že $\sigma \cup \rho$ podobně jako průnik „dědí“ vlastnosti symetrie a reflexivity. Bohužel však nemusí být tranzitivní. Uvažme tranzitivní obal $(\sigma \cup \rho)^+$. Ten je definován jako průnik systému T všech tranzitivních relací, které obsahují $\sigma \cup \rho$ jako svoji

podmnožinu. Systém T je vždy neprázdný, jelikož v něm leží celá 2^X . Zřejmě je $(\sigma \cup \rho)^+$ nejmenší tranzitivní relace obsahující $(\sigma \cup \rho)$. Její reflexivita je zřejmá. Zbývá ukázat, že je také symetrická. Systém T je uzavřený na inverzní relace (inverze tranzitivní relace je tranzitivní a $\sigma \cup \rho$ je symetrická). Proto je průnik jeho prvků invariantní vůči inverzi a tedy symetrický.

Důkaz 2 Ukážeme něco ještě silnějšího, totiž, že se jedná o úplný svaz. Stačí ukázat, že libovolná podmnožina P uspořádané množiny $Eq(X)$, má infimum. To bude průnikem všech prvků P , který si zachová symetrii, reflexivitu i tranzitivitu, což necháváme jako cvičení. Na těchto dvou důkazech je hezky vidět, že někdy může být snazší dokazovat něco silnějšího, než se po nás ve skutečnosti žádá - je jen potřeba si toho všimnout.

Řešení 5.7.

a) Ano, existuje. Podmínky splňuje:



Každý z prvků je maximální a musejí být minimálně dva, což zároveň stačí.

b) Ano, existuje. Podmínky splňuje:



Pokud bychom odebrali prvek z „dolního patra“ nebude uspořádání splňovat podmínku existence množiny bez infima. Naopak odebrání prvku z „horního patra“ poruší podmínku existence suprema. Odebráním libovolných dvou prvků zůstane pouze jeden prvek, opět se ale poruší podmínka existence množiny bez infima.

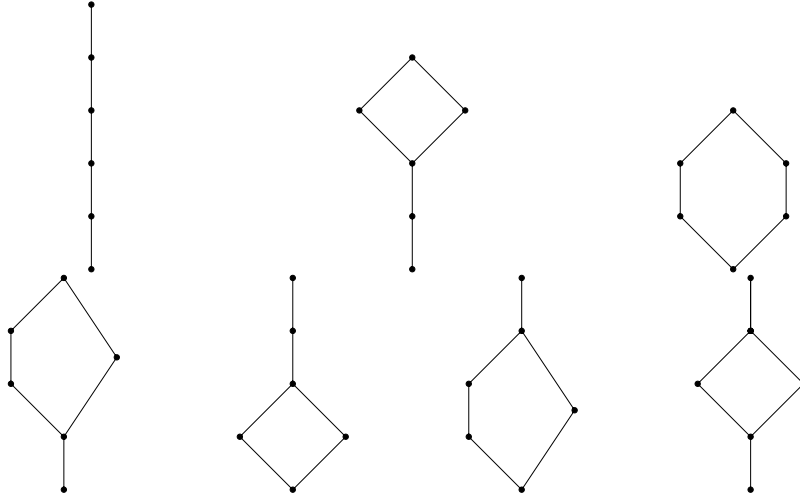
c) Neexistuje. Postupujme sporem. Předpokládejme existenci dvou největších prvků n_1, n_2 , přičemž $n_1 \neq n_2$. Protože jsou oba největší, platí $n_1 \leq n_2 \leq n_1$, a protože jde o uspořádání (zejména platí antisymetrie), pak $n_1 = n_2$, což je spor.

d) Ano, existuje. Podmínky splňuje (kde levý řetězec je nekonečný):



Začneme jedním prvkem. Ten je určitě minimální, zároveň však nejmenší. Abychom porušili druhou vlastnost je třeba přidat jiný, nesrovnatelný prvek. Nyní se ale nacházíme v situaci z bodu 1., musíme proto přidat celý nekonečný řetězec, abychom zaručili neexistenci druhého minimálního prvku.

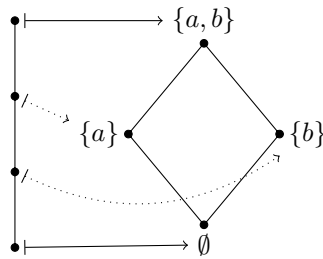
Řešení 5.8. Na obrázku vidíte všechny šestiprvkové svazy.



Obr. 15: Všechny šestiprvkové svazy.

Řešení 5.9. Každé takové izotonní zobrazení jednoznačně odpovídá m -prvkové kombinaci s opakováním vybrané z n prvkové množiny. Těch je přitom $\binom{n+m-1}{m}$.

Řešení 5.10. Izomorfismus je bijekce zachovávající uspořádání oběma směry. Předpokládejme pro spor, že existuje izomorfismus z úplného svazu všech podmnožin dvouprvkové množiny do čtyřprvkového řetězce. Největší prvek musí jít na největší prvek, nejmenší na nejmenší a zbylé dva musíme zobrazit vedle sebe. A máme tu kýžený spor, protože dva porovnatelné prvky se nám zobrazily na dva prvky nesrovnatelné.



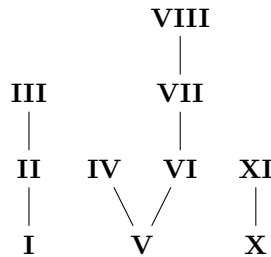
Obr. 16: Neexistence izomorfismu mezi danými uspořádáními.

Řešení 5.11.

- Ukážeme, že se skutečně jedná o úplný svaz. Prázdná množina má zřejmě supremum, což je nejmenší prvek množiny I^I , tj. konstantní zobrazení na nulu. Každá neprázdná množina A má supremum, které zobrazí $x \in I$ na $\sup\{f(x), f \in A\}$, přičemž $\sup\{f(x), f \in A\}$ existuje, neboť reálná čísla jsou úplným svazem.
- Množina $H := \{f : I \rightarrow I, f(x) = x^n | n \in \mathbb{N}\}$ všech mocninných funkcí nemá supremum. Nejde tedy o úplný svaz, ale svaz to je.

- c) Označme $f, g : I \rightarrow I, f(x) = x, g(x) = 1 - x$. Množina $\{f, g\}$ pak nemá supremum a nejde tedy o svaz, natož úplný svaz.
- d) Nejde o úplný svaz. Množina H z bodu b) zde totiž opět nemá supremum.
- e) Dokažme, že se jedná o úplný svaz. Prázdná množina má zřejmě supremum konstantní zobrazení na nulu, které je neklesající. Každá neprázdná množina A neklesajících funkcí $I \rightarrow I$ má supremum, které zobrazí $x \in I$ na $\sup\{f(x), f \in A\}$, přičemž $\sup\{f(x), f \in A\}$ existuje, neboť reálná čísla jsou úplným svazem, a je neklesající.

Řešení 5.12. Abychom ukázali, že relace \leq ze zadání je skutečně relací uspořádání potřebujeme ověřit, že je \leq reflexivní, tranzitivní a antisymetrická. Každou římskou číslici vytvoříme z ní samotné přiložením nula sirek, tedy \leq je reflexivní. Necht' dále y vznikne z x přiložením $k \geq 0$ sirek a z vznikne z y přiložením $l \geq 0$ sirek (tedy $x \leq y$ a zároveň $y \leq z$), potom z vznikne z x přiložením $k + l$ sirek (tj. $x \leq z$), přičemž zřejmě $k + l \geq 0$, a proto platí tranzitivita \leq . Antisymetrii dokažme sporem, necht' tedy $x \leq y$ a zároveň $y \leq x$, tedy y vznikne z x přidáním $k \geq 0$ sirek, a následně přidáním $l \geq 0$ dostaneme opět x . Dohromady x vznikne z x přidáním $k + l \geq 0$ sirek, kdyby $x \neq y$, pak alespoň jedno z čísel k, l je kladné. A to je spor, protože žádné římské číslo nevznikne samo ze sebe přidáním kladného počtu sirek.



Obr. 17: Hasseův diagram uspořádání sirek.

Řešení 5.13.

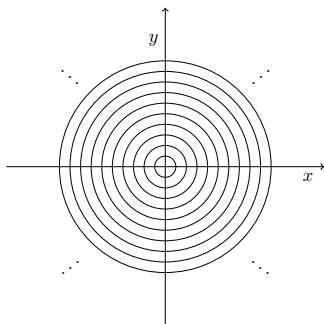
- a) Izotonní zobrazení existuje – stačí zvolit vnoření $f: \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definované $f(z) = z$. Izomorfismus ale neexistuje, neboť by musel zobrazit největší prvek 0 množiny $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ na největší prvek. Žádný takový ale množina \mathbb{Z} neobsahuje.
- b) Izotonní zobrazení existuje – stačí zvolit triviální zobrazení $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definované $f(z) = 1$. Izomorfismus opět neexistuje, protože by zobrazení f^{-1} muselo zobrazit největší prvek 1 množiny $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ na největší prvek. Žádný takový, ale v (\mathbb{N}, \preceq) neexistuje.

Uvědomme si, že mezi libovolnými dvěma uspořádanými množina existuje takovéto triviální izotonní zobrazení vždy. V tomto případě však neexistuje žádné vnoření.

6 Ekvivalence

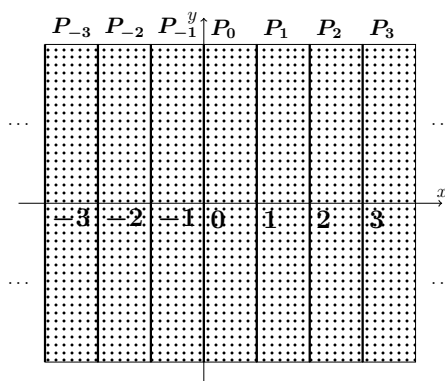
Řešení 6.1. U některých příkladů navíc udáváme pro lepší představu příklad množiny, se kterou je daný rozklad $\text{Dom}(f)/J_f$ v bijekci.

- Každý den si označme jeho pořadím v přestupném roce. Hledaným rozkladem je množina tříd lidí, kteří mají narozeniny ve stejný den v roce.
- Hledaným rozkladem je množina $\{\{\text{kruh}\}, \{\text{trojúhelník}\}, \{\text{čtverec, obdélník}\}\}$, což je trojprvková množina.
- Hledaným rozkladem je množina $\{-x, x \mid x \in \mathbb{R}\}$, která je v bijekci s \mathbb{R}_0^+ .
- Hledaným rozkladem je množina $\{x + 7\mathbb{Z} \mid x \in \{0, \dots, 6\}\}$, kde $x + 7\mathbb{Z} = \{x + 7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Tato množina se nazývá množina zbytkových tříd modulo 7, značí se \mathbb{Z}_7 a je sedmiprvková.
- Hledaným rozkladem je množina tříd zlomků, které mají stejný základní tvar, což je v bijekci s množinou $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{gcd}(p, q) = 1\} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$.
- Uvědomme si, že rovnice $x^2 + y^2 = r^2, r \in \mathbb{R}_0^+$ popisuje kružnici v rovině se středem v počátku o poloměru r . Dva různé body $(u, v), (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jsou tedy ve stejné třídě rozkladu, právě když leží na stejné kružnici se středem v počátku.



Obr. 18: Rozklad $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ podle J_f .

- Pro dva prvky $(u, v), (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ platí $(u, v) \sim (x, y)$, právě když $|u - x| \in [0, 1)$. Rozkladem je tak množina $\{P_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, kde $P_k = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid k \leq x < k + 1\}$ (viz obrázek).

Obr. 19: Rozklad $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ podle J_f .

Řešení 6.2. Uvědomme si, že každé rýmové schéma odpovídá výběru řádků, které se navzájem rýmují (všimněme si, že „rýmovat se“ je relace ekvivalence). Tudíž každé rýmové schéma n -řádkové básně odpovídá počtu ekvivalencí na n -prvkové množině (tento počet se nazývá n -té Bellovo číslo). Snadno ověříme, že na čtyřprvkové množině existuje 15 ekvivalencí, a tedy i rýmových schémat. Jsou to právě tyto: AAAA, AAAB, AABA, AABB, AABC, ABAA, ABAB, ABAC, ABBA, ABBA, ABBA, ABBC, ABBC, ABBC, ABCC aligned ABCD.

Řešení 6.3. To že jde o ekvivalenci ověříme snadno ve třech krocích:

- Reflexivita: každé římské číslo je v relaci ρ samo se sebou.
- Symetrie: Pokud se číslo A skládá ze stejně sirek jako číslo B , tak se určitě i číslo B skládá ze stejně sirek jako číslo A .
- Tranzitivita: Pokud se číslo A skládá ze stejně sirek jako číslo B a číslo B skládá ze stejně sirek jako číslo C , tak se určitě číslo A skládá ze stejně sirek jako číslo C .

Příslušný rozklad má 5 prvků:

$$\{\{I\}, \{II, V, X\}, \{III, IV, VI, IX\}, \{VII\}, \{VIII\}\}.$$

Řešení 6.4.

- Poslouží nám zobrazení f z množiny všech žáků dané školy do množiny všech tříd v této škole, které žáka zobrazí na třídu, do níž chodí.
- Zde uvážíme zobrazení z množiny všech zvířat do \mathbb{N}_0 tak, že každé zvíře zobrazíme na počet jeho nohou (hada na nulu).

Řešení 6.5. Nejprve ukážeme, že relace \sim je ekvivalence:

- Reflexivita: $\forall u \in U : u \sim u \iff u - u \in \ker \varphi$, což platí vždy, neboť $\varphi(0) = 0$.
- Symetrie: Protože je $\ker \varphi$ lineární podprostor vektorového prostoru U , je uzavřený na násobení -1 . Platí

$$\begin{aligned} \forall u, v \in U : u \sim v &\iff u - v \in \ker \varphi \\ &\iff -1(u - v) = v - u \in \ker \varphi \\ &\iff v \sim u. \end{aligned}$$

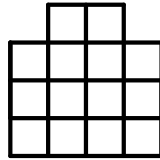
c) Tranzitivita:

$$\begin{aligned}\forall u, v, w \in U : u \sim v \wedge v \sim w &\implies u - v, v - w \in \ker \varphi \\ &\implies u - v + v - w \in \ker \varphi \\ &\iff u \sim w.\end{aligned}$$

Protože rovnost $\varphi(u) = \varphi(v)$ je díky linearitě φ ekvivalentní rovnosti $\varphi(u - v) = 0$, dostáváme, že $J_\varphi = \sim$.

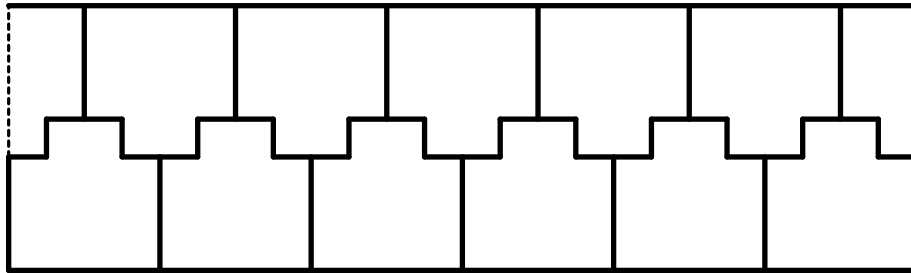
7 Kombinatorika

Řešení 7.1. Uvažme osmiúhelník jako na obrázku složený z 14 čtverců o stranách jeden metr. Snadno nahlédneme, že libovolná dvojice bodů tohoto útvaru má od sebe vzdálenost nejvýše 5 metrů.



Obr. 20: Osmiúhelníkový útvar.

Každý pás pozemku o rozměrech 7 x 24 jsme schopni rozdělit na 13 dílků, z nichž každý se vejde do našeho osmiúhelníka. Přitom celou zahradu lze pokrýt šesti takovými pásy.



Obr. 21: Pás vyplněný útvary.

Tak jsme rozdělili dědův pozemek na $6 \cdot 13 = 78$ dílků. Protože stromů je 80, musí být dle Dirichletova principu alespoň v jednom z dílků alespoň dva stromy. Ty jsou pak od sebe nejvýše pět metrů daleko.

Řešení 7.2.

- Každý takový obdélník lze jednoznačně popsat výběrem dvojice svislých čar a dvojice horizontálních čar, které ho ohraničí. Těch je ale $\binom{m+1}{2} \cdot \binom{n+1}{2}$.
- Čtverce seřadíme podle velikosti a sečteme zvlášť. Čtverců o straně r je zde zřejmě $(m-r+1)(n-r+1)$. Tedy celkem

$$\sum_{r=1}^{\min\{m,n\}} (m-r+1)(n-r+1).$$

Řešení 7.3. Pokud bychom koně uměli rozlišit, stačilo by sečíst přes všechna pole počet všech ostatních, ne něž může kůň táhnout. Na obrázku je v každé poli P šachovnice počet okolních polí, na která lze z P skočit koněm. Součet $4(4 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2) = 336$ čísel v polích je dvojnásobkem hledaného počtu, neboť koně jsou nerozlišitelní. Odpověď zní 168.

Řešení 7.4.

a) $\frac{7!}{7} = 6! = 720$

b) Seřadíme je do řady a postupně posadíme. Tedy $7! = 5040$.

Řešení 7.5.

a) To je přece polovina všech seřazení, tedy $\frac{5!}{2}$.

b) Jestli má jít A hned po B , můžeme je sloučit dopředu, takže vlastně řadíme prvky AB, C, D, E . To jde $4!$ možnostmi.

Řešení 7.6. Všech možných iniciál je $26^2 = 676$. Každý obyvatel tak může mít svou vlastní iniciálu.

Řešení 7.7. Zajímá nás nejvyšší mocniny dvou a pěti, které dělí $258!$. Zřejmě je exponent u dvojky vyšší než příslušný exponent u pětky. Pět je dělitelný každý pátý činitel součinu $258! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 258$. Tedy je zde $\lfloor \frac{258}{5} \rfloor = 51$ činitelů dělitelných pěti. Dále je zde $\lfloor \frac{258}{25} \rfloor = 10$ činitelů dělitelných 25. Nakonec jsou zde $\lfloor \frac{258}{125} \rfloor = 2$ činitelů dělitelných 125. Celkem je tedy exponent u pětky v prvočíselném rozkladu $258!$ roven $51 + 10 + 2 = 63$. To je také počet nul v dekadickém zápise čísla $258!$.

Řešení 7.8. 1. $\binom{10}{2}$, 2. $\binom{10}{3}$, 3. $\binom{9}{2}$.

Řešení 7.9. Nejprve ukážeme, že pro $n \geq k$ je číslo $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ celé. Stačí si uvědomit, že je to počet všech k -prvkových podmnožin n -prvkové množiny ($n!$ způsobů seřadíme celou množinu a vezmeme si prvních k prvků. Tak dostaneme k -prvkovou podmnožinu, ale na pořadí prvních k prvků a pořadí posledních $n - k$ prvků nezáleží, protože dávají stejnou podmnožinu.)

Když už teď víme, že $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$ je celé číslo, tak po substituci $m = n - k + 1 \in \mathbb{N}$ je $\frac{(m+k-1)(m+k-2) \cdots m}{k!}$ stále celým číslem. Tedy pro každé přirozené m je součin k po sobě jdoucích čísel m počínaje dělitelný $k!$. To jsme chtěli dokázat.

Řešení 7.10. Důkaz lze jednoduše provést rozepsáním obou stran pomocí vlastností kombinačních čísel. Intuitivně tato rovnost znamená, že obě strany rovnosti vyjadřují počet všech možností, jak vybrat k -prvkový a l -prvkový tým z n lidí tak, aby nikdo nepatřil do obou týmů.

Řešení 7.11. Vlevo je $\binom{2n}{2}$, což je počet všech dvojic, které lze vybrat z $2n$ -prvkové množiny. Pokud bychom vybírali dvojice tak, že množinu rozpůlíme na dvě n prvkové množiny a rozlišíme dva případy:

a) Dvojici tvoří prvky ze stejné půlky. Těchto dvojic je $\binom{n}{2}$ za každou půlku, celkem tedy $2 \cdot \binom{n}{2}$.

b) Dvojici tvoří prvky z obou skupin. Těchto dvojic je zřejmě $n \cdot n$.

Celkem tedy $2 \cdot \binom{n}{2} + n^2$. Dokázali jsme požadovanou rovnost.

Princip inkluze a exkluze

Řešení 7.12. Označme M_1, \dots, M_{11} množiny žáků v kroužcích. Podmínky ze zadání jsou ekvivalentní tomu, že pro všechna po dvou různá $i, j, k, l \in \{1, \dots, 11\}$

$$\begin{aligned} |M_1 \cup \dots \cup M_{11}| &= 54, \\ |M_i| &\geq 15, \\ |M_i \cap M_j \cap M_k| &\geq 1, \\ |M_i \cap M_j \cap M_k \cap M_l| &= 0. \end{aligned}$$

Podle principu inkluze a exkluze je

$$|M_1 \cup \dots \cup M_{11}| = \sum_{i=1}^{11} |M_i| - \sum_{i=1}^{11} \sum_{j=i+1}^{11} |M_i \cap M_j| + \sum_{i=1}^{11} \sum_{j=i+1}^{11} \sum_{k=i+j+1}^{11} |M_i \cap M_j \cap M_k|,$$

protože ostatní členy jsou nulové. Proto

$$54 \geq 11 \cdot 15 - \sum_{i=1}^{11} \sum_{j=i+1}^{11} |M_i \cap M_j| + \binom{11}{3} \cdot 1,$$

a tedy $\sum_{i=1}^{11} \sum_{j=i+1}^{11} |M_i \cap M_j| \geq 276$.

Vlevo je $\binom{11}{2} = 55$ sčítanců a aspoň jeden z nich musí být větší než 5.

Řešení 7.13. $2^n \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \frac{(2n-r)!}{2^{n-r}}$.

Řešení 7.14. $\binom{30}{15} - \binom{30}{16}$.

8 Grafy

Řešení 8.1. Předpokládejme, že z grafu G vede homomorfismus f do K_k (úplného grafu na k vrcholech). Označíme-li vrcholy K_k jako V_1, V_2, \dots, V_k , dostáváme k disjunktních množin $f^{-1}(V_1), f^{-1}(V_2), \dots, f^{-1}(V_k)$, jejichž sjednocením je množina vrcholů G . Obarvíme-li každou z těchto množin různou barvou, dostaneme (vrcholové) k -obarvení G , protože pokud by některé dva sousední vrcholy G měly stejnou barvu, musely by se v f zobrazit na stejný vrchol (kvůli konstrukci obarvení) a zároveň na sousední vrcholy (kvůli definici homomorfismu – všimněte si, že zde využíváme toho, že graf nesmí obsahovat smyčky, tj. z žádného vrcholu nevede hrana do něj samého).

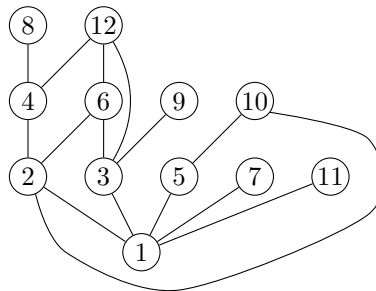
Nyní naopak předpokládejme, že G je (vrcholově) k -obarvitelný. Pak můžeme zkonstruovat zobrazení $f : G \rightarrow K_k$ tak, že všechny vrcholy i -té barvy zobrazí f na vrchol V_i pro $1 \leq i \leq k$. Pak je f homomorfismus, protože pokud libovolné dva sousední vrcholy G mají různé barvy, tak se zobrazí na různé vrcholy K_k , což je úplný graf.

Řešení 8.2.

- Graf je eulerovský právě pro sudá n (využíváme zde parity kombinačních čísel).
- Každá hrana spojuje dvě množiny, z nichž právě jedna je sudé kardinality a druhá liché. Stačí nám tedy dvě barvy, jednou barvou obarvíme všechny množiny liché kardinality a druhou barvou množiny sudé kardinality.

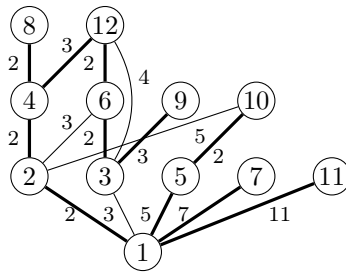
Řešení 8.3.

- Graf G není eulerovský, např. vrcholy $\{3, 5, 8, 9, 10, 11\}$ mají stupeň jedna, tedy lichý.
- Graf G je rovinný, jak je patrné z obrázku 22. Hranu mezi vrcholy 2 a 10 můžeme určitě vést tak, aby neprotínala žádnou jinou hranu.



Obr. 22: Rovinné nakreslení grafu.

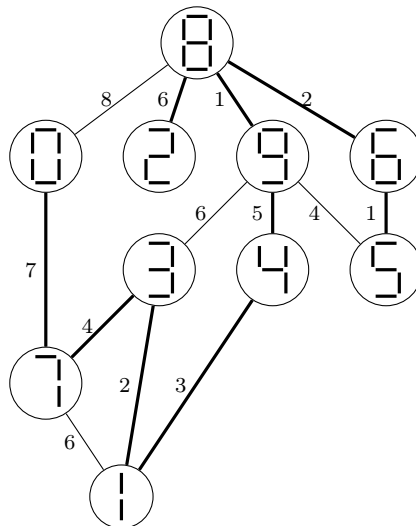
- Na obrázku 23 je znázorněno ohodnocení hran, a dále jedna z možných minimálních koster.



Obr. 23: Ohodnocení a minimální kostra grafu.

Řešení 8.4.

- Graf G není eulerovský, obsahuje vrchol lichého stupně.
- Graf G je rovinný, jak je zřejmé z obrázku 24.
- Na obrázku 24 je znázorněno ohodnocení hran, a dále jedna z možných minimálních koster.



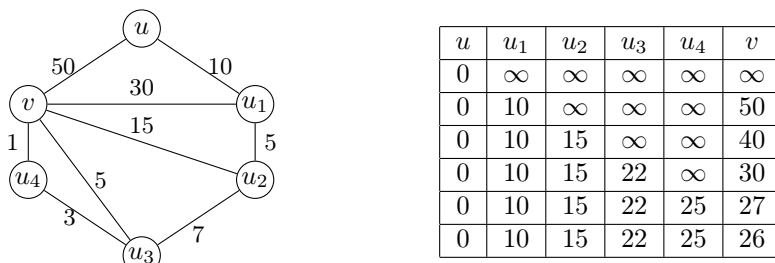
Obr. 24: Rovinnost, ohodnocení a minimální kostra grafu.

Řešení 8.5. Grafy vyhovující zadání jsou čtyři, viz obrázek 25.



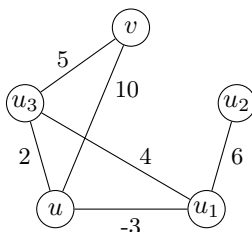
Obr. 25: Grafy splňující zadání.

Řešení 8.6. Celkem chceme, aby se hodnota spočítaná pro vrchol v měnila v každém kroku. Proto je potřeba „uzavřít“ vrchol v jako poslední. Uvažme příklad takového grafu i s příslušným výpočtem nejkratších cest.



Obr. 26: Dijkstrův algoritmus. Nejkratší cesta se mění v každém kroku.

Řešení 8.7. Vidíme, že například při výpočtu nejkratších cest z vrcholu u vyjde vzdálenost u, v rovna 6, zatímco při výpočtu nejkratších cest z vrcholu v získáme délku nejkratší cesty mezi u a v rovnu 7. (Jsou to jediné vrcholy, které můžeme porovnávat!)



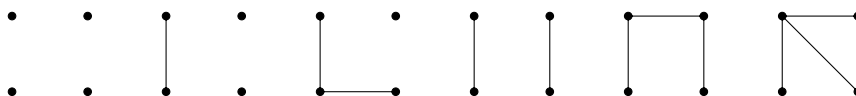
Obr. 27: Graf se záporně ohodnocenou hranou.

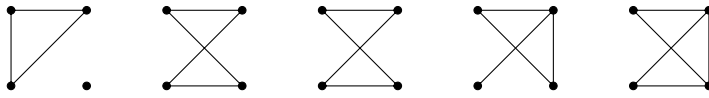
u	u_1	u_2	u_3	v
0	∞	∞	∞	∞
0	-3	∞	2	10
0	-3	3	1	10
0	-3	3	1	6
0	-3	3	1	6

v	u	u_1	u_2	u_3
0	∞	∞	∞	∞
0	10	∞	∞	5
0	7	9	∞	5
0	7	4	∞	5
0	7	4	10	5

Tabulka 1: Výpočet Dijkstrova algoritmu z různých počátečních vrcholů.

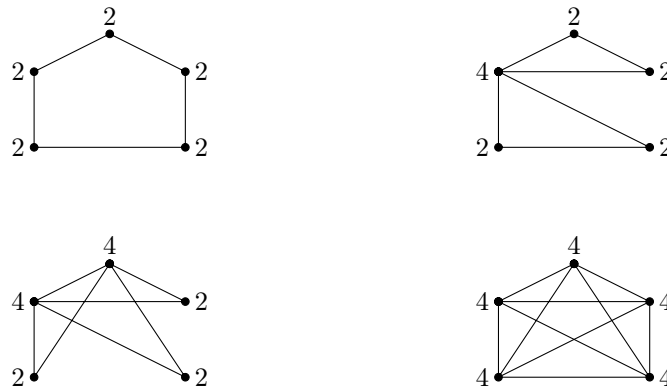
Řešení 8.8. Všechny neizomorfní grafy se čtyřmi vrcholy, viz obrázek.





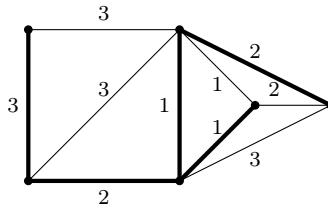
Obr. 28: Celkem 11 neizomorfních grafů.

Řešení 8.9. Hledáme eulerovské grafy, přičemž postačující podmínkou je, aby byl graf souvislý a všechny jeho vrcholy měly sudý stupeň, což dává možnosti stupňů 0, 2 a 4. Vrchol(y) stupně 0 jsou ve sporu se souvislostí grafu, zůstávají tedy kombinace stupňů 2 a 4. Jednoduchými úvahami zjistíme, že možnosti jsou následující (až na izomorfismus):



Obr. 29: Neizomorfní eulerovské grafy s pěti vrcholy.

Řešení 8.10. Minimální kostru najdeme „hladovým“ algoritmem. Postupně přidáváme hrany s nejnižším ohodnocením tak, aby přidáním hrany nevznikl cyklus. Jedna z možných minimálních koster je na obrázku. Poznamenejme, že

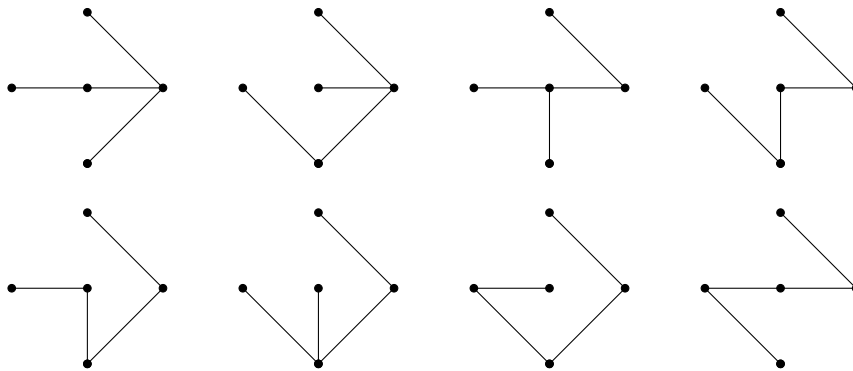


Obr. 30: Jedna z možných minimálních koster.

minimálních koster je $\binom{3}{2} \binom{2}{1} \binom{2}{1} = 12$. Pro kontrolu si všechny minimální kostry nakreslete.

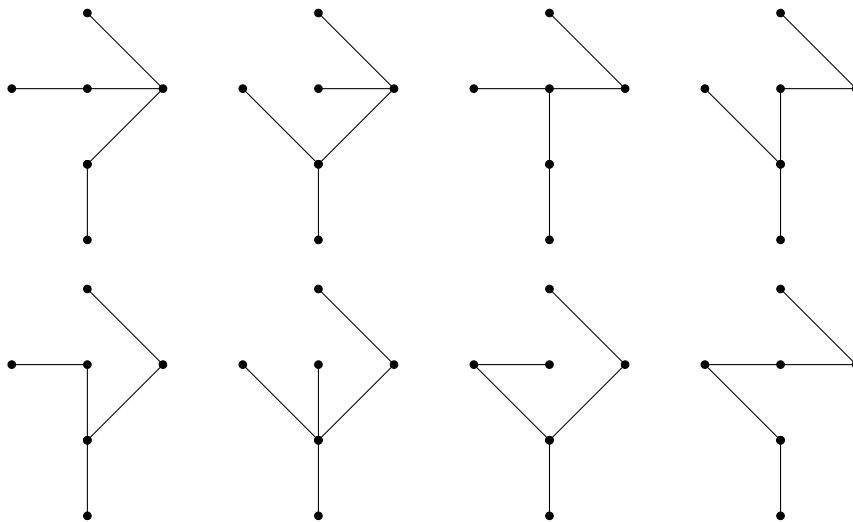
Řešení 8.11.

- a) Existuje celkem osm koster (bereme-li v úvahu izomorfismus dostaneme však pouze dvě).



Obr. 31: Všechny kostry grafu.

- b) Všimněme si, že minimální kostry grafu z podbodu b) vzniknou přidáním šestého vrcholu a příslušné hrany grafu z podbodu a). Existuje tedy opět osm koster, avšak až pět různých (neizomorfních).



Obr. 32: Všechny kostry grafu.

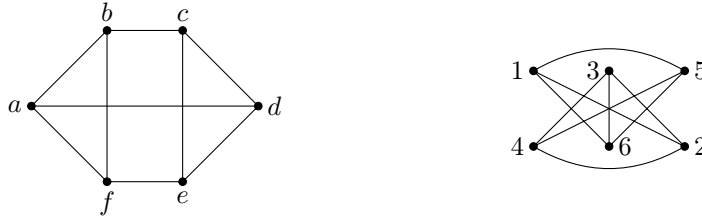
Řešení 8.12. Poznamenejme, že když neexistuje vrchol s nejmenší aktuální vzdáleností od daného vrcholu, tak nezáleží na tom, který z vrcholů majících minimální vzdálenost, zvolíme. Výpočet je zaznamenán v tabulce na následující straně.

u	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
0	∞	∞	∞	∞	∞
0	∞	∞	4	①	3
0	7	③	4		3
0	6		4		③
0	6		④		
0	⑤				

Tabulka 2: Dijkstrův algoritmus.

Řešení 8.13.

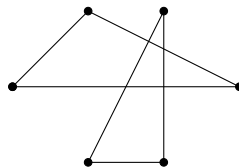
- 1) Uvedené grafy jsou izomorfní. Při následujícím značení je jeden z izomorfismů dán takto: $a \mapsto 3, b \mapsto 4, c \mapsto 5, d \mapsto 6, e \mapsto 1, f \mapsto 2$.



- 2) Využijme pomocného tvrzení ze zadání. Zvolme $H = \{3\}$, na obrázku vidíme, že indukované grafy P_1, P_2 nejsou izomorfní. (Pro přehlednost jsou na obrázku zaznačené všechny vrcholy původních grafů. Indukované grafy ovšem obsahují jen plné vrcholy.)

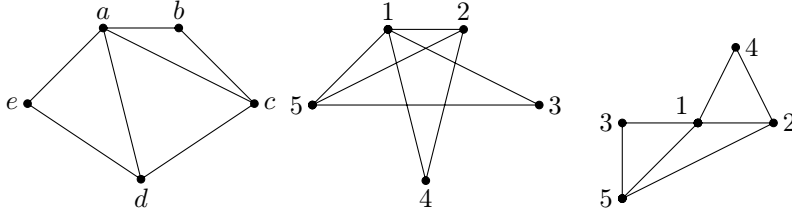


- 3) V izomorfních grafech jsou počty cyklů délky n stejné pro každé $n \in \mathbb{N}$. V druhém grafu jsou dva cykly délky 3 (viz obrázek), zatímco v prvním grafu není cyklus délky 3 ani jeden. Proto zadané grafy nejsou izomorfní.

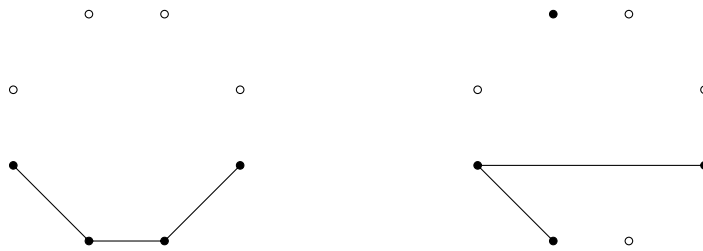


Obr. 33: Dva cykly délky 3.

- 4) Označme si vrcholy obou grafů (viz obrázek). První graf je zřejmě rovinný. Přemístěním vrcholů 3 a 4 u druhého grafu vidíme, že i tento graf je rovinný. Z konkrétního nakreslení je zřejmý izomorfismus grafů daný $a \mapsto 1$, $b \mapsto 3$, $c \mapsto 5$, $d \mapsto 2$, $e \mapsto 4$.



- 5) Uvedené grafy nejsou izomorfní, což ukážeme využitím stejného tvrzení jako v případě 2). Nyní volíme $H = \{3\}$. První indukovaný podgraf je nespojitý od toho druhého souvislý. (Pro přehlednost jsou na obrázku zaznačené všechny vrcholy původních grafů. Indukované grafy ovšem obsahují jen plné vrcholy.)



- 6) Uvedené grafy nejsou izomorfní, poněvadž první graf se skládá z dvou komponent souvislosti (viz obrázek) a ten druhý je souvislý (existuje cesta spojující všechny vrcholy, viz obrázek).

