Dirichletův princip

(1) Na konferenci 70 delegátů hovoří 11 různými jazyky, stejným jazykem nejvíce 15 z nich. Za oficiální je považován takový jazyk, kterým hovoří nejméně 5 delegátů. Dokažte, že to jsou alespoň tři jazyky.

(2) Karel se 50 dní za sebou připravoval k maturitě z matematiky. Každý den vyřešil aspoň jednu úlohu, celkem to bylo 79 úloh. Dokažte, že existuje jeden nebo několik po sobě jdoucích dní, ve kterých Karel celkem vyřešil právě 20 úloh.

(3) Jaký největší počet králů můžeme umístit na šachovnici, aby se žádní dva navzájem neohrožovali?

(4) Každý bod roviny je obarven jednou ze dvou barev. Ukažte, že některý obdélník má všechny vrcholy stejné barvy.

(5) V autobuse je 38 cestujících, přitom ti, kteří se neznají, mají mezi cestujícími společného známého. Dokažte, že některý cestující má v autobuse aspoň sedm známých.

(6) Deset rodin z jednoho domu trávilo zahraniční dovolenou. Každá jela jinam a poslala domů pohlednice pěti z ostatních rodin. Dokažte, že některé dvě rodiny si poslaly pohlednice navzájem.

(7) Každý z deseti přátel dostal kartičku, na kterou napsal své čtyři nejoblíbenější měsíce kalendářního roku. Dokažte, že některé dva měsíce jsou současně zapsány na nejméně dvou kartičkách.

(8) Každí dva ze 17 vědců si navzájem dopisují o právě jednom ze tří témat T_1, T_2, T_3. Dokažte, že lze někteří tři vědci si navzájem dopisují stejném tématu T_i.

(9) Tenisový turnaj osmi hráčů se hrál systémem „každý s každým jeden zápas“. Dokažte, že lze určit hráče A, B, C, D tak, že hráč A porazil hráče B, C i D, hráč B porazil hráče C i D a hráč C porazil hráče D.

(10) Ze dvou znaků, řekněme A a B, lze sestavit $2^5 = 32$ pětimístných kódů. Kolik (nejvíce) z nich lze vybrat tak, aby se každé dva z vybraných kódů lišily v nejméně dvou pozicích?