Príklady na precvičovanie – číselné rady a kritériá ich konvergencie a divergencie

Ústredným problémom teórie reálnych číselných radov je vyšetrovanie ich konvergencie, resp. divergencie. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je daná postupnosť reálnych čísiel, potom hovoríme, že *nekonečný číselný rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

je *konvergentný* (alebo tiež *konverguje*), ak existuje *konečná limita* tzv. *postupnosti čiastočných súčtov* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ radu (1), ktorá je definovaná ako

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Príslušnú limitu $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ potom nazývame *súčtom* radu (1). V opačnom prípade, t.j., ak postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nevlastnú limitu, resp. vôbec nemá limitu, rad (1) je *divergentný* (*diverguje*). Spolu s radom (1) sa často skúma i odpovedajúci rad z absolútnych hodnôt, t.j., rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{3}$$

Dá sa ľahko ukázať (pomocou Cauchyho–Bolzanovho kritéria uvedeného nižšie), že ak konverguje rad (3), potom konverguje i rad (1). V takomto prípade hovoríme, že rad (1) konverguje *absolútne*. Opačná implikácia neplatí, t.j., z konvergencie radu (1) nevyplýva konvergencia radu (3). O konvergentnom rade (1) takom, že k nemu prislúchajúci rad (3) diverguje, povieme, že konverguje *neabsolútne* alebo aj *relatívne*.

Základné kritérium konvergencie číselných radov je *Cauchyho–Bolzanovo kritérium*.

Cauchyho–Bolzanovo kritérium

Rad (1) konverguje práve vtedy, keď pre každé kladné číslo ε existuje index n_0 taký, že pre každý index $n \geq n_0$ a pre každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon.$$

Cauchyho–Bolzanovo kritérium je *univerzálne* kritérium, t.j., udáva nutnú i postačujúcu podmienku konvergencie radu. Je však pomerne ťažkopádne na praktické používanie a má hlavne teoretický význam. Uvedieme teraz prehľad základných praktických kritérií konvergencie číselných radov. Tieto kritéria umožňujú za istých predpokladov rozhodnúť o konvergencii/divergencii radu (1). Žiadne z nich však nie je univerzálne (v tom zmysle ako Cauchyho–Bolzanovo kritérium).

Nutná podmienka konvergencie radu/postačujúca podmienka divergencie radu

Ak rad (1) konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ekvivalentne, ak limita $\lim_{n\to\infty} a_n$ je nenulová, resp. neexistuje, potom rad (1) diverguje.

Porovnávacie kritérium

- *Nelimitná verzia*:
  Nech $\sum a_n$ a $\sum b_n$ sú dva číselné rady s nezápornými členmi, ktoré spĺňajú
  $$a_n \le b_n \quad \text{pre skoro všetky indexy } n.$$
  Potom platí
  $$\sum b_n \text{ konverguje} \implies \sum a_n \text{ konverguje}$$
  $$\left(\text{ekvivalentne } \sum a_n \text{ diverguje} \implies \sum b_n \text{ diverguje}\right).$$
- *Limitná verzia*:
  Nech pre číselné rady $\sum a_n$ a $\sum b_n$ s nezápornými členmi existuje limita
  $$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}, \quad L \in [0,\infty) \cup \{\infty\}.$$
  Potom pre $L \in (0,\infty)$ sa obidva rady z hľadiska konvergencie správajú rovnako. Pre $L = 0$ platí
  $$\sum b_n \text{ konverguje} \implies \sum a_n \text{ konverguje}$$
  $$\left(\text{ekvivalentne } \sum a_n \text{ diverguje} \implies \sum b_n \text{ diverguje}\right),$$

kým pre $L = \infty$ platí

$$\sum a_n \text{ konverguje } \implies \sum b_n \text{ konverguje}$$

$$\Big(\text{ekvivalentne } \sum b_n \text{ diverguje } \implies \sum a_n \text{ diverguje}\Big).$$

Podielové (D'Alembertovo) kritérium

- *Nelimitná verzia*:
  Nech $\sum a_n$ je číselný rad s nenulovými členmi. Potom platí

$$\text{ak } \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \implies \sum a_n \text{ konverguje absolútne;}$$

$$\text{ak } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \text{ pre skoro všetky } n \implies \sum a_n \text{ diverguje.}$$

- *Limitná verzia*:
  Nech pre číselný rad $\sum a_n$ s nenulovými členmi existuje limita

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

  Potom rad $\sum a_n$ pre $L < 1$ konverguje absolútne a pre $L > 1$ diverguje.

Odmocninové (Cauchyho) kritérium

- *Nelimitná verzia*:
  Nech $\sum a_n$ je číselný rad. Potom platí

$$\text{ak } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum a_n \text{ konverguje absolútne;}$$

$$\text{ak } \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \text{ pre nekonečne veľa } n \implies \sum a_n \text{ diverguje.}$$

- *Limitná verzia*:
  Nech pre číselný rad $\sum a_n$ existuje limita

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

  Potom rad $\sum a_n$ pre $L < 1$ konverguje absolútne a pre $L > 1$ diverguje.

Raabeho kritérium

- *Nelimitná verzia*:
  Nech $\sum a_n$ je číselný rad s kladnými členmi. Potom platí

$$\text{ak } \liminf_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1 \implies \sum a_n \text{ konverguje (absolútne);}$$

$$\text{ak } n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1 \text{ pre skoro všetky } n \implies \sum a_n \text{ diverguje.}$$

- *Limitná verzia*:
  Nech pre číselný rad $\sum a_n$ s kladnými členmi existuje limita

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

  Potom rad $\sum a_n$ pre $L > 1$ konverguje absolútne a pre $L < 1$ diverguje.

Integrálne (Cauchyho) kritérium

Nech pre rad $\sum a_n$ s nezápornými členmi existuje funkcia $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ s vlastnosťami

- f je nezáporná a nerastúca,
- $f(n) = a_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$.

Potom rad $\sum a_n$ a nevlastný integrál $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ sa z hľadiska konvergencie správajú rovnako.

Leibnizovo kritérium pre alternujúce rady

Nech pre $\{a_n\}$ je nerastúca postupnosť s kladnými členmi. Potom alternujúci rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

konverguje práve vtedy, keď $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, t.j., keď je splnená nutná podmienka konvergencie.

Nasledujúce dve kritéria – *Dirichletovo a Abelovo* – patria medzi pokročilejšie techniky skúmania radov. Často sa využívajú na vyšetrovanie radov zo súčinu dvoch postupností. Poskytujú však iba postačujúce podmienky konvergencie, naviac nie nutne absolútnej.

Dirichletovo a Abelovo kritérium

Nech $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ sú dve číselné postupnosti, pričom nech $\{b_n\}$ je monotónna. Nech naviac je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok.

- *(Dirichlet)* Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}$ radu $\sum a_n$ je ohraničená a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
- *(Abel)* Rad $\sum a_n$ konverguje a postupnosť $\{b_n\}$ je ohraničená.

Potom rad $\sum a_n b_n$ konverguje (nie však nutne absolútne).

Poznámka: Je užitočné si všimnúť, ako navzájom súvisia podmienky v Dirichletovom kritériu a Abelovom kritériu. Podmienka na postupnosť $\{b_n\}$ v Dirichletovom kritériu zaručuje jej ohraničenosť (samy si dobre premyslite :)). V Abelovom kritériu túto požiadavku zoslabujeme iba na samotnú ohraničenosť postupnosti $\{b_n\}$ (premyslite si, že v skutočnosti – vďaka monotónnosti $\{b_n\}$ – je toto ekvivalentné s *existenciou limity* $\lim_{n\to\infty} b_n$, ktorá však *nemusí* byť nulová). Na druhej strane, s podmienkami kladenými na postupnosť $\{a_n\}$ je to presne naopak. Konvergencia radu $\sum a_n$ (t.j., existencia konečnej limity postupnosti $\{s_n\}$) je *silnejší* nárok ako ohraničenosť jeho postupnosti čiastočných súčtov $\{s_n\}$ (i toto si dobre premyslite :)). Celková účinnosť oboch kritérii je teda viac-menej rovnaká. Samotný výber konkrétneho kritéria závisí od tvaru daného radu, ilustujeme to na príkladoch.

Jedným zo základných nekonečných číselných radov je *geometrický rad*, ktorý má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, q^n, \qquad a, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{4}$$

Nie je ťažké ukázať, že geometrický rad (4) konverguje (absolútne) práve vtedy, keď jeho kvocient q spĺňa $|q| < 1$. V tomto prípade máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, q^n = \frac{a}{1-q}. \tag{5}$$

Ďalším zo základných radov je *harmonický rad*, t.j., rad tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \tag{6}$$

Tento rad je divergentný (postupnosť jeho čiastočných súčtov konverguje do plus nekonečna) napriek tomu, že je splnená nutná podmienka konvergencie. Divergencia harmonického radu (6) sa dá dokázať viacerými spôsobmi (pozri Príklad 3 nižšie). Jeden z nich ukazuje na zaujímavú súvislosť n-tého čiastočného súčtu s_n harmonického radu s prirodzeným logaritmom $\ln n$. Konkrétne, dá sa dokázať, že limita rozdielu

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} (s_n - \ln n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

existuje a je vlastná. Reálne číslo γ sa nazýva Eulerova–Mascheroniho konštanta a objavuje sa v rozličných oblastiach matematiky i fyziky. Hrubo povedané, udáva o koľko sa líši „nekonečný súčet“ harmonického radu od „nekonečnej hodnoty $\ln\infty$“ :). Z geometrického hľadiska číslo γ predstavuje presnú hodnotu chyby, akej sa dopustíme, keď obsah plochy pod grafom funkcie $y = 1/x$ na intervale $[1,\infty)$ aproximujeme hodnotou príslušného „horného integrálneho súčtu“ vytvoreného pomocou delenia $1 < 2 < 3 < \cdots < n < \cdots$ intervalu $[1,\infty)$ (úplné premyslenie a nakreslenie vhodného obrázka nechávame na čitateľa :)). Tieto pozorovania umožnujú napríklad aproximovať pre veľké n hodnotu konečného súčtu $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ výrazom $\gamma + \ln n$. O Eulerovej–Mascheroniho konštante sa dodnes nevie, či je racionálna alebo iracionálna :). Jej hodnota vyčíslená na prvých 50 desatinných miest je

$$\gamma = 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992\ldots.$$

Riešené príklady

Príklad 1
Priamo podľa definície vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}.$$

Riešenie:
Pokúsime sa explicitne vyjadriť n-tý čiastočný súčet s_n uvedeného radu. Všeobecný člen radu má tvar racionálnej lomenej funkcie v premennej n. Jej rozkladom na parciálne zlomky dostaneme

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Pre s_n, $n \geq 2$, potom máme

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$

Posledná suma sa zvykne označovať prívlastkom *teleskopická*, pretože všetky jej vnútorné členy sa šťastnou náhodou vzájomne odčítajú :). Skutočne,

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Ihneď už preto vidíme, že $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$, a teda rad v zadaní príkladu je konvergentný so súčtom 1, t.j.,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1.$$

Príklad 2 (porovnávacie kritérium)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Riešenie:
Využijeme pozorovanie

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

(overte samy :)). V predchádzajúcom príklade sme dokázali, že rad

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

konverguje. Preto podľa nelimitného porovnávacieho kritéria konverguje i rad v zadaní príkladu.

Príklad 3 (Cauchyho–Bolzanovo kritérium)
Dokážme divergenciu harmonického radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Riešenie:
Využijeme dôkaz sporom. Predpokladajme, že harmonický rad konverguje. To podľa Cauchyho–Bolzanovho kritéria znamená, že pre každé kladné číslo ε existuje index n_0 tak, že nerovnosť

$$\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{n+m} \right| < \varepsilon$$

platí pre každé $n \geq n_0$ a každé $m \in \mathbb{N}$. Zvoľme $\varepsilon = 1/3$ a nech n_0 je k nemu prislúchajúci index. V uvedenej nerovnosti iste môžeme zvoliť $n = n_0$ a $m = n_0$. Dostaneme potom

$$\left| \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \cdots + \frac{1}{2n_0} \right| < \frac{1}{3}.$$

Nakoľko pracujeme s kladnými číslami, môžeme odstrániť absolútnu hodnotu

$$\frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \cdots + \frac{1}{2n_0} < \frac{1}{3}.$$

Každý člen súčtu na ľavej strane poslednej nerovnosti je väčší (nanajvyš rovný) než zlomok $\frac{1}{2n_0}$ (samy sa spresvedčte :)). Preto môžeme ľavu stranu nerovnosti takto zmenšiť

$$\frac{1}{2n_0}+\frac{1}{2n_0}+\cdots+\frac{1}{2n_0}\leq\frac{1}{n_0+1}+\frac{1}{n_0+2}+\cdots+\frac{1}{2n_0}<\frac{1}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2n_0}+\frac{1}{2n_0}+\cdots+\frac{1}{2n_0}<\frac{1}{3}.$$

Na ľavej strane poslednej nerovnosti je však presne n_0 členov, takže máme

$$n_0\cdot\frac{1}{2n_0}<\frac{1}{3}\implies\frac{1}{2}<\frac{1}{3}\ \ldots\ \text{spor!!!}$$

To znamená, že náš východiskový predpoklad o konvergencii harmonického radu bol nesprávny. Preto harmonický rad diverguje.

Príklad 4 (porovnávacie kritérium)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}.$$

Riešenie:
Toto je typický príklad na použitie limitného porovnávacieho kritéria. Aby sme našli vhodný rad na porovnanie, pozrime sa, čo sa deje s členmi radu v zadaní príkladu pre veľké indexy n. Z reálnej analýzy funkcií jednej premennej vieme, že výraz $\sin x$ sa pre malinké x (v okolí nuly) správa ako x, pretože $\lim_{x\to\infty}(\sin x)/x=1$. Nakoľko $1/n\to 0$ pre $n\to\infty$, máme odhad

$$\sin\frac{1}{n}\approx\frac{1}{n}\text{ pre dostatočne veľké }n.$$

To navádza na myšlienku porovnať rad v zadaní príkladu s harmonickým radom $\sum 1/n$. Naozaj, pretože platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1,$$

obidva rady sa z hľadiska konvergencie správajú rovnako. Teda rad $\sum \sin(1/n)$ diverguje. Hlavným fígľom bolo uvedomiť si, že rad v zadaní príkladu sa pre veľké n správa ako harmonický rad, a preto teda aj diverguje (pre konvergenciu/divergenciu radu je smerodajné to, čo sa deje s jeho členmi s obrovskými indexami).

Príklad 5 (porovnávacie kritérium)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Riešenie:
K tomuto príkladu je možné pristúpiť dvomi spôsobmi, obidva využívajú základné vlastnosti funkcie $\ln x$. Z grafu funkcie $\ln x$ je zrejmé, že pre každé kladné x platí nerovnosť $\ln x < x$ (samy sa presvedčte :)). Preto pre každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\ln(n+1) < n+1 \iff \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Rad v zadaní príkladu je teda *majorantný* vzhľadom na harmonický rad. Podľa nelimitného porovnávacieho kritéria preto diverguje. Druhý spôsob je založený na *asymptotickom* správaní funkcie $\ln x$ (to znamená, ako sa $\ln x$ správa pre veľmi veľké x). Z Matematickej analýzy I vieme, že funkcia $\ln x$ rastie v okolí nekonečna *pomalšie* ako akákoľvek mocninová funkcia x^r s kladným exponentom r. Prakticky tento okrídlený výrok hovorí (samy overte ;))

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \quad \text{pre každé } r > 0.$$

Pre $r = 1$ a $x = n+1$ potom máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\ln(n+1)}} = 0.$$

Posledná limita podľa limitného porovnávacieho kritéria implikuje, že rad v zadaní príkladu diverguje (dobre si to premyslite; táto limita hovorí, že rad v zadaní je pre veľké indexy n „nekonečnekrát“ *väčší* ako divergentný harmonický rad).

Príklad 6 (podielové kritérium)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{6^n}}, \qquad \text{kde } \varphi(n) := \begin{cases} 2, & n \text{ párne}, \\ \sqrt{6}, & n \text{ nepárne}. \end{cases}$$

Riešenie:
Pre poriadok poznamenajme, že sa bavíme o rade

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6^1}} + \frac{2}{\sqrt{6^2}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6^3}} + \frac{2}{\sqrt{6^4}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6^5}} + \frac{2}{\sqrt{6^6}} + \cdots.$$

Na jeho vyšetrovanie chceme použiť podielové kritérium. Skúmajme preto podiel $|a_{n+1}/a_n|$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{\varphi(n+1)}{\sqrt{6^{n+1}}}}{\frac{\varphi(n)}{\sqrt{6^n}}}\right| = \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \begin{cases} 1/2, & n \text{ párne}, \\ 1/3, & n \text{ nepárne} \end{cases}$$

(samy overte :)). Limita z daného podielu neexistuje, preto nemôžeme použiť limitnú verziu D'Alembertovho kritéria. Avšak platí

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2} < 1,$$

a preto podľa nelimitnej verzie rad v zadaní príkladu konverguje (absolútne).

Príklad 7 (podielové kritérium)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Riešenie:
V tomto prípade pre podiel $|a_{n+1}/a_n|$ dostávame (po úpravách)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

A keďže

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} > 1,$$

podľa limitného D'Alembertovho kritéria usúdime, že rad v zadaní príkladu diverguje.

Príklad 8 (odmocninové kritérium)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n.$$

Riešenie:
Za účelom použitia Cauchyho odmocninového kritéria preskúmajme výraz $\sqrt[n]{|a_n|}$. Platí

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n\right|} = \left|\frac{n+2}{2n-1}\right| = \frac{n+2}{2n-1}.$$

Keďže

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1,$$

podľa limitnej verzie kritéria rad v zadaní príkladu konverguje (absolútne).

Príklad 9 (odmocninové kritérium)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^6}+\cdots.$$

Riešenie:
Pre všeobecný člen a_n tohto radu zrejme platí

$$a_n = \begin{cases} 1/2^n, & n \text{ nepárne},\\ 1/3^n, & n \text{ párne}.\end{cases}$$

V tomto prípade nemôžeme použiť limitnú verziu Cauchyho odmocninového kritéria, nakoľko

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 1/2, & n \text{ nepárne}, \\ 1/3, & n \text{ párne}, \end{cases}$$

a teda limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ neexistuje. Avšak máme

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/2 < 1.$$

Preto podľa nelimitnej verzie kritéria rad v zadaní príkladu konverguje (absolútne).

Príklad 10 (odmocninové kritérium)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^{n-1}}}.$$

Riešenie:
V tomto prípade funguje limitná verzia Cauchyho kritéria, nakoľko platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2^{n+(-1)^{n-1}}} \right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Rad v zadaní príkladu preto konverguje (absolútne).

Príklad 11 (Raabeho kritérium)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}+3)\cdots(\sqrt{2}+n)}.$$

Riešenie:
Jedná sa o rad s kladnými členmi. Potrebujeme sa pozrieť na výraz

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Po úpravách postupne dostaneme

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=n\left(1-\frac{\frac{(n+1)!}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}+3)\cdots(\sqrt{2}+n)(\sqrt{2}+n+1)}}{\frac{n!}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}+3)\cdots(\sqrt{2}+n)}}\right)$$

$$=n\left(1-\frac{n+1}{\sqrt{2}+n+1}\right)=\frac{n\sqrt{2}}{n+1+\sqrt{2}}.$$

Nakoľko platí

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{2}}{n+1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}>1,$$

podľa limitnej verzie Raabeho kritéria rad v zadaní príkladu konverguje (absolútne).

Príklad 12 (Raabeho kritérium)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

Riešenie:
Postupujeme analogicky ako v predchádzajúcom príklade. Opäť máme rad s kladnými členmi. Platí

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=n\left(1-\frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}}\right)=n\left(1-\frac{n^{3/2}}{(n+1)^{3/2}}\right)$$

$$=\frac{n\left[(n+1)^{3/2}-n^{3/2}\right]}{(n+1)^{3/2}}=\frac{n\left[(n+1)^{3/2}-n^{3/2}\right]}{(n+1)^{3/2}}.$$

Ďalej máme

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left[(n+1)^{3/2}-n^{3/2}\right]}{(n+1)^{3/2}}=\frac{3}{2}>1$$

(samy overte :)). To znamená, že rad v zadaní príkladu konverguje (absolútne).

Príklad 13 (ťažší) (Raabeho kritérium)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Riešenie:
Chceme aplikovať Raabeho limitné kritérium. Nechávame na čitateľa, aby overil, že platí :)

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{n}{\mathrm{e}} \cdot \left[\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right].$$

Našim cieľom je zistiť hodnotu limity

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{e}} \cdot \left[\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right].$$

Za týmto účelom vyšetríme limitu *funkcie*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\mathrm{e}} \cdot \left[\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \frac{\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\frac{1}{x}}.$$

Jedná sa zrejme o neurčitosť typu 0/0, pričom čitateľ i menovateľ limitovaného zlomku je diferencovateľný v okolí nekonečna. Môžeme preto použiť L'Hospitalovo pravidlo. Postupne dostávame (medzivýpočty pre jednoduchosť vynechávame :))

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \frac{\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \frac{\left[\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\mathrm{e}} \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}.$$

V poslednej limite výraz $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x/\mathrm{e}$ konverguje do 1, kým pre limitu druhého zlomku platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}} = \left|\frac{0}{0},\ \mathrm{L'Hospital}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Dostávame teda (nestraťte sa vo výpočtoch ;))

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\mathrm{e}} \cdot \left[\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right] = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

To znamená, že existuje i limita príslušnej postupnosti s hodnotou

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{e}} \cdot \left[\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = \frac{1}{2} < 1.$$

Podľa limitného Raabeho kritéria potom rad v zadaní príkladu diverguje.

Príklad 14 (Integrálne kritérium)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

Riešenie:
Toto je typický príklad na použitie integrálneho kritéria. Na základe tvaru členov vyšetrovaného radu uvažujme funkciu

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \quad x \in [1, \infty).$$

Funkcia f je iste nezáporná na intervale $[1, \infty)$. Pomocou jej prvej derivácie sa môžeme ľahko presvedčiť, že f klesajúca na $[1, \infty)$ (samy overte :)). Sú teda splnené všetky predpoklady integrálneho kritéria, a preto daný rad konverguje práve vtedy, keď konverguje nevlastný integrál $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. Elemenárnou integráciou dostaneme (overte samy :))

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

Preto i rad v zadaní príkladu konverguje (absolútne).

Príklad 15 (nutná podmienka konvergencie)
Dokážme identity

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n!} = 0 \qquad\qquad \text{b)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} = 0.$$

Riešenie:
Tento príklad ilustruje aplikáciu teórie nekonečných číselných radov pri výpočte limít postupností. Využíva poznatok, že konvergencia radu úzko súvisí s limitou jeho n-tého člena. V prípade prvej limity uvažujme rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}.$$

Pomocou podielového kritéria sa ľahko ukáže jeho konvergencia (samy overte :)). Z toho potom vyplýva, že limita jeho n-tého člena musí byť nulová, t.j., platí rovnosť v a). Identita v b) sa dokáže podobne. Konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$$

sa pokúsime vyšetriť pomocou Cauchyho odmocninového kritéria. Máme

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left| \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{n!}{n^n}.$$

Výraz je klesajúci vzhľadom na n, nakoľko

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\text{toto je } <1} < \frac{n!}{n^n} \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}$$

(samy si dobre premyslite ;)). Preto platí nerovnosť

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n!}{n^n} < \frac{2!}{2^2} = \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

To znamená, že

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{2} < 1,$$

a teda podľa nelimitného Cauchyho kritéria skúmaný rad konverguje (absolútne). Táto skutočnoť následne implikuje rovnosť v b) (detaily si samy zdôvodnite :)).

Príklad 16 (Leibnizovo kritérium)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{3n+1}{2n-3}.$$

Riešenie:
Poďme sa presvedčiť, či je vôbec možné použiť Leibnizovo kritérium na vyšetrovanie predloženého radu. Jedná sa o alternujúci rad, pričom postupnosť $\{(3n+1)/(2n-3)\}_{n=2}^{\infty}$ je kladná a klesajúca, ako vyplýva z úpravy

$$\frac{3n+1}{2n-3}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{11}{4}}{n-\frac{3}{2}}.$$

Preto môžeme smelo aplikovať Leibnizovo kritérium. Podľa neho daný rad konverguje práve vtedy, keď spĺňa nutnú podmienku konvergencie. Avšak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-3}=\frac{3}{2}\neq 0.$$

Preto rad v zadaní príkladu diverguje.

Príklad 17 (Leibnizovo kritérium)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Riešenie:
Postupujeme analogicky ako v predchádzajúcom príklade. Overenie použiteľnosti Leibnizovho kritéria nechávame na čitateľa :). Zo skutočnosti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$$

uzavrieme, že rad v zadaní konverguje, avšak neabsolútne (prečo? :)).

Príklad 18 (absolútna/neabsolútna konvergencia)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Riešenie:
Podľa Leibnizovho kritéria uvedený rad konverguje (samy overte :)). Chceme naviac zistiť, či táto konvergencia je i absolútna. Za tým účelom sa pozrieme na odpovedajúci rad absolútnych hodnôt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Tento rad konverguje, ako sme ukázali v Príklade 2. Preto rad v zadaní príkladu konverguje absolútne.

Príklad 19 (absolútna/neabsolútna konvergencia)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Riešenie:
Predložený rad konverguje (samy overte :)). Príslušný rad absolútnych hodnôt je harmonický, ktorý diverguje. Preto rad v zadaní konverguje neabsolútne. Poznamenajme, že tento rad sa často označuje ako *Leibnizov rad* :).

Príklad 20 (absolútna/neabsolútna konvergencia)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{2^{n^2}}{n!}.$$

Riešenie:
Ukážeme, že uvedený rad diverguje. Využijeme nelimitné D'Alembertovo kritérium a jeden malý trik :). Platí (po úpravách)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^n \cdot \frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}}{(-1)^{n-1} \cdot \frac{2^{n^2}}{n!}}\right| = \frac{2^{2n+1}}{n+1}.$$

V poslednom výraze si mocninu 2^{2n+1} napíšeme ako $(1+1)^{2n+1}$ a použijeme binomickú vetu (to je ten trik; vyzerá dosť lacno, ale je celkom užitočný :))

$$2^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \cdots + \binom{2n+1}{2n+1}.$$

Ak v súčte na pravej strane v poslednej rovnosti necháme len prvé dva členy a na ostatné zabudneme, zrejme sa nám pravá strana zmenší. A toto bude platiť pre každé $n \in \mathbb{N}$. Vyplýva to z toho, že $2n+1 > 1$ pre každé prirodzené číslo, takže na pravej strane vždy budeme mať *aspoň prvé tri* členy (dobre si to premyslite ;)). Ako zadarmo sme teda odvodili takúto roztomilú nerovnosť

$$2^{2n+1} > \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} = 2(n+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jej aplikáciou potom dostaneme

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{2n+1}}{n+1} > \frac{2(n+1)}{n+1} = 2 \quad \text{pre každý index } n.$$

Podľa nelimitnej verzie podielového kritéria teda rad v zadaní príkladu diverguje. Všimnime si, že celý čas sme vlastne vyšetrovali konvergenciu/divergenciu príslušného *radu absolútnych hodnôt* a ukázali sme, že diverguje. Pokúste sa zdôvodniť, prečo sme *v tomto prípade* mohli z divergencie radu absolútnych hodnôt tak ľahkovážne usúdiť i divergenciu pôvodného radu, hoci vo všeobecnosti to nie je možné (zamerajte sa na poslednú nerovnosť a jej súvislosť s nutnou podmienkou konvergencie radu v zadaní príkladu ;)).

Príklad 21 (konvergencia/divergencia v závislosti na parametri)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p+1}{p}\right)^n$$

v závislosti na reálnom parametri p.

Riešenie:
Chceme zistiť, pre akú voľbu čísla p daný rad konverguje, resp. diverguje. K tomuto problému sa dá pristúpiť viacerými spôsobmi. Najpriamočiarejší z nich je založený na banálnom pozorovaní, že uvedený rad je geometrický s kvocientom $q = \frac{p+1}{p}$. A o tom je známe, že konverguje práve vtedy, keď $|q| < 1$. Množina všetkých hodnôt p, pre ktoré bude náš rad konvergovať, je preto určená nerovnosťou

$$\left|\frac{p+1}{p}\right| < 1.$$

Nechávame na čitateľa, aby sám overil, že pre $p \in (-\infty, -1/2)$ uvedený rad konverguje (absolútne) a pre $p \in [-1/2, \infty)$ diverguje :).

Príklad 22 (konvergencia/divergencia v závislosti na parametri)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3 2^n} \cdot x^n$$

v závislosti na reálnom parametri x.

Riešenie:
Na tento rad aplikujeme podielové kritérium (za člen a_n teraz berieme celý výraz za sumou, aj s mocninou x^n). Platí (po úpravách)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3 2^{n+1}} \cdot x^{n+1}}{\frac{n^2+1}{n^3 2^n} \cdot x^n}\right| = \frac{n^3\left[(n+1)^2+1\right]}{2(n+1)^3(n^2+1)} \cdot |x| \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \frac{|x|}{2}.$$

Podľa limitnej verzie podielového kritéria rad v zadaní príkladu konverguje absolútne, ak $\frac{|x|}{2} < 1$, resp. diverguje, ak $\frac{|x|}{2} > 1$. Priebežne teda vieme, že pre $x \in (-2, 2)$ uvedený rad konverguje absolútne a pre $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ diverguje. Použité kritérium nám však nedalo odpoveď na otázku, čo sa deje, keď $|x| = 2$, t.j., keď $x = 2$ alebo $x = -2$. Takáto situácia je typická a je spôsobená ne-univerzálnosťou používaných kritérií, ako sme to spomenuli v úvode. Prípady $x = \pm 2$ budeme musieť preskúmať osobitne, a síce priamym dosadením do radu v zadaní. Pre $x = 2$ dostaneme rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3 2^n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}.$$

Skúsené oko ihneď zbadá, že tento rad sa pre veľké n správa ako harmonický rad (pre skutočne obrovské n možno v kľude privrieť obe oči nad mrňavou jednotkou v čitateli ;)), a teda je divergentný. V prípade $x = -2$ máme alternujúci rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3 2^n} \cdot (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2+1}{n^3},$$

o ktorom by náš junák Leibniz pohotovo vyhlásil, že konverguje, a to neabsolútne (samy overte, napríklad i pomocou Príkladu 17 ;)). Môžeme teda uzavrieť, že rad v zadaní príkladu konverguje pre $x \in [-2, 2)$ a diverguje pre $x \in (-\infty, -2) \cup [2, \infty)$. Naviac, pre $x \in (-2, 2)$ sa jedná o absolútnu konvergenciu, kým v bode $x = -2$ rad konverguje neabsolútne.

Príklad 23 (Dirichletovo kritérium)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

v závislosti na reálnom parametri x.

Riešenie:
Toto je typický príklad na ilustráciu použitia Dirichletovho kritéria. Samy sa presvedčte, že dosiaľ používané kritéria (porovnávacie, podielové, odmocninové, Raabeho, integrálne) nie sú v tomto prípade použiteľné :-/. Nech $x \in \mathbb{R}$ je zafixované reálne číslo. V súlade s Dirichletovym kritériom a so zadaním príkladu položme

$$a_n := \sin nx, \qquad b_n := \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Postupnosť $\{b_n\}$ je zrejme monotónna a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Potrebujeme ešte ukázať, že konečný súčet

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx$$

sa dá ohraničiť nezávisle na indexe n (t.j., iba v závislosti na x). Pokúsime sa preto stanoviť jeho hodnotu pre konkrétne n (a pre dané x). Budeme potrebovať klasickú goniometrickú identitu

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \tag{7}$$

platiacu pre každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (jej dôkaz nie je ťažký; stačí si rozsínusovať výrazy na pravej strany a vykonať vhodné úpravy :)). Uvažujme najprv prípad, keď číslo x *nie je celočíselný násobok* 2π, t.j., $x \neq 2l\pi$ pre každé $l \in \mathbb{Z}$. Hodnotu s_n vynásobíme výrazom $\sin\frac{x}{2}$ (všimnime si, že za uvedených predpokladov je $\sin\frac{x}{2} \neq 0$, teda táto úprava je ekvivalentná)

$$s_n \cdot \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{x}{2} \cdot \sin kx.$$

Súčiny $\sin\frac{x}{2}\cdot\sin kx$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, rozpíšeme pomocou identity (7) s voľbou

$$\alpha := \left(k+\frac{1}{2}\right)x, \quad \beta := \left(k-\frac{1}{2}\right)x.$$

Postupne dostaneme

$$\begin{aligned}\sin\frac{x}{2}\cdot\sin kx &= -\frac{1}{2}\cdot\left[\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right].\end{aligned}$$

Po dosadení máme

$$s_n \cdot \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right].$$

Posledná suma je tzv. *teleskopická*, t.j., všetky vnútorné členy sa vzájomne odčítajú a ostane nám len prvý a posledný kosínus

$$
\begin{aligned}
&s_n \cdot \sin\frac{x}{2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{5x}{2} - \cdots\right. \\
&\left.\cdots + \cos\frac{(2n-1)x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right].
\end{aligned}
$$

Na posledný výraz aplikujeme identitu (7) (s $\alpha := x/2$ a $\beta := (2n+1)x/2$), pričom dostaneme (po úpravách)

$$
s_n \cdot \sin\frac{x}{2} = -\sin\left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{(2n+1)x}{2}}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\frac{x}{2} - \frac{(2n+1)x}{2}}{2}\right)
$$

$$
= -\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{-nx}{2}\right) = \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{nx}{2}\right).
$$

Z poslednej rovnosti už vyplýva konečný výraz pre s_n

$$
s_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}.
$$

V prípade, ak $x = 2l\pi$ pre nejaké $l \in \mathbb{Z}$, potom $\sin kx = \sin 2kl\pi = 0$ pre každé $k \in \{1, \ldots, n\}$ (prečo? :)), a teda $s_n = 0$. Pre súčet s_n teda platí finálny výsledok

$$
s_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}, & x \neq 2l\pi, \\ 0, & x = 2l\pi, \end{cases} \qquad l \in \mathbb{Z}.
$$

Pomocou tohto výsledku môžeme teraz odvodiť vhodné ohraničenie pre súčty s_n. Konkrétne, v prípade $x \neq 2l\pi$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ dostávame

$$
|s_n| = \left|\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right| = \frac{\overbrace{\left|\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\right|}^{\text{toto je } \leq 1}\cdot\overbrace{\left|\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right|}^{\text{toto je } \leq 1}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leq \underbrace{\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}}_{\text{nezávisí na } n}.
$$

Prípad $x = 2l\pi$ je triviálny (samy si zdôvodnite :)). Ukázali sme teda, že pre dané $x \in \mathbb{R}$ sú splnené všetky podmienky Dirichletovho kritéria. Preto rad v zadaní príkladu konverguje (nie však nutne absolútne) pre každé reálne x.

Príklad 24 (Abelovo kritérium)
Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n} \cdot \sin n}{n}.$$

Riešenie:
Už na prvý pohľad je vidieť, že i v tomto prípade so základnými kritériami nepochodíme :-/. Položme

$$a_n := \frac{\sin n}{n}, \qquad b_n := \sqrt[n]{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Podľa výsledku z predchádzajúceho príkladu s voľbou $x = 1$, rad $\sum a_n = \sum \frac{\sin n}{n}$ konverguje. Ďalej $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (samy overte :)), teda postupnosť $\{b_n\}$ je ohraničená (prečo? :)). Ostáva overiť monotónnosť postupnosti $\{b_n\}$. Ukážeme, že pre indexy $n \geq 3$ je klesajúca. V Matematickej analýze I sa pri definícii Eulerovho čísla e dokazuje, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Potom pre každé prirodzené $n \geq 3$ máme nerovnosť

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$$

(samy si dobre premyslite :)). Po vhodných úpravách postupne dostaneme

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n,$$

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} < n \qquad / \cdot n^n,$$

$$(n+1)^n < n^{n+1} \qquad /(\cdot)^{\frac{1}{n}},\ (\cdot)^{\frac{1}{n+1}},$$

$$(n+1)^{\frac{1}{n+1}} < n^{\frac{1}{n}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 3.$$

Posledná nerovnosť znamená, že postupnosť $\{b_n\}$ je od indexu 3 klesajúca. Rad v zadaní príkladu teda spĺňa všetky požiadavky Abelovho kritéria, a preto je konvergentný (nie však nutne absolútne).

Nakoniec sa ešte stručne zmienime o niečom, čomu sa hovorí *sila kritéria konvergencie*. Tento pojem úzko súvisí so skutočnosťou, že každé kritérium konvergencie (samozrejme, okrem oslavovaného Cauchyho-Bolzanovho :)) má svoje slabiny, ktoré sa skôr či neskôr predsa len prejavia. Prejavia sa v tom zmysle, že jedného pekného dňa sa objaví taký nekonečný a nekonečne diabolský rad, na ktorom si dané kritérium, dovtedy pyšné a neporaziteľné, vyláme všetky svoje zuby :/. Nuž a – zhruba povedané – sila kritéria spočíva v tom, koľko takýchto pekelníkov dokáže okabátiť :). Hovoríme, že kritérium K_1 je *silnejšie* než kritérium K_2, ak každý rad, ktorý zdoláme (rozumej, o konvergencii/divergencii ktorého vieme rozhodnúť) pomocou kritéria K_2, zdoláme i pomocou kritéria K_1 (dobre si to premyslite :)). Prakticky to ilustrujeme na konkrétnych príkladoch. Je známe, že Cauchyho odmocninové kritérium je silnejšie ako D'Alembertovo podielové kritérium. V Príklade 6 sme konvergenciu radu ukázali pomocou podielového kritéria. Ak na tento rad aplikujeme odmocninové kritérium, dostaneme

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{\varphi(n)}{\sqrt{6^n}}\right|} = \frac{[\varphi(n)]^{1/n}}{\sqrt{6}} = \begin{cases} \frac{2^{1/n}}{\sqrt{6}}, & n \text{ párne}, \\ \frac{6^{2/n}}{\sqrt{6}}, & n \text{ nepárne}. \end{cases}$$

Keďže platí $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1 = \lim_{n\to\infty} 6^{2/n}$, existujú i limity z príslušných vybraných postupností, pričom

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ párne}}} 2^{1/n} = 1 = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ nepárne}}} 6^{2/n}$$

(dôkladne si to premyslite :)). To ale znamená, že existuje i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ a má hodnotu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{[\varphi(n)]^{1/n}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} < 1$$

(i toto si dobre premyslite :)). Teda o konvergencii daného radu vieme rozhodnúť i podľa odmocninového kritéria (samozrejme s odpoveďou, že konverguje

:)). Zoberme si teraz rad z Príkladu 9. O ňom sme pomocou odmocninového kritéria ukázali, že konverguje. Pokúsme sa teraz na tento rad použiť podielové kritérium. Máme (samy overte :))

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n, & n \text{ párne}, \\ \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n, & n \text{ nepárne}. \end{cases}$$

Z toho vyplýva, že

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty, \qquad \liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0,$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \text{ pre každé párne } n, \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \text{ pre každé nepárne } n$$

(samy sa presvedčte :)). Vidíme teda, že nemôžeme použiť ani nelimitné podielové kritérium, a ani limitné podielové kritérium (limita $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ neexistuje, prečo? :)). Chudák D'Alembert je na tento rad jednoducho prikrátky, nevie rozhodnúť, či daný rad konverguje alebo diverguje :(. Vo všeobecnosti sa skutočnosť, že Cauchyho odmocninové kritérium je silnejšie ako D'Alembertovo podielové kritérium, dá dokázať na základe nerovností

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

ktoré platia pre každú nenulovú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (pokúste sa premyslieť si, ako :)). Väčší silák než D'Alembert je i Raabe. Dokonca je niekedy i silnejší ako veľký Cauchy. Zoberme si napríklad celkom nevinný rad z Príkladu 12. Kým D'Alembert i Cauchy ho budú len tak rozpačito požužlávať (samy sa o tom presvedčte ;)), veľký kápo Raabe ho zhltne ako jednohubku, ako sme toho boli svedkami :). Avšak karta sa môže i obrátiť. Z duelu v Príklade 10 vyjde z našich troch mušketierov víťazne jedine Cauchy, Raabe a D'Alembert odídu s dlhými nosmi :). Skutočne, pre tento rad totiž máme (samy overte :))

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2^{2\cdot(-1)^n+1}} = \begin{cases} \frac{1}{8}, & n \text{ párne}, \\ 2, & n \text{ nepárne}. \end{cases}$$

Z toho potom dostávame (rovnako overte samy :))

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2, \quad \liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{8}, \quad \text{teda } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{ neexistuje.}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \text{ pre každé párne } n, \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \text{ pre každé nepárne } n.$$

Nemôžeme preto použiť žiadnu z verzií D'Alembertovho kritéria. Ďalej

$$\limsup_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \infty, \qquad \liminf_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = -\infty,$$

$$\text{a teda } \lim_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) \text{ neexistuje.}$$

$$n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) > 1 \text{ pre každé párne } n,$$

$$n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) < 1 \text{ pre každé nepárne } n.$$

Zlyháva teda i Raabeho kritérium.

Neriešené príklady

1. Pomocou vhodného kritéria vyšetrite konvergenciu daných radov.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n+1}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{3^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n\left(\frac{1}{n}\right)$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^{n+1}}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{2n-1}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\sqrt{3}}}$ o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/\pi}}$

p) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{n^2}{2^n}$ q) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n+\frac{1}{n}\right)\pi$ r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(2n+1)}$.

2. Zistite, ktoré rady konvergujú absolútne/neabsolútne.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{6^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{1}{4^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n-\ln n}$.

3. Vyšetrite konvergenciu radov v závislosti na reálnom parametri x.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2 x}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\mathrm{e}^{nx}}$.

4. Pomocou integrálneho kritéria preskúmajte konvergenciu tzv. *zovšeobecneného harmonického radu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

v závislosti na reálnom exponente p.

5. Dokážte divergenciu radu v Príklade 13 využitím odhadu

$$n! \leq \mathrm{e} \cdot \sqrt{n} \cdot (n/\mathrm{e})^n,$$

platiacom pre každé $n \in \mathbb{N}$, a výsledku z predchádzajúcej úlohy.

6. Pomocou Raabeho kritéria vyšetrite konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\right)^2.$$

Zároveň ukážte, že D'Alembert je na tento rad prikrátky :).

7. Presvedčte sa, že s harmonickým radom si podielový D'Alembert ani odmocninový Cauchy nevedia rady. Zároveň ukážte, že ho napokon zmákne Raabe, ale bude to tak nadoraz :).

8. Vyšetrením vhodných číselných radov dokážte dané rovnosti.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(4n)!} = 0$.

9. Pomocou Dirichletovho kritéria ukážte, že alternujúci rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konverguje (v zhode s výsledkom Príkladu 19).

10.* Okrem odmocninového a integrálneho kritéria pochádza od Cauchy i ďalšie zaujímavé kritérium konvergencie radov. V anglicky písanej literatúre sa označuje ako *Cauchy condensation test* a hovorí toto. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nezáporná a nerastúca postupnosť reálnych čísiel. Potom

$$\text{rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje práve vtedy, keď konverguje rad } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

(symbol a_{2^n} označuje člen uvažovanej postupnosti s indexom 2^n). Naviac, v prípade konvergencie oboch radov platia pre ich súčty

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad S := \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

nerovnosti $S/2 \leq s \leq S$. Pomocou tohto kritéria vyšetrite konvergenciu zovšeobecneného harmonického radu z úlohy 4. v závislosti na exponente p. V prípade konvergencie radu odhadnite aj jeho súčet.

11.* Nech $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov harmonického radu $\sum \frac{1}{n}$. Pomocou poznatku, že existuje vlastná limita

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - \ln n)$$

(pozri do úvodných statí), dokážte divergenciu harmonického radu. *Výzva pre odvážlivcov:* Pokúste sa dokázať existenciu uvedenej limity :). (Nebojte sa do toho pustiť :). S tým, čo doteraz z matematiky viete, si bohate vystačíte. Pozorne si prečítajte pokec v úvode k tomuto problému, je v ňom skrytý návod, ako na to ;).)

12.* Nech $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť všetkých *prvočísiel*, t.j.,

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 7, \quad p_5 = 11, \quad \ldots.$$

O tejto postupnosti platí výsledok slávnej tzv. *prvočíselnej vety*, ktorý predpovedal už 15-ročný budúci princ matematiky C. F. Gauss a ktorý takmer o sto rokov neskôr nezávisle na sebe dokázali matematici J. Hadamard a Ch. J. de la Valleé-Poussin :). Konkrétne, platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n \ln n} = 1.$$

Pomocou tohto poznatku dokážte divergenciu nekonečného radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots.$$

Tento rad má mnoho zaujímavých vlastností. Napríklad významná *Mertensova veta* (presnejšie, *druhá Mertensova veta*) hovorí, že limita

$$M := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} - \ln \ln n \right)$$

existuje a je konečná :). Reálne číslo M sa nazýva *Meisselova–Mertensova konštanta* a má približnú hodnotu

$$M \approx 0.2614972128476427837554268386086958590516\ldots.$$

Premyslite si, že i tento výsledok ukazuje divergenciu daného radu.

13.* Pomocou vhodného kritéria rozhodnite o konvergencii radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$.

14.* Dokážte, že nasledujúce tvrdenie je dôsledkom Abelovho kritéria.

Ak rad $\sum a_n$ konverguje, potom i rad $\sum \sqrt[n]{n} \cdot a_n$ konverguje.

Inšpirujte sa výsledkom a postupom v Príklade 24 ;).

15.** Vyšetrite konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}.$$