Komplexní čísla

(Seminář z matematiky I - M1130/02 2015)

(1) Zapište v algebraickém tvaru čísla:

(a) $\dfrac{2-i}{-3+i} - \dfrac{1+2i}{1-3i}$ $\left[-\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i\right]$

(b) $2 + \dfrac{1}{3i} - \dfrac{3}{i^3}$ $\left[2 - \dfrac{10}{3}i\right]$

(c) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{-2} + \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2}$ $[-2]$

(2) Vypočtěte:

(a) $\left|1 - i + \dfrac{1+2i}{3-i}\right|$ $\left[\dfrac{\sqrt{130}}{10}\right]$

(b) $\left|\dfrac{i}{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}\right|$ $\left[\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right]$

(c) $\left||2+3i|^2 + (2+3i)^2\right|$ $[4\sqrt{13}]$

(d) $\left|\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right|$ $[1]$

(e) $\left|\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right|$ $[1+\sqrt{3}]$

(f) $\dfrac{\left|\dfrac{3-4i}{5i}\right| + \left|\dfrac{2+i}{1-2i}\right|}{1+2i}$ $\left[\dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}i\right]$

(3) Řešte rovnice v oboru $\mathbb{C}$:

(a) $|z| - z = 1 + 2i$ $\left[\dfrac{3}{2} - 2i\right]$

(b) $z^2 + |z| = 0$ $[0;\ i;\ -i]$

(c) $\left(2 - \dfrac{1}{i}\right)\bar{z} + 2z = 10i$ $[10 - 40i]$

(d) $\bar{z}(z-1) = |z-1|^2$ $[1]$

(4) Určete všechna ryze imaginární čísla z, pro něž platí:

(a) $|z - 1 + i| = z$ [neexistují]

(b) $|z+1| = |z-2\,\mathrm{i}\,|$ $\left[\frac{3}{4}\,\mathrm{i}\right]$

(5) Rozhodněte, která z následujících čísel jsou komplexní jednotky:

$\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}, \frac{1+\mathrm{i}}{2}, \frac{(2+\mathrm{i})^2}{3-4\mathrm{i}}, -\mathrm{i}^{30}, \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \cos\frac{\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{10}$ [A, N, A, A, A, A]

(6) V Gaussově rovinně znázorněte všechna komplexní čísla z, pro něž platí:

(a) $|z+\mathrm{i}\,| \geqslant |z+1|$

(b) $\left|z-\frac{1}{1+\mathrm{i}}\right| < |z|$

(c) $\left|z+\frac{\mathrm{i}}{1+i}\right| > |z-1|$

(d) $\left|z-\frac{1-2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right| \leqslant \left|z+\frac{1-2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right|$

(7) V goniometrickém tvaru vyjádřete čísla:

(a) $\frac{2}{-1+\mathrm{i}}$ $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

(b) $\frac{-3+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

(c) $|3+2\mathrm{i}\,|$ $\left[\sqrt{13}\,(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)\right]$

(d) i^{80} $[\cos 0+\mathrm{i}\sin 0]$

(e) $1+\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}$ $\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]$

(f) $1+\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$ $\left[2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]$

(g) $\sin\varphi+\mathrm{i}\cos\varphi$ $\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]$

(h) $\frac{\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha}{\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta}$ $[\cos(\alpha-\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha-\beta)]$

(8) Vypočtěte:

(a) $(-1+\mathrm{i})^{66}-\mathrm{i}\,(1+\mathrm{i})^{80}$ $\left[-129\cdot 2^{33}\cdot\mathrm{i}\right]$

(b) $\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)^{12}$ $\left[3^6\right]$

(c) $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^{-8}$ $\left[2^{-8}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right]$

(d) $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{-25}$ $[-\mathrm{i}]$

(e) $(\operatorname{tg}1-\mathrm{i})^4$ $\left[\frac{\cos 4+\mathrm{i}\sin 4}{\cos^4 1}\right]$

(9) Určete argument φ tak, aby platila rovnost:

(a) $\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)=\mathrm{i}$ $\left[-\frac{\pi}{6}\right]$

(b) $\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)=-1$ $\left[-\frac{3\pi}{4}\right]$

(c) $\frac{\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}}{\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi}=1$ $\left[\frac{7\pi}{6}\right]$

(d) $\frac{\cos\frac{\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi}=-\mathrm{i}$ $\left[-\frac{11\pi}{8}\right]$

(10) V oboru komplexních čísel řešte rovnice:

(a) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x-1\right)=0$ $\left[\frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2};\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right]$

(b) $\frac{x+2}{x-3}+\frac{x-1}{x+1}=0$ $\left[\frac{1\pm\mathrm{i}\sqrt{39}}{4}\right]$

(c) $2x^2+x+1=0$ $\left[\frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}\right]$

(11) Určete, pro které hodnoty $p\in\mathbb{R}$ mají rovnice dva reálné kořeny, resp. jeden dvojnásobný reálný kořen, resp. imaginární kořeny:

(a) $px^2+2(p-1)x+p-5=0$ $\left[\left(-\frac{1}{3},\infty\right)\wedge p\neq 0;-\frac{1}{3};\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\right]$

(b) $(p+3)x^2+3(p-6)x+5-18p=0$ [pro $p\neq-3$ má rovnice 2 reálné kořeny]

(c) $px^2+(2p-1)x+p=0$ $\left[\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)\wedge p\neq 0;\frac{1}{4};\left(\frac{1}{4},\infty\right)\right]$

(12) Rozložte na součin lineárních dvojčlenů:

(a) x^2+x+1 $\left[\left(x+\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\right)\left(x+\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\right)\right]$

(b) $3x^2+2x+2$ $$\left[3\left(x+\frac{1}{3}\left(1-\mathrm{i}\sqrt{5}\right)\right)\left(x+\frac{1}{3}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{5}\right)\right)\right]$$

(c) x^2-3x+5 $$\left[\left(x-\frac{1}{2}\left(3+\mathrm{i}\sqrt{11}\right)\right)\left(x-\frac{1}{2}\left(3-\mathrm{i}\sqrt{11}\right)\right)\right]$$

(13) Řešte v $\mathbb{C}$ binomické rovnice:

(a) $x^3-\mathrm{i}=0$ $$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i};-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i};-\mathrm{i}\right]$$

(b) $x^6+64=0$ $$\left[\pm\sqrt{3}\pm\mathrm{i};\pm2\mathrm{i}\right]$$

(c) $x^8+1=0$ $$\left[\cos\frac{\pi+2k\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{8}, k=0,1,2,3,4,5,6,7\right]$$

(d) $x^5-1-\mathrm{i}\sqrt{3}=0$ $$\left[\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}\right), k=0,1,2,3,4\right]$$

(e) $x^3-1+\mathrm{i}=0$ $$\left[\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}\right), k=0,1,2\right]$$

(14) V množině $\mathbb{C}$ řešte rovnice:

(a) $x^2-2x+9+6\mathrm{i}=0$ $$[3\mathrm{i};2-3\mathrm{i}]$$

(b) $x^2+(2-3\mathrm{i})x-5(1+\mathrm{i})=0$ $$[1+2\mathrm{i};-3+\mathrm{i}]$$

(c) $x^2-4=3\mathrm{i}$ $$\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

(d) $x^2=\left(\frac{4}{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{12}$ $$[\pm64]$$

(e) $x^2-\frac{(1+\mathrm{i})^{100}}{(1-\mathrm{i})^{96}-\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^{98}}=0$ $$\left[\pm\mathrm{i}\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$$