Podpora výuky předmětu Diskrétní matematika

Sbírka příkladů

Lucia Macášková, Tadeáš Kučera,
Jan Kvapil, Vladimír Sedláček

27. ledna 2016

Obsah

Tato sbírka vznikla v rámci programu podpory výuky předmětu Diskrétní matematika M1121.

Při vytváření sbírky bylo naší snahou pomoci studentům předmětu Diskrétní matematika pochopit zaváděné pojmy a také souvislosti mezi jednotlivými tématy. Proto se může stát, že některé příklady předpokládají znalosti napříč jednotlivými kapitolami. Seznam příkladů, u kterých je tento fakt nejzásadnější, uvádíme na konci toho úvodu (v seznamu číslo za dvojtečkou odkazuje na číslo kapitoly).

Bylo-li to možné, snažili jsme se vyjadřovat co nejpřesněji a formálně správně, ale kromě tradičních příkladů bylo naším cílem vymyslet i příklady motivační nebo méně tradiční. V některých příkladech jsme si tak dovolili vyjádřovat se neformálně. Oboje snad pomůže čtenáři vypracovat si intuici v daných oblastech a přitom si zachovat schopnost vyjadřovat se formálně správně.

Na tomto místě bychom rádi poděkovali Mgr. Davidu Krumlovi, Ph.D. za pomoc s vedením projektu a Veronice Kutálkové za přečtení sbírky a odhalení mnoha nedostatků. Za veškeré zbývající chyby ovšem nesou zodpovědnost autoři sami. Pokud nějaké nedostatky objevíte, sdělte je laskavě na adresu:
`diskretniprojekt2015@gmail.com`

Ke sbírce existuje také řešení. Oba dokumenty byly vysázeny pomocí balíku LaTeX, obrázky pomocí balíku Ti*k*Z.

Autoři

1. Logika
1.1: 4, 5, 6
1.2: 4, 5, 6

2. Množiny
2.2: 3
2.5: 3

3. Zobrazení a mohutnost množin

4. Relace
4.21: 5,6

5. Uspořádané množiny
5.9: 7

6. Ekvivalence
6.2: 7

7. Kombinatorika

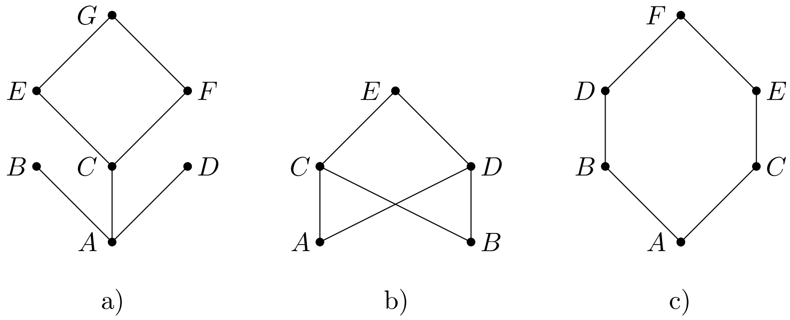
8. Grafy
8.2: 5
8.3: 5
8.4: 5

Zadání příkladů

1 Logika

Příklad 1.1. Ukažte, že ekvivalence formulí je skutečně relací ekvivalence. Dále uvažme rozklad množiny formulí a symbolem $[\varphi]$ označme třídu formulí, které jsou ekvivalentní s formulí φ, tedy třídu tohoto rozkladu reprezentovanou prvkem φ. Nyní definujme relaci $\to$ na tomto rozkladu vztahem $[\varphi] \to [\psi]$, právě když φ implikuje ψ. Ukažte, že $\to$ je relací uspořádání.

Příklad 1.2. Uveďte příklad výroků (resp. ekvivalentních tříd výroků), jejichž Hasseovský diagram příslušný relaci $\to$ z předešlého příkladu má tento tvar:



Obr. 1: Hasseovy diagramy ekvivalentních tříd výroků.

Příklad 1.3. Nechť x je přirozené číslo. Mějme následující výroky:

a) $A : x$ je sudé,

b) $B : x$ je prvočíslo,

c) $C : x$ je dělitelné 6,

d) $D : x > 3$,

e) $E : x \equiv 6 \pmod{12}$,

f) $F : x = 5$

g) $G : x^2 = -1$,

h) $H : x^2 = 2x$.

Pro každou dvojici těchto výroků rozhodněte, zda jeden implikuje druhý.

Příklad 1.4. V následující formuli jsou znakem $\bullet$ zaznačena místa pro kvantifikátory $(\exists, \forall)$. Nalezněte všechny možnosti, jak tyto kvantifikátory doplnit tak, aby byly tyto formule pravdivé.

$$\bullet\, k \geq 2, k \in \mathbb{N}, \bullet\, n \in \mathbb{N}, \bullet\, r \in \mathbb{N} : k^r \in [n, k \cdot n]$$

Příklad 1.5. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je dána formule ψ_n s proměnnými $x_1, \dots, x_{2n} \in \mathbb{N}$ předpisem $\psi_n = \exists x_1 \forall x_2 \dots \exists x_{2n-1} \forall x_{2n} : V$, kde V je výrok o proměnných $x_1, \dots, x_{2n} \in \mathbb{N}$. Rozhodněte, zda a případně pro která n platí formule ψ_n, pokud

a) $n = 2$ a $V = (x_1 x_3 \leq x_2 x_4)$,

b) $n = 2$ a $V = (x_1 x_2 \leq x_3 x_4)$,

c) $n = 2$ a $V = (x_1 x_2 \geq x_3 x_4)$,

d) $V = (x_1 x_3 \dots x_{2n-1} \leq x_2 x_4 \dots x_{2n})$,

e) $V = (x_1 x_3 \dots x_{2n-1} \geq x_2 x_4 \dots x_{2n})$,

f) $V = (x_1 x_2 \dots x_n \leq x_{n+1} \dots x_{2n})$,

g) $V = (x_1 x_2 \dots x_n \geq x_{n+1} \dots x_{2n})$.

Příklad 1.6. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je dána formule φ_n s proměnnými $x_1, \dots, x_{2n} \in \mathbb{N}$ předpisem $\varphi_n = \forall x_1 \exists x_2 \dots \forall x_{2n-1} \exists x_{2n} : V$, kde V je výrok o proměnných $x_1, \dots, x_{2n} \in \mathbb{N}$. Rozhodněte, zda a případně pro která n platí formule φ_n, pokud

a) $n = 2$ a $V = (x_1 x_3 \leq x_2 x_4)$,

b) $n = 2$ a $V = (x_1 x_2 \leq x_3 x_4)$,

c) $n = 2$ a $V = (x_1 x_2 \geq x_3 x_4)$,

d) $V = (x_1 x_3 \dots x_{2n-1} \leq x_2 x_4 \dots x_{2n})$,

e) $V = (x_1 x_3 \dots x_{2n-1} \geq x_2 x_4 \dots x_{2n})$,

f) $V = (x_1 x_2 \dots x_n \leq x_{n+1} \dots x_{2n})$,

g) $V = (x_1 x_2 \dots x_n \geq x_{n+1} \dots x_{2n})$.

Příklad 1.7. Nechť X, Y jsou výroky a v nějaká valuace. Čemu odpovídají následující výrazy?

a) $\min\{v(X), v(Y)\}$,

b) $\max\{v(X), v(Y)\}$,

c) $v(X) \cdot v(Y)$,

d) $1 - (1 - v(X)) \cdot (1 - v(Y))$,

e) $v(X) + v(Y) \pmod 2$.

Příklad 1.8. Pro každý podbod určete, kolik existuje binárních logických spojek $\Box$ s příslušnou vlastností pro všechny výroky X, Y.

a) $X \Box Y \cong \neg X \Box \neg Y$,

b) $\neg(X \Box Y) \cong \neg X \Box \neg Y$,

c) $(X \Box \neg X) \Box Y \cong Y$.

Příklad 1.9. Udejte příklad binární logické spojky $\Box$ s vlastností

$$(X \Box Y) \Box Z \not\cong X \Box (Y \Box Z).$$

2 Množiny

Příklad 2.1. Nechť množina $M \subseteq \mathbb{R}$ má tu vlastnost, že každá její neprázdná podmnožina má nejmenší i největší prvek. Ukažte, že M je konečná.

Příklad 2.2. Ukažte, že kartézský součin množin je „kategoriální součin“, tj. pro všechny množiny A, B, C a zobrazení $f\colon C \to A, g\colon C \to B$ existuje právě jedno zobrazení $h\colon C \to A \times B$ splňující $p_A \circ h = f, p_B \circ h = g$, kde $p_A\colon A \times B \to A$ a $p_B\colon A \times B \to B$ jsou příslušné projekce dané předpisem $p_A((a,b)) = a$ a $p_B((a,b)) = b$.

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
& A \times B \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Obr. 2: Diagram kategoriálního součinu.

Příklad 2.3. Co je sjednocením prázdného systému množin?

Příklad 2.4. Je dána množina A. Buď U prázdný systém podmnožin množiny A. Určete průnik $\bigcap U$.

Příklad 2.5. Disjunktní sjednocení můžeme definovat například jako

$$A \coprod B = \{(1,a) \mid a \in A\} \cup \{(2,b) \mid b \in B\}.$$

Ukažte, že disjunktní sjednocení množin je „kategoriální součet“, tj. pro všechny množiny A, B, C a zobrazení $f\colon A \to C, g\colon B \to C$ existuje právě jedno zobrazení $h\colon A \coprod B \to C$ splňující $h \circ i_A = f, h \circ i_B = g$, kde $i_A\colon A \to A \coprod B$ a $i_B\colon B \to A \coprod B$ jsou příslušná vnoření definovaná vztahy $i_A(a) = (1,a)$ a $i_B(b) = (2,b)$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & B \arrow[dl, "i_B"'] \arrow[ddl, bend left, "g"] \\
& A \coprod B \arrow[d, dashed, "h"] & \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Obr. 3: Diagram kategoriálního součtu.

Příklad 2.6. Nechť $x, y, z \in \mathbb{N}$ a A, B, C jsou množiny. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení:

a) $\{\emptyset\} \in \{x, y, \emptyset\}$,

b) $\emptyset \subseteq \{x, y, \emptyset\}$,

c) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\{\emptyset\}\}$,

d) $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$,

e) $\{z\} \subseteq \{x, y, \{z\}\}$,

f) $B \in \mathcal{P}(A) \iff B \subseteq A$,

g) $(A \in B) \wedge (B \in C) \implies A \in C$,

h) $A \cup B = A \cup C \implies B = C$,

i) $\{x, y, \emptyset\} \setminus \emptyset = \{x, y\}$,

j) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$,

k) $A \times \emptyset = \emptyset$,

l) $A \times B = B \times A$,

m) $A, B \subseteq C \implies \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

n) $(A \div B) \div C = A \div (B \div C)$,

o) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$,

p) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

q) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$.

Příklad 2.7. Určete všechny množiny A, pro které platí

$$\mathcal{P}(\emptyset) \subseteq A \subseteq \mathcal{P}(\{\emptyset\}) \text{ a } \{\emptyset\} \notin A.$$

Příklad 2.8. Následující množiny zadané výčtem prvků popište formulí:

a) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$,

b) $\{1, 4, 16, 64, 256, \dots\}$,

c) $\{0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, \dots\}$,

d) $\{1, 22, 333, 4444, \dots, 999999999\}$,

e) $\{1, 22, 333, 4444, \dots\}$.

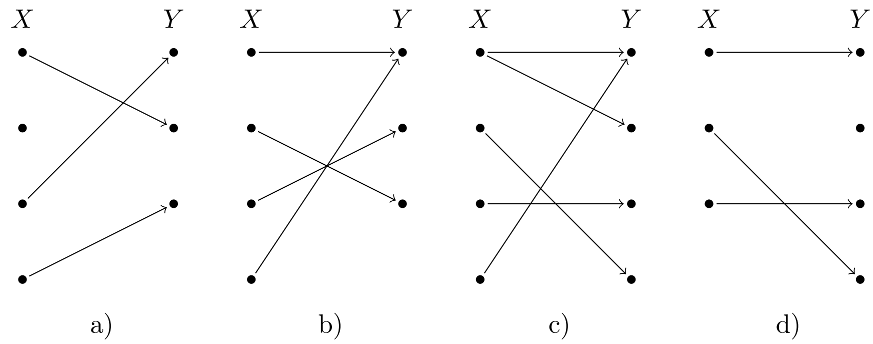
3 Zobrazení a mohutnost množin

Příklad 3.1. Nechť X, Y jsou neprázdné množiny. Rozhodněte, zda lze každé zobrazení $f\colon X \to Y$ zapsat jako složení $f = g \circ h$, kde

a) g je injektivní a h je surjektivní,

b) g je surjektivní a h je injektivní.

Příklad 3.2. Rozhodněte, které z diagramů definují zobrazení z množiny X do množiny Y. Pro tyto funkce určete jejich vlastnosti.



Příklad 3.3. Nechť M je množina studentů. Rozhodněte, zda je v jednotlivých bodech relace $R \subseteq M \times X$ zobrazením. Relace R je zadána následovně:

a) X je množina univerzit. Každý student je v relaci s univerzitou, na které studuje.

b) $X = \mathbb{N}_0$ a každý student je v relaci se svým věkem.

c) X je množina lidí. Každý student je v relaci se svým partnerem či partnerkou.

Příklad 3.4. Nechť X, Y jsou libovolné neprázdné množiny, $f\colon X \to Y$ je libovolné zobrazení a $\{A_i\}_{i\in I}$ je systém podmnožin množiny Y. Dokažte, že

a) $f^{-1}(\bigcap A_i) = \bigcap f^{-1}(A_i)$,

b) $f^{-1}(\bigcup A_i) = \bigcup f^{-1}(A_i)$.

Mohutnost množiny

Příklad 3.5. Označme P množinu všech konečných podmnožin množiny přirozených čísel. Je dáno zobrazení $f\colon P \to \mathbb{N}_0$, které zobrazí konečnou množinu A na počet jejích prvků.

a) Popište J_f.

b) Popište P/J_f a rozhodněte, zda existuje nějaká bijekce $g : P/J_f \to \mathbb{N}_0$.

Příklad 3.6. Určete mohutnost množiny všech vrcholů nekonečného binárního stromu (binárním stromem rozumíme množinu neprázdných konečných posloupností symbolů 0 a 1).

Příklad 3.7. Nechť a, b, c, d jsou reálná čísla splňující $a < b, c < d$. Ukažte, že libovolné dva otevřené intervaly (a, b), (c, d) mají stejnou mohutnost.

Příklad 3.8. Nechť a, b jsou reálná čísla splňující $a < b$. Ukažte, že otevřený interval (a, b) má stejnou mohutnost jako množina všech reálných čísel.

Příklad 3.9. Nechť A, B jsou množiny s vlastností, že $A \div B$ je spočetná množina. Určete, jakou kardinalitu (konečná / spočetná / nespočetná) může mít množina A víte-li, že množina B je

a) konečná,

b) spočetná,

c) nespočetná.

4 Relace

Příklad 4.1. Určete počet všech relací na konečné množině A.

Příklad 4.2. Pro relaci R na množině A označme $R^1 = R, R^n = R \circ R^{n-1}$.

a) Ukažte, že je-li množina A konečná, pak pro libovolnou relaci R na množině A existují $m, n \in \mathbb{N}, m < n$ taková, že $R^m = R^n$. Dále ukažte, že pro nekonečnou množinu A toto platit nemusí.

b) Najděte takovou konečnou množinu A a na ní relaci R tak, že $R^n \neq R^{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 4.3. Pro relaci R na množině A označme R^{-1} inverzní relaci k R a $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ diagonální relaci. Ukažte, že platí následující tvrzení:

a) R je reflexivní, právě když $\Delta_A \subseteq R$.

b) R je symetrická, právě když $R = R^{-1}$.

c) R je antisymetrická, právě když $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$.

d) R je tranzitivní, právě když $R^2 \subseteq R$.

e) R je reflexivní a antisymetrická, právě když $R \cap R^{-1} = \Delta_A$.

Příklad 4.4. Nechť R je acyklická relace na A, tj. neexistuje konečná posloupnost prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ splňujících $a_1Ra_2, a_2Ra_3, \ldots, a_nRa_1$. Dokažte, že pak na A existuje relace uspořádání, která obsahuje R.

Příklad 4.5. Na množině A všech lidí uvažujeme relace R, S určené tak, že

a) aRb, právě když a je rodičem b,

b) aSb, právě když a je sourozencem b.

Slovně popište význam relací $R^{-1}, S^{-1}, R \circ S, S \circ R, R^2, S^2$. Relaci S přitom nepovažujeme za reflexivní.

Příklad 4.6. Na množině $\mathbb{R}$ uvažujeme relaci R určenou vztahem $(x, y) \in R$, právě když

a) $x + y = 0$,

b) $|x| = |y|$,

c) $x > y$,

d) $x \geq y$,

e) $x - y$ je racionální,

f) $xy \geq 0$,

g) x je iracionální násobek y,

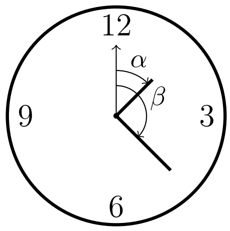
h) je tato sbírka přínosná.

Určete vlastnosti (reflexivitu, symetrii, antisymetrii, tranzitivitu) jednotlivých relací.

Příklad 4.7. Nechť T je množina všech trojúhelníků v rovině. Relace P a S na množině T jsou určeny tím, že $t_1 P t_2$, pokud jsou t_1, t_2 podobné a $t_1 S t_2$, pokud jsou t_1, t_2 shodné. Jaké mají tyto dvě relace vlastnosti (reflexivitu, symetrii, antisymetrii, tranzitivitu)?

Příklad 4.8. Je dána relace R na množině všech států světa, do níž patří všechny dvojice států, které mají společnou část svých hranic. Je tato relace reflexivní? Je symetrická? A je tranzitivní? Popište její druhou mocninu, tj. složení jí se sebou samou.

Příklad 4.9. Každému dennímu času přiřadíme dvojici reálných čísel (α, β), $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ takovým způsobem, že úhel mezi spojnicí středu hodin s dvanáctkou a malou ručičkou je α a úhel mezi spojnicí středu hodin s dvanáctkou a velkou ručičkou je β (viz obrázek). Uvažme relaci ρ na množině $[0, 2\pi)$ která obsahuje právě ty dvojice (α, β), pro něž existuje denní čas, v němž úhel mezi spojnicí středu hodin s dvanáctkou a malou ručičkou je α a úhel mezi spojnicí středu hodin s dvanáctkou a velkou ručičkou je β. Je ρ zobrazení? Určete relaci ρ^{-1}. Je ρ^{-1} zobrazením?



Obr. 4: Hodiny s vyznačenými úhly α, β.

Příklad 4.10. Uvažme relaci ρ na množině $\mathbb{R}^2$. Rozhodněte, zda je ρ reflexivní, symetrická, tranzitivní, antisymetrická, pokud

a) $\rho = \{((a, b), (c, d)); |ad - bc| = 1\}$,

b) $\rho = \{((a, b), (c, d)); |ad - bc| = 0\}$.

Příklad 4.11. Relace ρ je dána na množině všech lidí vztahem $(A, B) \in \rho$, právě když je osoba B o rok starší než osoba A. Rozhodněte, zda je ρ reflexivní, symetrická, tranzitivní, antisymetrická.

Příklad 4.12. Relace ρ je dána na množině všech lidí vztahem $(A, B) \in \rho$, právě když osoba B obdivuje osobu A. Rozhodněte, zda je ρ reflexivní, symetrická, tranzitivní, antisymetrická.

Příklad 4.13. Mějme plně obsazený kulatý stůl s n místy. Relace ρ je dána na množině všech lidí sedících u tohoto stolu vztahem $(A, B) \in \rho$, právě když osoba B sedí vedle osoby A. Rozhodněte, zda je ρ reflexivní, symetrická, tranzitivní, antisymetrická.

Příklad 4.14. Ve třídě hráli studenti páku (každý s každým právě jednou, kromě sebe sama). Řekneme, že student A je v relaci R se studentem B, pokud se A utkal s B, a student A je v relaci S se studentem B, pokud A vyhrál nad B. Rozhodněte, zda jsou relace R, S reflexivní, symetrické, tranzitivní, antisymetrické.

Příklad 4.15. Nechť $A = \{a, b, c, d\}$. Udejte příklad relace $V \subseteq A^2$ tak, že

a) $V^3 = V$ a $V \neq \emptyset$,

b) $V^3 = V$ a $V^2 \neq V$,

c) $V^4 = V^2$ a $V^3 \neq V$.

Příklad 4.16. Nechť $A = \{a, b, c\}$. Udejte příklad relace $V \subseteq A^2$ tak, že

a) $V^2 = \emptyset$ a $V \neq \emptyset$,

b) $V^3 = \emptyset$ a $V^2 \neq \emptyset$.

Příklad 4.17. Buď $A = \{a, b\}$. Udejte příklad relací $U, V, W \subseteq A^2$ tak, že $U \circ V = U \circ W$ a $V \neq W$.

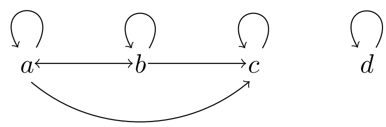
Příklad 4.18. Buď A libovolná množina. Nechť jsou dány reflexivní relace $U, V \subseteq A^2$. Rozhodněte, zda obecně platí následující inkluze:

a) $U \circ V \subseteq V$,

b) $U \circ V \supseteq V$.

Příklad 4.19. Nechť n je přirozené číslo. Uveďte příklad množiny A a na ní relace R tak, že pro všechna přirozená k, l platí $R^k \neq R^l$, pokud $k < l < n$, a $R^k = R^l$, pokud $n - 1 \leq k < l$.

Příklad 4.20. Následující obrázek zadává relaci na množině $\{a, b, c, d\}$.



a) Rozhodněte, zda je tato relace reflexivní, symetrická, antisymetrická a tranzitivní.

b) Pokud se nejedná o ekvivalenci, přikreslete co možná nejméně šipek, aby to ekvivalence byla.

c) Pokud se nejedná o uspořádání, smažte co možná nejméně šipek, aby to uspořádání bylo.

Příklad 4.21. Nalezněte všechny relace na množině přirozených čísel, které jsou zároveň ekvivalencemi i uspořádáními.

5 Uspořádané množiny

Příklad 5.1. Uvažujme uspořádanou množinu $(\mathbb{N}, |)$. Rozhodněte, zda

a) každá podmnožina $\mathbb{N}$ má supremum,

b) každá konečná podmnožina $\mathbb{N}$ má supremum,

c) každá neprázdná podmnožina $\mathbb{N}$ má infimum,

d) se jedná o svaz.

Příklad 5.2. Uvažme Hasseovský diagram množiny přirozených čísel uspořádané dělitelností. Určete počet hran vedoucí „zespodu“ do čísla k. Jinými slovy, určete, kolik má číslo k předchůdců v uspořádání přirozených čísel podle dělitelnosti.

Příklad 5.3. Rozhodněte, zda existuje

a) dvojice vzájemně neizomorfních lineárních uspořádání množiny $\mathbb{N}$,

b) nekonečně mnoho vzájemně neizomorfních lineárních uspořádání množiny $\mathbb{N}$,

c) nespočetně mnoho vzájemně neizomorfních lineárních uspořádání množiny $\mathbb{N}$.

Příklad 5.4. Nechť $A, \preceq$ je uspořádaná množina, jejíž každá podmnožina má supremum. Dokažte, že pak má každá její podmnožina také infimum.

Příklad 5.5. Injektivní zobrazení $f\colon (A, \preceq) \to (B, \preccurlyeq)$ mezi uspořádanými množinami s vlastností $a \preceq b \iff f(a) \preccurlyeq f(b)$ pro všechna $a, b \in A$ nazýváme vnoření.

a) Ukažte, že každou uspořádanou množinu $(X, \preceq)$ lze vnořit do $(2^X, \subseteq)$.

b) Ukažte, že každou konečnou uspořádanou množinu lze vnořit do $(\mathbb{N}, |)$.

c) Ukažte, že každou nejvýše spočetnou lineárně uspořádanou množinu lze vnořit do $(\mathbb{Q}, \leq)$.

Příklad 5.6. Označme $Eq(X)$ množinu všech ekvivalencí na množině X uspořádanou inkluzí.

a) Nakreslete Hasseův diagram pro $Eq(\{1, 2, 3\})$.

b) Dokažte, že $Eq(X)$ je svaz.

Příklad 5.7. Zjistěte, zda existuje, a pokud ano, jaký nejmenší počet prvků může mít uspořádaná množina M s danými vlastnostmi (pro každý bod zvlášť). Pokud existuje, uveďte ji. Pokud neexistuje, sepište důkaz.

a) M obsahuje dva maximální a dva minimální prvky.

b) M obsahuje suprema všech svých podmnožin, ale existuje podmnožina, která nemá infimum.

c) M obsahuje dva největší prvky.

d) M obsahuje jeden minimální, ale žádný nejmenší prvek.

Příklad 5.8. Nalezněte všechny šestiprvkové úplné svazy (až na izomorfizmus).

Příklad 5.9. Kolik existuje izotonních zobrazení z m-prvkového do n-prvkového řetězce?

Příklad 5.10. Dokažte, že úplný svaz všech podmnožin dvouprvkové množiny není izomorfní s čtyřprvkovým řetězcem.

Příklad 5.11. Nechť $I = [0,1]$ a uvažme uspořádanou množinu $(I, \leq)$. Rozhodněte, zda je množina všech

a) zobrazení $I \to I$

b) spojitých funkcí $I \to I$

c) diferencovatelných funkcí $I \to I$

d) rostoucích funkcí $I \to I$

e) neklesajících funkcí $I \to I$

úplný svaz.

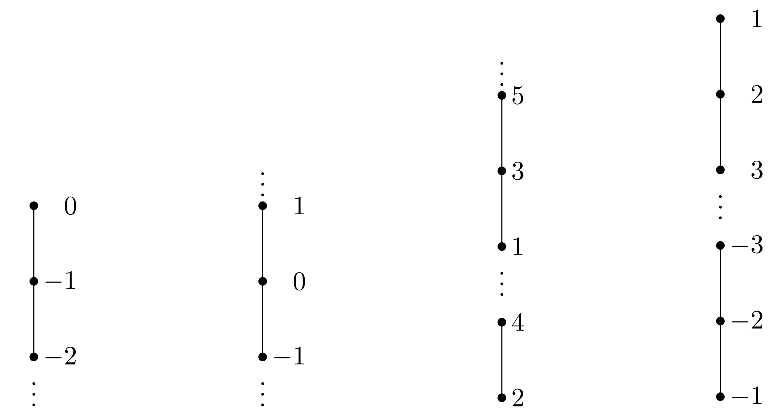
Příklad 5.12. Uvažme množinu prvních deseti římských čísel $\{\mathrm{I}, \dots, \mathrm{X}\} = R$ a na ní relaci $\leq$, kde $x \leq y$, právě když y lze vytvořit z x přiložením nezáporného počtu sirek (např. I se skládá z jedné sirky a V i X ze dvou sirek, číslo V nelze přidáním sirky získat z I). Ukažte, že $\leq$ je relace uspořádání a nakreslete příslušný Hasseův diagram.

Příklad 5.13. Rozhodněte a zdůvodněte, zda mezi danými dvěma uspořádanými množinami A, B existuje zobrazení $f\colon A \to B$, které je izotonní, popřípadě izomorfní. V případě, že izomorfizmus neexistuje, upravte zadaná uspořádání tak, aby izomorfizmus existoval.

a) $A = (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \leq)$ a $B = (\mathbb{Z}, \leq)$.

b) $A = (\mathbb{N}, \preceq)$ a $B = (\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \sqsubseteq)$,

kde $a \preceq b$, právě když $(2|(a-b) \wedge a \leq b) \vee (2|a \wedge 2 \nmid b)$ a $a \sqsubseteq b$, právě když $(a, b \geq 0 \wedge a \leq b) \vee (a, b \leq 0 \wedge a \geq b) \vee (a \leq 0 \wedge b > 0)$.



$(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \leq)$ $(\mathbb{Z}, \leq)$ $(\mathbb{N}, \preceq)$ $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \sqsubseteq)$

6 Ekvivalence

Příklad 6.1. Pro daná zobrazení f popište rozklad $\mathrm{Dom}(f)/J_f$:

a) $f\colon \{x \mid x \text{ je člověk}\} \to \{x \mid x \text{ je den v přestupném roce}\}$,
$f(x) =$ den v roce, ve kterém se x narodil,

b) $f\colon \{\text{kruh, trojúhelník, čtverec, obdélník}\} \to \mathbb{N}_0$,
$f(x) =$ počet vrcholů úvaru x,

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$,

d) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = x \pmod 7$,

e) $f\colon \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}, f(x, y) = \frac{x}{y}$,

f) $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2$,

g) $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x, y) = \lfloor x \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo nepřesahující x, např. $\lfloor -1,156 \rfloor = -2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$.

Příklad 6.2. Určete počet všech rýmových schémat čtyřřádkové básně. Pokuste se výsledek zobecnit pro víceřádkové básně.

Příklad 6.3. Uvažme množinu římských čísel $\{\mathrm{I}, \dots, \mathrm{X}\} = R$, a na ní relaci ρ „skládat se ze stejného počtu sirek“ (např. I se skládá z jedné sirky a V i X ze dvou sirek). Ukažte, že ρ je relací ekvivalence a popište příslušný rozklad množiny R.

Příklad 6.4. Najděte zobrazení, jehož jádrem je následující ekvivalence:

a) relace „chodit do stejné třídy“ na množině všech žáků dané školy,

b) relace „mít stejný počet nohou“ na množině všech zvířat.

Příklad 6.5. Připomeňme, že pro vektorové prostory U, V a lineární zobrazení $\varphi\colon U \to V$ značíme $\ker\varphi = \{u \in U \mid \varphi(u) = 0\}$ jádro zobrazení φ (ve smyslu lineární algebry). Definujme na U relaci $\sim$ vztahem $u \sim v$, právě když $u - v \in \ker\varphi$. Ukažte, že $\sim$ je ekvivalence a nalezněte jádro zobrazení φ (ve smyslu teorie množin) definované vztahem $J_\varphi = \{(u, v) \in U \times U \mid \varphi(u) = \varphi(v)\}$.

7 Kombinatorika

Příklad 7.1. Dědeček koupil pozemek tvaru obdélníka o šířce 24 a délce 42 metrů, který chce nechat náhodně osázet 80 stromy. Jeho vnuk Karlík dostal novou houpací síť, ale má strach, že nenajde dva stromy, jejichž vzdálenost není více než 5 metrů. Ukažte, že existují dva stromy se vzdáleností nejvýše 5 metrů.

Příklad 7.2. Obdélník o stranách $m, n \in \mathbb{N}$ byl čtvercovou sítí rozdělen na mn jednotkových čtverců.

a) Kolik vzniklo obdélníků?

b) Kolik vzniklo čtverců? (Výsledek stačí uvést v podobě sumy.)

Příklad 7.3. Kolika způsoby lze na šachovnici (o rozměrech 8×8 čtverců) umístit dva koně, aby se vzájemně ohrožovali?

Příklad 7.4. Kolika způsoby si může sednout 7 lidí do kruhu ze 7 stoliček, pokud

a) jsou stoličky identické,

b) je každá stolička jiné barvy.

Příklad 7.5. Pět řečníků A, B, C, D, E má vystoupit na konferenci, určete počet možných pořadí jejich výstupů, pokud

a) má A vystoupit po B,

b) má A vystoupit hned po B.

Příklad 7.6. Rozhodněte a zdůvodněte, zda musí mít alespoň dva obyvatelé vesnice s právě 500 obyvateli stejné iniciály. Jméno i příjmení začíná jedním z 26 písmen anglické abecedy.

Příklad 7.7. Určete, kolika nulami končí číslo 258!

Příklad 7.8. Je dáno deset bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce.

a) Kolik různých úseček můžeme vytvořit spojováním těchto bodů?

b) Kolik různých trojúhelníků tvoří úsečky z předcházející podúlohy? (Jako možné vrcholy pro tyto trojúhelníky uvažujeme pouze výchozí body.)

c) Označme A jeden z deseti výchozích bod. Kolik z předešlých trojúhelníků má A za jeden ze svých vrcholů?

Příklad 7.9. Dokažte, že součin libovolných k po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný $k!$.

Příklad 7.10. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n, k, l taková, že $k+l \leq n$, platí

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{l} = \binom{n}{l} \cdot \binom{n-l}{k}.$$

Příklad 7.11. Dokažte, že pro každé přirozené $n, n \geq 2$, platí

$$\binom{2n}{2} = 2 \cdot \binom{n}{2} + n^2.$$

Princip inkluze a exkluze

Příklad 7.12. Na škole se 54 žáků angažuje v 11 zájmových kroužcích. Každý kroužek má aspoň 15 členů a nikdo nechodí do více než tří kroužků. Každé tři kroužky mají alespoň jednoho společného člena. Dokažte, že existují dva kroužky, které mají alespoň 6 společných členů.

Příklad 7.13. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Kolika způsoby můžeme posadit v kině n manželských párů do řady s $2n$ místy tak, aby žádný manželský pár neseděl pospolu?

Příklad 7.14. Alenka dostane každý den od maminky korunu. Někdy si za ni koupí nanuk, jindy si ji schová. Tatínek ji nabádá, aby si polovinu peněz šetřila na něco pořádného. Občas dokonce nahlédne do pokladničky, a není-li tam alespoň polovina korun, řeční. Kolika způsoby si může Alenka během prvních 30 dnů kupovat nanuky, aby jich snědla co nejvíc a přitom měla od otce klid? Maminka ji více než jeden nanuk denně nepovolí.

8 Grafy

Příklad 8.1. Nechť V, W jsou množiny vrcholů a E, F jim odpovídající množiny hran. Zobrazení $f : (V, E) \to (W, F)$ mezi grafy se nazývá homomorfismus, pokud pro všechna $u, v \in V$ platí

$$(u, v) \in E \Longrightarrow (f(u), f(v)) \in F.$$

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Ukažte, že graf je (vrcholově) k-obarvitelný, právě když z něj vede homomorfismus do úplného grafu na k vrcholech.

Příklad 8.2. Uvažme Hasseův diagram množiny všech podmnožin n-prvkové množiny uspořádané inkluzí, který budeme chápat jako neorientovaný graf G. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ řešte následující úlohy:

a) Rozhodněte, zda je G eulerovský.

b) Určete, kolika nejméně barvami je G vrcholově obarvitelný.

(*Nápověda.* Uvědomme si, že graf G odpovídá n-rozměrné krychli.)

Příklad 8.3. Uvažme Hasseův diagram množiny čísel $\{1, 2, \ldots, 12\}$ uspořádaných dělitelností, který budeme chápat jako neorientovaný graf G. Řešte následující úlohy:

a) Rozhodněte, zda je G eulerovský.

b) Rozhodněte, zda je G rovinný.

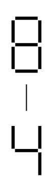
c) Nyní ohodnoťme hrany grafu G následovně. Nechť a, b jsou vrcholy grafu G. Pokud $a \mid b$ a a je spojené hranou s b, potom přiřaďme této hraně číslo $\frac{b}{a}$. Nalezněte nějakou minimální kostru grafu G.

Příklad 8.4. Uvažme Hasseův diagram množiny digitálních číslic $0, 1, \ldots 9$ s uspořádáním $\leq$, kde $a \leq b$, právě když digitální obraz a je podmnožinou digitálního obrazu b (viz obrázek), který budeme chápat jako neorientovaný graf G. Řešte následující úlohy:

a) Rozhodněte, zda G je eulerovský.

b) Rozhodněte, zda G je rovinný.

c) Nyní ohodnoťme hrany grafu G následovně: pokud $a \leq b$ a a je spojené hranou s b, potom přiřaďme této hraně číslo $|a - b|$. Nalezněte nějakou minimální kostru grafu G.



Obr. 5: Příklad uspořádání digitálních číslic, např. $4 \leq 8$.

Příklad 8.5. Najděte všechny vzájemně neizomorfní grafy, které mají právě 6 vrcholů, právě 7 hran a obsahují právě 2 kružnice.

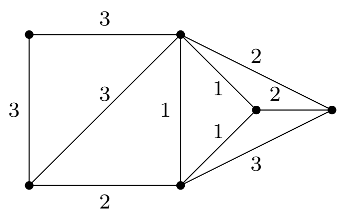
Příklad 8.6. Uveďte příklad nezáporně ohodnoceného souvislého grafu s šesti vrcholy, z nichž dva vrcholy u, v splňují, že při výpočtu nejkratších cest z vrcholu u pomocí Dijkstrova algoritmu se aktuální hodnota spočítaná pro vrchol v mění v každém kroku.

Příklad 8.7. Uveďte příklad ohodnoceného souvislého grafu s pěti vrcholy, který obsahuje právě jednu záporně ohodnocenou hranu a dva jeho vrcholy u, v splňují, že při výpočtu nejkratších cest z u dává Dijkstrův algoritmus správný výsledek, ale při výpočtu nejkratších cest z v ne.

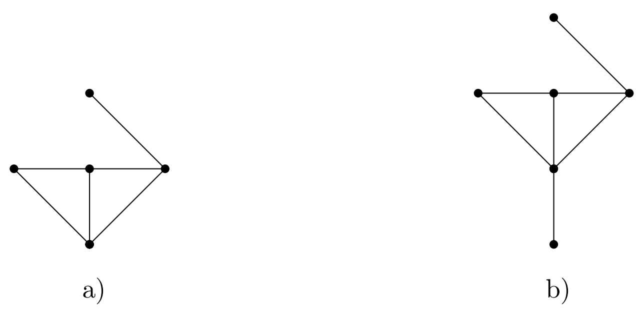
Příklad 8.8. Najděte všechny vzájemně neizomorfní grafy se čtyřmi vrcholy.

Příklad 8.9. Najděte všechny vzájemně neizomorfní eulerovské grafy s pěti vrcholy.

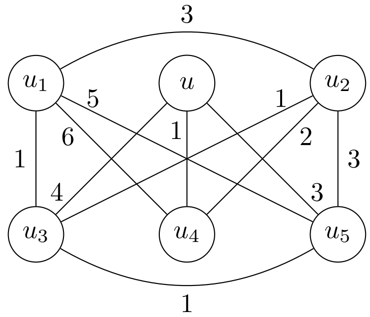
Příklad 8.10. Najděte minimální kostru následujícího ohodnoceného grafu. Kolik různých minimálních koster tento graf má?



Příklad 8.11. Kolik koster, až na izomorfismus, mají následující grafy?



Příklad 8.12. Pomocí Dijkstrova algoritmu určete nejkratší cesty z vrcholu u do všech ostatních vrcholů v následujícím grafu.



Příklad 8.13. Rozhodněte, zda jsou následující grafy izomorfní. Pokud ano, najděte (nějaký) izomorfismus. Jako pomůcku uvedeme jedno tvrzení bez důkazu. Nejdříve musíme ovšem definovat pojem *indukovaného podgrafu* grafu G.

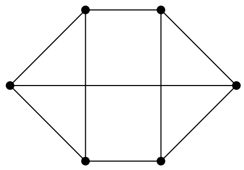
Nechť $G = (V, E)$ je graf. Graf $H = (W, F)$ nazveme *indukovaným podgrafem* grafu G, pokud H je podgraf grafu G a pro všechny vrcholy $u, v \in H$ platí

$$(u, v) \in F \iff (u, v) \in E.$$

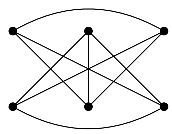
Lemma. *Grafy G_1, G_2 jsou izomorfní právě tehdy, když pro každou podmnožinu H množiny nezáporných celých čísel jsou izomorfní podgrafy P_1, P_2 grafů G_1, G_2, přičemž P_1, P_2 jsou indukované množinami všech vrcholů příslušných grafů, jejichž stupeň leží v H.*

Poznámka. Všimněte si, že ekvivalence z tvrzení je zajímavá pouze v jednom směru – implikace zprava doleva platí triviálně volbou $H = \mathbb{N}_0$.

1)

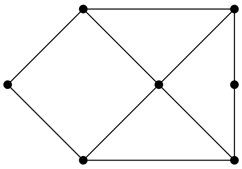


a)

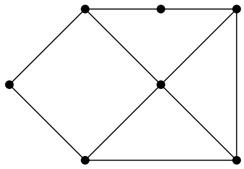


b)

2)

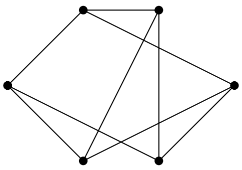


a)

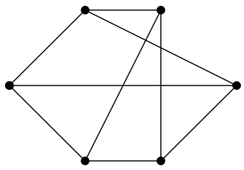


b)

3)

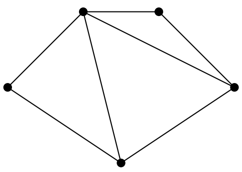


a)

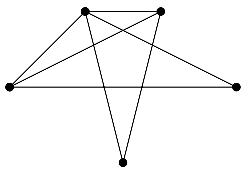


b)

4)

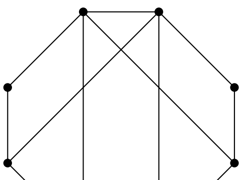


a)

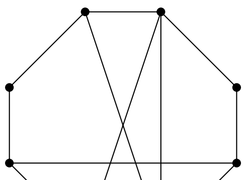


b)

5)

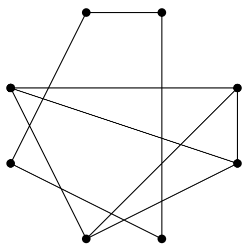


a)

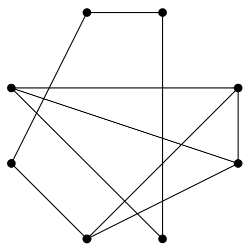


b)

6)



a)



b)