Príklady na precvičovanie – súčty a súčiny číselných radov

Riešené príklady

Príklad 1

Nájdime súčet radu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{3^n}.$$

Riešenie:

Uvedený rad je geometrický, nakoľko pre každé $n\in\mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(-1)^n\cdot\frac{2}{3^{n+1}}}{(-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{3^n}}=-\frac{1}{3}.$$

Kvocient tohto radu je $q=-1/3$ a prvý člen $a_1=2/3$. Preto sa jedná o konvergentný rad (prečo? :)) so súčtom

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{3^n}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{2}.$$

Príklad 2

Stanovme súčet radu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}.$$

Riešenie:

Predložený rad zrejme vznikol súčtom radov

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{6^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\qquad\text{a}\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{6^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Obidva rady sú konvergentné so súčtami

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\qquad\text{a}\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{3}{2}$$

(samy sa presvedčte :)). Preto aj rad v zadaní príkladu – ako ich súčet – je konvergentný a platí

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$

Príklad 3

Určme súčet radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^{2n}}.$$

Riešenie:

Pomocou podielového kritéria ľahko zistíme, že sa jedná o konvergentný rad (samy overte :)). Pokúsime sa nájsť explicitné vyjadrenie jeho n-tého čiastočného súčtu s_n, $n \in \mathbb{N}$. Platí

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{5^{2k}} = \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^4} + \frac{3}{5^6} + \cdots + \frac{n}{5^{2n}}.$$

Pre výraz $s_n/5^2$ potom máme

$$\frac{s_n}{5^2} = \frac{1}{5^2} \cdot \left(\frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^4} + \frac{3}{5^6} + \cdots + \frac{n}{5^{2n}} \right) = \frac{1}{5^4} + \frac{2}{5^6} + \frac{3}{5^8} + \cdots + \frac{n}{5^{2n+2}}.$$

Utvorme teraz rozdiel $s_n - s_n/5^2$. Keďže sa jedná o *konečné* súčty, môžeme ich členy vhodne zoskupiť, konkrétne

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
s_n & = & \frac{1}{5^2} & + & \frac{2}{5^4} & + & \frac{3}{5^6} & + & \frac{4}{5^8} & + & \frac{5}{5^{10}} & + & \cdots & + & \frac{n}{5^{2n}} & & \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
\frac{s_n}{5^2} & = & & & \frac{1}{5^4} & + & \frac{2}{5^6} & + & \frac{3}{5^8} & + & \frac{4}{5^{10}} & + & \cdots & + & \frac{n-1}{5^{2n}} & + & \frac{n}{5^{2n+2}} \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
s_n - \frac{s_n}{5^2} & = & \frac{1}{5^2} & + & \frac{1}{5^4} & + & \frac{1}{5^6} & + & \frac{1}{5^8} & + & \frac{1}{5^{10}} & + & \cdots & + & \frac{1}{5^{2n}} & - & \frac{n}{5^{2n+2}}.
\end{array}$$

Z poslednej rovnosti dostávame (samy overte :))

$$s_n \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) = \left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{5^{10}} + \cdots + \frac{1}{5^{2n}} \right) - \frac{n}{5^{2n+2}}$$

$$\Downarrow$$

$$s_n \cdot \frac{24}{25} = \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{5^{2n}}}{1 - \frac{1}{5^2}} - \frac{n}{5^{2n+2}}$$

$$\Downarrow$$

$$s_n = \frac{25}{24^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{25^n}\right) - \frac{1}{24} \cdot \frac{n}{25^n}.$$

Získali sme teda explicitné vyjadrenie n-tého čiastočného súčtu s_n pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$. Pre súčet radu v zadaní potom platí (samy overte :))

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^{2n}} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{25}{24^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{25^n}\right) - \frac{1}{24} \cdot \frac{n}{25^n}\right] = \frac{25}{576}.$$

Príklad 4

Zistime súčet radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Riešenie:

Pri riešení využijeme pozorovanie

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Jeho príjemným dôsledkom je fakt, že vo výraze pre s_n sa všetky vnútorné členy vzájomne odčítajú (dobre si to premyslite :)). Postupne dostávame

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}.$$

Vidíme teda, že rad v zadaní je konvergentný so súčtom

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Príklad 5

Napíšme racionálne číslo $0.4\overline{90}$ v tvare zlomku.

Riešenie:

Toto je známy a populárny príklad zo strednej školy :). Je známe, že každé reálne číslo s periodickým desatinným rozvojom je racionálne. Pointa je v prepísaní uvedeného desatinného rozvoja pomocou nekonečného geometrického radu. Postupne dostávame (detaily si premyslite samy :))

$$0.4\overline{90} = 0.490909090... = \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^6} + \frac{9}{10^8} + \cdots$$
$$= \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \cdots\right) = \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{27}{55}.$$

Príklad 6

Zostrojme rad, ktorého n-tý čiastočný súčet s_n má pre každé $n \in \mathbb{N}$ tvar

$$s_n = \frac{n-2}{2n}.$$

Riešenie:

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je predpokladaný rad. Zrejme $a_1 = s_1 = -1/2$. Na určenie ostatných členov a_n využijeme skutočnosť

$$a_n = s_n - s_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

(dobre si to premyslite :)). Pre $n \geq 2$ teda dostávame (po úpravách)

$$a_n = \frac{n-2}{2n} - \frac{(n-1)-2}{2(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Rad hľadaný v zadaní príkladu má preto tvar

$$-\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}.$$

Príklad 7
Dokážme, že platí

$$\ln 3 + \ln \sqrt{3} + \ln \sqrt[4]{3} + \ln \sqrt[8]{3} + \ln \sqrt[16]{3} + \cdots = 2 \ln 3.$$

Riešenie:
Pre n-tý čiastočný súčet uvedeného radu platí

$$s_n = \ln 3 + \ln \sqrt{3} + \ln \sqrt[4]{3} + \ln \sqrt[8]{3} + \cdots + \ln \sqrt[2^n]{3}.$$

Využitím základných vlastností logaritmov a mocnín postupne dostávame

$$s_n = \ln \left(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} \cdots 3^{\frac{1}{2^n}} \right) = \ln \left(3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}} \right).$$

Súčet v poslednom výraze je konečný geometrický s hodnotou

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

To potom znamená, že $s_n = \ln \left(3^{2-\frac{1}{2^n}} \right)$, a následne

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \ln 3^2 = 2 \ln 3.$$

Platí teda identita v zadaní príkladu.

Príklad 8
Určme súčet nekonečného radu

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \operatorname{arctg} \frac{1}{18} + \operatorname{arctg} \frac{1}{32} + \cdots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} + \cdots.$$

Riešenie:
Hlavným fígľom na riešenie tohto príkladu je trigonometrická identita

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy},$$

ktorá platí pre každú dvojicu reálnych čísiel $x, y \in (-1, 1)$ (pokúste sa ju dokázať :)). Skúsme pomocou tejto rovnosti vyjadriť n-tý čiastočný súčet s_n radu v zadaní pre niekoľko prirodzených hodnôt n. Postupne dostávame

$$s_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{1+1},$$

$$s_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}} = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} = \operatorname{arctg}\frac{2}{2+1},$$

$$\begin{aligned} s_3 &= \underbrace{\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}}_{s_2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} \\ &= \operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \operatorname{arctg}\frac{3}{3+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= \underbrace{\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18}}_{s_3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{32} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{32} \\ &= \operatorname{arctg}\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{32}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{32}} = \operatorname{arctg}\frac{4}{5} = \operatorname{arctg}\frac{4}{4+1}, \end{aligned}$$

$$\vdots$$

Z týchto pozorovaní môžeme nadobudnúť podozrenie, že všeobecný n-tý čiastočný súčet s_n by mohol mať tvar

$$s_n \overset{?}{=} \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}.$$

Dokážeme to – ako inak :) – metódou matematickej indukcie. Zrejme pre $n = 1$ uvedená rovnosť platí. Predpokladajme, nech daná rovnosť je správna pre nejakú hodnotu $n = m$, t.j., predpokladáme, že platí

$$s_m = \operatorname{arctg}\frac{m}{m+1}.$$

Pre súčet s_{m+1} potom máme

$$s_{m+1} = s_m + a_{m+1} = \operatorname{arctg} \frac{m}{m+1} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2(m+1)^2}.$$

Využitím identity pre arkustangensy v úvode príkladu dostaneme (samy overte, že ju skutočne môžeme použiť :))

$$s_{m+1} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{m}{m+1} + \frac{1}{2(m+1)^2}}{1 - \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{2(m+1)^2}} = \operatorname{arctg} \frac{2m(m+1)^2 + (m+1)}{2(m+1)^3 - m}$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{[m+1] \cdot [2m(m+1)+1]}{2(m+1)(m+1)^2 - m} = \operatorname{arctg} \frac{[m+1] \cdot [2m(m+1)+1]}{2(m+1)(m^2+2m+1) - m}$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{[m+1] \cdot [2m(m+1)+1]}{2(m+1) \cdot [m^2+2m] + 2(m+1) - m}$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{[m+1] \cdot [2m(m+1)+1]}{2(m+1)m \cdot [m+2] + [m+2]} = \operatorname{arctg} \frac{[m+1] \cdot [2m(m+1)+1]}{[m+2] \cdot [2m(m+1)+1]}$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{m+1}{m+2} = \operatorname{arctg} \frac{m+1}{(m+1)+1}.$$

Takže predpokladaná rovnosť potom platí i pre $n = m+1$. Overili sme teda, že postupnosť s_n spĺňa

$$s_n = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}.$$

Nakoľko ďalej máme

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} = \frac{\pi}{4},$$

rad v zadaní príkladu je konvergentný so súčtom $s = \pi/4$.

Príklad 9
Stanovme súčet radu

$$p\sin\alpha + p^2\sin 2\alpha + p^3\sin 3\alpha + \cdots + p^n\sin n\alpha + \cdots$$

v závislosti na reálnych parametroch α a p, pričom $|p| < 1$.

Riešenie:
Budeme postupovať analogicky ako v predchádzajúcom príklade. Pokúsime sa odvodiť explicitný tvar n-tého čiastočného súčtu s_n daného radu pre ľubovoľné prirodzené n. Existuje viacero spôsobov ako na to. My opäť využijeme jednu trigonometrickú identitu, konkrétne

$$2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y),$$

ktorá platí pre každú dvojicu reálnych čísiel x, y (samy overte jej platnosť :)). Nech α, p, $|p| < 1$, sú dané a nech $p \neq 0$ a $\alpha \neq (2l-1)\pi/2$ pre každé $l \in \mathbb{Z}$ (posledná podmienka znamená, že číslo α nie je celistvým nepárnym násobkom $\pi/2$). Pre $n \in \mathbb{N}$ platí

$$s_n = p\sin\alpha + p^2\sin 2\alpha + \cdots + p^n\sin n\alpha.$$

Túto rovnosť vynásobíme výrazom $2p\cos\alpha$ ($p\cos\alpha \neq 0$ vďaka podmienkam kladeným na p a α :)), pričom dostaneme

$$2ps_n\cos\alpha = p^2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + p^3\cdot 2\sin 2\alpha\cos\alpha + \cdots + p^{n+1}\cdot 2\sin n\alpha\cos\alpha.$$

Členy na pravej strane poslednej rovnosti postupne prepíšeme pomocou úvodnej trigonometrickej identity a následne všetky vertikálne sčítame. Tak s chuťou do toho :)

$$\begin{array}{lcllcl}
p^2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha & = & p^2\cdot\sin 2\alpha & & + & p^2\cdot\sin 0\cdot\alpha \\
p^3\cdot 2\sin 2\alpha\cos\alpha & = & p^3\cdot\sin 3\alpha & & + & p^3\cdot\sin\alpha \\
p^4\cdot 2\sin 3\alpha\cos\alpha & = & p^4\cdot\sin 4\alpha & & + & p^4\cdot\sin 2\alpha \\
p^5\cdot 2\sin 4\alpha\cos\alpha & = & p^5\cdot\sin 5\alpha & & + & p^5\cdot\sin 3\alpha \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots \\
p^{n+1}\cdot 2\sin n\alpha\cos\alpha & = & p^{n+1}\cdot\sin(n+1)\alpha & & + & p^{n+1}\cdot\sin(n-1)\alpha \\
\downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\
s_n\cdot 2p\cos\alpha & = & \left[s_n - p\cdot\sin\alpha + p^{n+1}\cdot\sin(n+1)\alpha\right] & & + & p^2\cdot[s_n - p^n\cdot\sin n\alpha]
\end{array}$$

Samy si dobre premyslite výsledné súčty druhého a tretieho stĺpca :). Odvodili sme teda identitu

$$s_n \cdot 2p\cos\alpha = \big[s_n - p\cdot\sin\alpha + p^{n+1}\cdot\sin(n+1)\alpha\big] + p^2\cdot[s_n - p^n\cdot\sin n\alpha]\,,$$

Z nej pre n-tý čiastočný súčet s_n platí

$$s_n = \frac{p^{n+2}\sin n\alpha - p^{n+1}\sin(n+1)\alpha + p\sin\alpha}{1-2p\cos\alpha+p^2}.$$

Nechávame na čitateľa, aby overil, že toto vyjadrenie pre s_n ostane v platnosti aj v prípade $p=0$, resp. $\alpha=(2l-1)\pi/2$ pre nejaké celé l :). Nakoniec, využijúc predpoklad $|p|<1$, máme

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\frac{p^{n+2}\sin n\alpha - p^{n+1}\sin(n+1)\alpha + p\sin\alpha}{1-2p\cos\alpha+p^2} = \frac{p\sin\alpha}{1-2p\cos\alpha+p^2}$$

(samy overte :)). To znamená, že rad v zadaní je konvergentný pre každé prípustné parametre α, p, pričom

$$p\sin\alpha + p^2\sin 2\alpha + p^3\sin 3\alpha + \cdots = \frac{p\sin\alpha}{1-2p\cos\alpha+p^2}.$$

Príklad 10 (ťažší)

Zistime súčet Leibnizovho radu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots.$$

Riešenie:

Nájdenie súčtu Leibnizovho alternujúceho radu je jeden zo slávnych výsledkov teórie nekonečných číselných radov. Konkrétne, platí elegantná identita

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots = \ln 2 \quad :)).$$

V nasledujúcich riadkoch sa ju pokúsime dokázať. Predložený dôkaz je založený na jednom pozorovaní o harmonickom rade, ktoré sme uviedli v predchádzajúcom dokumente o konvergencii radov, a síce, že limita

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right] \quad \text{existuje konečná.}$$

Jej hodnota sa nazýva Eulerova–Mascheroniho konštanta a označili sme ju γ. To, koľko presne je γ, teraz nebude podstatné. Zavedieme označenie

$$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad \text{a} \qquad E_n := H_n - \ln n$$

pre každé $n \in \mathbb{N}$. Zrejme platí $H_n = E_n + \ln n$ a $\lim_{n\to\infty} E_n = \gamma$ (samy sa presvedčte :)). Stratégia nášho dôkazu je taká, že sa budeme snažiť vyjadriť čiastočné súčty Leibnizovho radu pomocou veličín H_n. Najprv preskúmame súčty s *párnym* počtom členov. Teda napríklad

$$s_8 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}.$$

Keďže ide o konečný súčet, môžeme jeho členy vhodne preskupiť. Konkrétne,

$$s_8 = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right).$$

Pre súčet v druhej zátvorke platí

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot H_4,$$

kým súčet v prvej zátvorke sa dá napísať takto

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) \\ &= H_7 - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = H_7 - \frac{1}{2} \cdot H_3. \end{aligned}$$

Celkovo teda máme

$$s_8 = H_7 - \frac{1}{2} \cdot H_3 - \frac{1}{2} \cdot H_4.$$

Pomocou tohto konkrétneho príkladu si samy premyslite, že všeobecný párny čiastočný súčet s_{2n}, $n \in \mathbb{N}$, Leibnizovho radu sa dá napísať v tvare

$$s_{2n} = H_{2n-1} - \frac{1}{2} \cdot H_{n-1} - \frac{1}{2} \cdot H_n.$$

Podobne sa postupuje i pre nepárne čiastočné súčty. Napríklad

$$s_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$$

$$= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right)}_{H_9 - \frac{1}{2}\cdot H_4} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{2}\cdot H_4} = H_9 - H_4.$$

Všeobecne, pre čiastočný súčet s_{2n-1}, $n \in \mathbb{N}$, dostaneme (samy overte :))

$$s_{2n-1} = H_{2n-1} - H_{n-1}.$$

Máme teda pod kontrolou ľubovoľný čiastočný súčet radu v zadaní príkladu. Do získaných výrazov dosadíme za súčty H_n vyjadrenia pomocou logaritmu a postupnosti E_n (pozri vyššie :)). Postupne dostávame (po úpravách)

$$s_{2n} = H_{2n-1} - \frac{1}{2} \cdot H_{n-1} - \frac{1}{2} \cdot H_n$$

$$= [E_{2n-1} + \ln(2n-1)] - \frac{1}{2} \cdot [E_{n-1} + \ln(n-1)] - \frac{1}{2} \cdot [E_n + \ln n]$$

$$= \ln(2n-1) - \frac{1}{2} \cdot \ln(n-1) - \frac{1}{2} \cdot \ln n + E_{2n-1} - \frac{1}{2} \cdot E_{n-1} - \frac{1}{2} \cdot E_n$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln\left[\frac{(2n-1)^2}{n(n-1)}\right] + E_{2n-1} - \frac{1}{2} \cdot E_{n-1} - \frac{1}{2} \cdot E_n,$$

$$s_{2n-1} = H_{2n-1} - H_{n-1} = [E_{2n-1} + \ln(2n-1)] - [E_{n-1} + \ln(n-1)]$$

$$= \ln(2n-1) - \ln(n-1) + E_{2n-1} - E_{n-1} = \ln\left[\frac{2n-1}{n-1}\right] + E_{2n-1} - E_{n-1}.$$

A teraz prichádzame k vrcholu :). Získané vyjadrenia pre s_{2n} a s_{2n-1} vieme *limitovať* pre $n \to \infty$. Celý fígeľ spočíva v tom, že $\lim_{k\to\infty} E_k = \gamma$:). Teda

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{2} \cdot \ln\left[\frac{(2n-1)^2}{n(n-1)}\right] + E_{2n-1} - \frac{1}{2} \cdot E_{n-1} - \frac{1}{2} \cdot E_n\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln\left[\frac{4}{1}\right] + \gamma - \frac{1}{2} \cdot \gamma - \frac{1}{2} \cdot \gamma = \ln 2 \quad :),$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \left\{\ln\left[\frac{2n-1}{n-1}\right] + E_{2n-1} - E_{n-1}\right\}$$

$$= \ln\left[\frac{2}{1}\right] + \gamma - \gamma = \ln 2 \qquad :).$$

Obidve limity vyšli rovnaké (všimnime si, že vôbec nezávisia na hodnote konštanty γ :)). Nechávame na čitateľa, aby si premyslel, že táto skutočnosť potom implikuje existenciu $\lim_{n\to\infty} s_n$ s hodnotou $\ln 2$:). Rad v zadaní príkladu je teda konvergentný so súčtom $\ln 2$.

V predchádzajúcich príkladoch sme ukázali niekoľko techník, ktoré je možné niekedy použiť pri výpočte súčtu nekonečného konvergentného radu. Častokrát boli založené na nejakom chytrom nápade, prekvapivom obrate alebo vhodnej identite. Všeobecná metóda ako na to však neexistuje. A bohužiaľ, vo väčšine prípadov ani prakticky nie je v našich silách niečo podobné prevádzať, hoci príslušný rad môže mať konečný súčet :((v princípe to možné je, ale mnohokrát to vyžaduje obriu dávku fantázie a intuície, ktorú dostávajú do daru len ojedinelí jedinci :)). Napríklad o nasledujúcich radoch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

nie je problém rozhodnúť o ich konvergencii (samy ukážte, že všetky sú konvergentné :)). Nájsť presné hodnoty ich súčtov pomocou elementárnych metód je však pomerne komplikované. Na ich stanovenie sa zvyčajne využíva aparát teórie *funkcionálnych radov*, kde namiesto čísiel sčítavame funkcie (hrubo povedané :)). Obzvlášť veľký význam majú *mocninové rady* (sčítavame mocninové funkcie) a *trigonometrické (Fourierove) rady* (sčítavame trigonometrické funkcie sínus a kosínus). Pomocou týchto pokročilejších metód neskôr ukážeme, že platia identity

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\pi\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\pi}+1}{\mathrm{e}^{2\pi}-1} - 1\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}.$$

V mnohých prípadoch však ani nepotrebujeme poznať presný súčet nekonečného radu a uspokojíme sa iba s jeho približnou hodnotou. Prakticky to znamená, že namiesto sumovania celého nekonečného radu sčítame iba konečný počet jeho členov. Je však dôležité mať pod kontrolou chybu, akej sa pri tejto pokútnej činnosti dopúštame :). Meriame ju pomocou tzv. zvyšku radu. Konkrétne, ak $\sum a_n$ je konvergentný rad so súčtom s a s_n je jeho n-tý čiastočný súčet, potom číslo

$$R_n := s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

sa nazýva *zvyšok radu po n-tom člene*. Veličina $|R_n|$ vyjadruje chybu, akej sa dopúštame, keď presný súčet s aproximujeme n-tým čiastočným sučtom s_n. Zrejme $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, t.j., čím viac členov sčítame, tým presnejší výsledok môžeme očakávať. Existuje veľa spôsobov, ako odhadnúť chybu R_n bez informácie presnej hodnoty súčtu s (keď poznáme s, tak je zrejme bezpredmetné piplať sa s nejakými aproximáciami :)). Mnohé z nich využívajú kritériá konvergencie radov.

Odhad $|R_n|$ na základe porovnávacieho kritéria

Nech $\sum a_n$ a $\sum b_n$ sú konvergentné rady, pričom nech $b_n \geq 0$ a $|a_n| \leq b_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Ak R_n je zvyšok po n-tom člene radu $\sum a_n$ a r_n zvyšok po n-tom člene radu $\sum b_n$, potom platí $|R_n| \leq r_n$.

Odhad $|R_n|$ pre alternujúci rad

Nech $\sum(-1)^{n-1} a_n$ je alternujúci rad, kde $\{a_n\}$ je kladná nerastúca postupnosť s $\lim a_n = 0$ (daný rad teda konverguje na základe Leibnizovho kritéria). Pre zvyšok R_n po n-tom člene tohto radu potom platí $|R_n| < a_{n+1}$.

Odhad $|R_n|$ na základe podielového kritéria

Nech pre rad $\sum a_n$ existuje kladné reálne číslo $q < 1$ s vlastnosťou

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}$$

(daný rad teda konverguje absolútne na základe podielového kritéria :)). Pre zvyšok R_n po n-tom člene tohto radu potom platí

$$|R_n| \leq |a_n| \cdot \frac{q}{1-q}.$$

Odhad $|R_n|$ na základe integrálneho kritéria

Nech $\sum a_n$ je konvergentný rad a nech existuje funkcia f, ktorá je definovaná, nezáporná a nerastúca na intervale $[1, \infty)$, a ktorá spĺňa $f(n) = a_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Pre zvyšok R_n po n-tom člene tohto radu potom platí

$$|R_n| \leq \int_n^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Použitie týchto odhadov ilustrujeme na niekoľkých príkladoch.

Príklad 11

Zistime, koľko prvých členov radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

musíme sčítať, aby sme jeho súčet aproximovali s chybou menšou než 10^{-2}.

Riešenie:

Na overenie konvergencie predloženého radu je zrejme vhodné podielové kritérium. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot 2^n}}\right| = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\text{toto je } <1} < \frac{1}{2}.$$

Posledná nerovnosť nám poskytuje hneď dve informácie. Rad v zadaní konverguje (samy overte :)) a pre dané n zvyšok R_n spĺňa (zoberieme $q = 1/2$)

$$|R_n| < \left|\frac{1}{n \cdot 2^n}\right| \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

Chceme, aby $|R_n| < 10^{-2}$. Na základe odvodenej nerovnosti pre $|R_n|$ to znamená, že na toto *stačí*, aby

$$\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq 10^{-2}$$

(dobre si to premyslite :)). Prirodzené čísla n, ktoré vyhovujú tejto nerovnosti potom udávajú, koľko prvých členov radu musíme sčítať, aby sme boli v predpísaných medziach presnosti. Samy ukážte, že je nutné sčítať aspoň $n = 5$ prvých členov radu. Rad v zadaní má teda súčet s približnou hodnotou

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} \approx \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \frac{661}{960} \approx 0.6885.$$

Neskôr odvodíme, že presná hodnota súčtu je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln 2 \approx 0.6932.$$

Poznamenajme, že získaný počet $n = 5$ členov radu nemusí byť nutne *optimálny*. Môže sa totiž stať, že i súčet prvých trebárs 4 členov aproximuje presný súčet radu s chybou menšou než 10^{-2}.

Príklad 12

Odhadnime súčet radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

s chybou menšou než 10^{-2}.

Riešenie:

V tomto prípade sa ukazuje vhodné použiť odhad zvyšku na základe integrálneho kritéria. Overenie konvergencie a ďalšie podrobnosti nechávame na čitateľa :). Pre zvyšok R_n po n-tom člene daného radu potom platí

$$|R_n| \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3n^3} < 10^{-2}.$$

Aby sme mali istotu, že posledná nerovnosť bude splnená, stačí sčítať prvých $n = 4$ členov (samy overte :)). Máme teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \approx \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n^4} = \frac{22369}{20736} \approx 1.07875193.$$

Je zaujímavé porovnať tento výsledok s presnou hodnotou súčtu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \approx 1.08232323 \quad :).$$

Príklad 13
Odhadnime súčet radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

s chybou menšou než 10^{-2}.

Riešenie:
Využitím nerovnosti

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} < \frac{1}{n^4},$$

ktorá platí pre každé prirodzené n (samy overte :)), môžeme zvyšok R_n radu v zadaní príkladu odhadnúť na základe porovnávacieho kritéria a výsledku v predchádzajúcom príklade. Konkrétne, ak r_n označuje zvyšok radu z Príkladu 12, potom platí $|R_n| \leq r_n < 10^{-2}$. Ukázali sme, že $r_n \leq 1/3n^3$, a preto uvažujeme nerovnosť $1/3n^3 < 10^{-2}$. Podľa výsledku v predchádzajúcom príklade platí $n \geq 4$. Máme teda odhad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \approx \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{17}{315} \approx 0.05397.$$

Presná hodnota súčtu je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{18} \approx 0.05556$$

(samy sa pokúste ukázať na základe spôsobu riešenia Príkladu 4 :)).

Príklad 14
Zistime, koľko prvých členov alternujúceho radu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n}{n!}$$

musíme sčítať, aby sme sa dopustili chyby menšej než 10^{-3}.

Riešenie:
Postupnosť $a_n = 2^n/n!$ je iste nezáporná a naviac i nerastúca, nakoľko pre každé prirodzené n platí

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \underbrace{\frac{2}{n+1}}_{\text{toto je } \leq 1} \cdot \underbrace{\frac{2^n}{n!}}_{a_n} \leq a_n.$$

Okrem toho $\lim_{n\to\infty} 2^n/n! = 0$ (samy overte :)). Preto pre príslušný zvyšok R_n radu máme odhad

$$|R_n| < \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-3}.$$

Ten správny počet členov, ktoré stačí sčítať, teda spĺňa nerovnosť

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \geq 1000.$$

Samy sa presvedčte, že toto je splnené pre každé $n \geq 9$, a že v tomto prípade má súčet radu približnú hodnotu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n}{n!} \approx \sum_{n=1}^{9}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n}{n!} = \frac{2452}{2853} \approx 0.864903.$$

Poznamenajme, že presná hodnota súčtu je

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n}{n!} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2} \approx 0.864665.$$

V nasledujúcom sa dotkneme problematiky *prerovnávania* (*premiestňovania*) nekonečných radov. Prerovnať nejaký rad znamená zapísať, resp. sčítať jeho členy v inom poradí. Prerovnaním daného radu teda vznikne nový nekonečný rad. Vtip je v tom, že prerovnaný rad sa z hľadiska konvergencie *nemusí* správať rovnako ako pôvodný rad. Pri nekonečných sumách totiž nie vždy platí *komutatívny zákon*, taký samozrejmý pre konečné súčty. Konkrétne, komutativitu môžeme vo všeobecnosti aplikovať *iba pre absolútne konvergentné rady*. O tom, ako sa pri prerovnávaní správajú *neabsolútne konvergentné rady*, hovorí slávna *Riemannova veta*.

Riemannova veta o prerovnaní neabsolútne konvergentného radu

Nech $\sum a_n$ je neabsolútne konvergentný rad. Potom pre každé reálne číslo $r \in \mathbb{R}$ je možné členy a_n prerovnať tak, aby nový rad bol konvergentný so súčtom r. Okrem toho členy a_n možno prerovnať i tak, aby nový rad divergoval k $\pm\infty$, resp., aby vôbec nemal súčet (t.j., aby osciloval).

Tvrdenie Riemannovej vety si ilustrujeme na prípade Leibnizovho alternujúceho radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots.$$

O ňom sme v Príklade 10 dokázali, že je konvergentný so súčtom $\ln 2$. Nie je ťažké ukázať, že táto konvergencia je neabsolútna (samy overte :)). V nasledujúcich troch príkladoch postupne zostrojíme tri prerovnania Leibnizovho radu, zakaždým však s iným výsledkom :). Prvé prerovnanie bude konvergovať (nie však k $\ln 2$), druhé prerovnanie bude divergovať k ∞ a tretie prerovnanie vôbec nebude mať súčet (bude oscilovať).

Príklad 15 (ťažší)
Ukážme, že platí identita

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{3}{2} \ln 2.$$

Riešenie:
Zo zadania je zrejme jasné, podľa akého pravidla je daný rad konštruovaný. Konkrétne, máme takúto schému

$$\overbrace{\underbrace{1+\frac{1}{3}}_{2}\ \underbrace{-\frac{1}{2}}_{1}}^{1.\ \text{blok}}\ \Big|\ \overbrace{\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}_{2}\ \underbrace{-\frac{1}{4}}_{1}}^{2.\ \text{blok}}\ \Big|\ \overbrace{\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{11}}_{2}\ \underbrace{-\frac{1}{6}}_{1}}^{3.\ \text{blok}}\ \Big|\ \overbrace{\underbrace{\frac{1}{13}+\frac{1}{15}}_{2}\ \underbrace{-\frac{1}{8}}_{1}}^{4.\ \text{blok}}\ \Big|\ \overbrace{\underbrace{\frac{1}{17}+\frac{1}{19}}_{2}\ \underbrace{-\frac{1}{10}}_{1}}^{5.\ \text{blok}}\ \Big|\ \dots .$$

Vidíme, že rad je tvorený blokmi $2+1$, t.j., 2 zlomky, ktoré majú po sebe idúce nepárne menovatele, a 1 zlomok s párnym menovateľom. Okrem toho, každý nasledujúci blok z hľadiska svojich členov prirodzene nadväzuje na predchádzajúci blok. Nie je ťažké ukázať, že v poradí n-tý blok, $n \in \mathbb{N}$, pozostáva zo zlomkov

$$\overbrace{\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}}^{n-\text{tý blok}}$$

(samy si premyslite :)). Je zrejmé, že predložený rad vznikol prerovnaním Leibnizovho alternujúceho radu (i toto si samy overte :)). Bloková štruktúra radu nás motivuje sčítavať postupne *celé bloky*, teda pozerať sa na čiastočné súčty s_{3n} prvých $3n$ členov, $n \in \mathbb{N}$. Súčet s_{3n} bude zrejme suma prvých n blokov. Dobre si premyslite, že v súčte s_{3n} budeme sčítavať tieto zlomky s nepárnymi menovateľmi

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \dots,\ \frac{1}{4n-3},\ \frac{1}{4n-1},$$

a tieto zlomky s párnymi menovateľmi

$$-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ -\frac{1}{10},\ \dots,\ -\frac{1}{2n-2},\ -\frac{1}{2n}.$$

Keďže s_{3n} je *konečný*, môžeme sčítance vhodne združiť. Platí potom

$$s_{3n} = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{4n-1}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2n}\right).$$

Vďaka poslednej rovnosti vieme súčet s_{3n} vyjadriť vo vhodnom tvare. Pomocou techniky použitej v Príklade 10 samy overte, že platí

$$s_{3n} = H_{4n-1} - \frac{1}{2}\cdot H_{2n-1} - \frac{1}{2}\cdot H_n \qquad :).$$

Tento výraz sa dá prepísať do tvaru (opäť podľa Príkladu 10)

$$s_{3n} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left[\frac{(4n-1)^2}{n(2n-1)}\right] + E_{4n-1} - \frac{1}{2} \cdot E_{2n-1} - \frac{1}{2} \cdot E_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Máme teda explicitne vyjadrený súčet každých $3n$ prvých členov radu v zadaní. Pre súčet s_{3n-1}, resp. s_{3n-2} prvých $3n-1$, resp. $3n-2$ členov tohto radu potom zrejme platí

$$s_{3n-1} = s_{3n} - a_{3n}, \quad \text{resp.} \quad s_{3n-2} = s_{3n-1} - a_{3n-1} = s_{3n} - a_{3n} - a_{3n-1}$$

(dobre si to premyslite v súvislosti s definíciou čiastočného súčtu radu :)). Ale členy a_{3n} a a_{3n-1} majú tvar

$$a_{3n} = -\frac{1}{2n}, \quad a_{3n-1} = \frac{1}{4n-1},$$

a preto dostávame vyjadrenia

$$s_{3n-1} = s_{3n} + \frac{1}{2n}, \quad s_{3n-2} = s_{3n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n-1}$$

(i toto si samy premyslite; uvedomte si, že n-tý blok obsahuje členy a_{3n-2}, a_{3n-1} a a_{3n} :)). Máme teda kompletný prehľad o tom, ako vyzerajú *všetky* čiastočné súčty radu v zadaní príkladu (prečo? :)). Potom v súlade s Príkladom 10 a jeho označením platí

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s_{3n} &= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{2} \cdot \ln\left[\frac{(4n-1)^2}{n(2n-1)}\right] + E_{4n-1} - \frac{1}{2} \cdot E_{2n-1} - \frac{1}{2} \cdot E_n\right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln\left[\frac{4^2}{2}\right] + \gamma - \frac{1}{2} \cdot \gamma - \frac{1}{2} \cdot \gamma = \frac{3}{2} \ln 2 \quad :),\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(s_{3n} + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} s_{3n} = \frac{3}{2} \ln 2 \quad :),$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \left(s_{3n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} s_{3n} = \frac{3}{2} \ln 2 \quad :).$$

Nechávame na čitateľa, aby si premyslel, že z posledných troch limít vyplýva konvergencia radu a identita v zadaní príkladu :).

Príklad 16 (ťažší)
Dokážme, že rad

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{6}$$
$$+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\frac{1}{27}-\frac{1}{8}+\cdots$$

diverguje k ∞.

Riešenie:
Stratégia riešenia je podobná ako v predchádzajúcom príklade. Predložený rad má takúto štruktúru

$$\overbrace{\underbrace{1+\frac{1}{3}}_{2}\ \underbrace{-\frac{1}{2}}_{1}}^{1.\text{ blok}}\ \Bigg|\ \overbrace{\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}}_{3}\ \underbrace{-\frac{1}{4}}_{1}}^{2.\text{ blok}}\ \Bigg|\ \overbrace{\underbrace{\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}}_{4}\ \underbrace{-\frac{1}{6}}_{1}}^{3.\text{ blok}}\ \Bigg|$$

$$\overbrace{\underbrace{\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\frac{1}{27}}_{5}\ \underbrace{-\frac{1}{8}}_{1}}^{4.\text{ blok}}\ \Bigg|\ \overbrace{\underbrace{\frac{1}{29}+\frac{1}{31}+\frac{1}{33}+\frac{1}{35}+\frac{1}{37}+\frac{1}{39}}_{6}\ \underbrace{-\frac{1}{10}}_{1}}^{5.\text{ blok}}\ \Bigg|\ \cdots.$$

Veľkosti jednotlivých blokov sa postupne aritmeticky zväčšujú. Vidíme, že v prvých n blokoch sa bude nachádzať práve

$$2+3+4+\cdots+(n+1)=\frac{1}{2}\cdot n\cdot[2+(n+1)]=\frac{n(n+3)}{2}$$

zlomkov s nepárnymi, po sebe idúcimi menovateľmi, konkrétne

$$1,\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{5},\quad \ldots,\quad \frac{1}{2\cdot\left[\frac{n(n+3)}{2}-1\right]-1},\quad \frac{1}{2\cdot\frac{n(n+3)}{2}-1}.$$

Podobne, v prvých n blokoch máme práve n zlomkov s párnymi, po sebe idúcimi menovateľmi, konkrétne

$$-\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{4},\quad \ldots,\quad -\frac{1}{2(n-1)},\quad -\frac{1}{2n}.$$

Teda v prvých n blokoch sčítavame práve $\frac{n(n+3)}{2}+n=\frac{n(n+5)}{2}$ členov. V samotnom n-tom bloku sú potom tieto členy

$$\overbrace{\underbrace{\frac{1}{2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-1}+\frac{1}{2\cdot\left[\frac{n(n+1)}{2}+1\right]-1}+\cdots+\frac{1}{2\cdot\frac{n(n+3)}{2}-1}}_{n+1}\underbrace{-\frac{1}{2n}}_{1}}^{n-\text{tý blok}}.$$

Odporúčame čitateľovi, aby si všetky tieto skutočnosti veľmi dobre premyslel (obzvlášť, overil si ich pre konkrétnu voľbu čísla n :)). Predložený rad budeme podobne ako v Príklade 15 sčítavať po celých blokoch. To znamená, že nás zaujímajú čiastočné súčty $s_{\frac{n(n+5)}{2}}$ (prečo? :)). Využitím vyššie uvedených záverov a postupu v Príklade 15 dostaneme

$$\begin{aligned}
s_{\frac{n(n+5)}{2}} &= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2\cdot\frac{n(n+3)}{2}-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)\\
&= H_{2\cdot\frac{n(n+3)}{2}-1}-\frac{1}{2}\cdot H_{\frac{n(n+3)}{2}-1}-\frac{1}{2}\cdot H_n\\
&= H_{n^2+3n-1}-\frac{1}{2}\cdot H_{\frac{n^2+3n-2}{2}}-\frac{1}{2}\cdot H_n\\
&= \frac{1}{2}\cdot\ln\left[\frac{(n^2+3n-1)^2}{\frac{n(n^2+3n-2)}{2}}\right]+E_{n^2+3n-1}-\frac{1}{2}\cdot E_{\frac{n^2+3n-2}{2}}-\frac{1}{2}\cdot E_n
\end{aligned}$$

(samy overte :)). Keďže v poslednej rovnosti výraz pod logaritmom konverguje pre $n\to\infty$ do plus nekonečna a $\lim_{m\to\infty}E_m=\gamma$, platí

$$\lim_{n\to\infty}s_{\frac{n(n+5)}{2}}=\infty.$$

Ukázali sme teda, že vybraná podpostupnosť $\left\{s_{\frac{n(n+5)}{2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu v zadaní príkladu diverguje do ∞. Nech $\{s_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je nejaká iná vybraná podpostupnosť čiastočných súčtov. Veličina s_{k_n} je teda súčet prvých k_n členov daného radu, t.j.,

$$s_{k_n}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{k_n}.$$

Nakoľko sa celý rad dá pokryť príslušnými blokmi, posledný člen a_{k_n} je buď posledný člen nejakého bloku alebo spadne do *vnútra* nejakého bloku. Ak a_{k_n}

je posledný člen povedzme m-tého bloku, tak potom zrejme $s_{k_n} = s_{\frac{m(m+5)}{2}}$. V prípade, ak sa a_{k_n} nachádza vo vnútri m-tého bloku, tak potom

$$s_{k_n} > \underbrace{s_{\frac{(m-1)[(m-1)+5]}{2}}}_{\text{súčet prvých } (m-1) \text{ blokov}}$$

(dobre si to premyslite; uvedomte si, že ak sme *vo vnútri* m-tého bloku, tak k súčtu všetkých predchádzajúcich blokov sme pričítali niekoľko *kladných* zlomkov z m-tého bloku :)). Z tejto analýzy vyplýva, že pre postupnosť $\{s_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ existuje podpostupnosť $\left\{s_{\frac{l_n(l_n+5)}{2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *vybraná* z postupnosti $\left\{s_{\frac{n(n+5)}{2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že platí

$$s_{k_n} \geq s_{\frac{l_n(l_n+5)}{2}} \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}$$

(samy si premyslite :)). Ale potom máme

$$\lim_{n\to\infty} s_{k_n} \geq \lim_{n\to\infty} s_{\frac{l_n(l_n+5)}{2}} = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_{k_n} = \infty.$$

Preto *každá* vybraná podpostupnosť čiastočných súčtov radu v zadaní diverguje do plus nekonečna. Nechávame na čitateľa, aby si premyslel, že toto je ekvivalentné s tým, že daný rad diverguje do ∞ :).

Príklad 17 (ťažší)

Dokážme, že existuje také prerovnanie Leibnizovho alternujúceho radu, ktoré nemá žiadny súčet, t.j., osciluje.

Riešenie:

Riešenie tohto na prvý pohľad beznádejného príkladu je založené na jednoduchej, ale vo svojej podstate veľmi mazanej myšlienke :). Najprv si uvedomíme, že z divergencie harmonického radu vyplýva, že rady

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots,$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n} + \cdots$$

divergujú do plus nekonečna (samy overte pomocou vhodného kritéria ;)). Platí však oveľa viac. Pre *ľubovoľné pevné* prirodzené číslo k (párne alebo nepárne) nekonečný rad

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+4}+\frac{1}{k+6}+\cdots+\frac{1}{k+2n}+\cdots \tag{1}$$

tiež diverguje do ∞. A to je celý trik :). Budeme sa snažiť zostrojiť prerovnanie Leibnizovho radu tak, aby príslušný čiastočný súčet osciloval medzi *zápornými* hodnotami a hodnotami *väčšími ako* 1. Správne usmerňovať túto hojdačku nám pomôže práve posledné pozorovanie :). Keď sa nám bude zdať, že čiastočný súčet je akosi príliš záporný, do radu pridáme dostatočne veľký kus radu (1) s *vhodným nepárnym* k tak, aby sme záporný súčet zdvihli nad hodnotu 1 (divergencia do ∞ radu (1) nám to vždy umožňuje). Ak však budeme vidieť, že náš súčet si nejako dosť vyskakuje nad 1, tak ho zrazíme pod 0 tým, že do radu pridáme dostatočne veľký kus radu (1) so *záporným* znamienkom pre *vhodné párne* k. Takto nám bude čiastočný súčet roztomilo hopkať sem a tam a nebude konvergovať k ničomu :). Musíme však dať pozor, aby sme do radu postupne pridali *všetky* členy z Leibnizovho alternujúceho radu (chceme ho predsa prerovnať). No a ako to bude vyzerať prakticky? :) Tak napríklad, nech prvý člen nového radu je 1, teda $s_1 = 1$. Túto jednotku chceme zaraziť pod nulu, takže prihodíme zopár záporných zlomkov s *párnym* menovateľom (iné záporné zlomky v pôvodnom Leibnizovom rade nemáme :/)

$$1\underbrace{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}.$$

Tento súčet s_5 je rovný $-1/24$, a teda je už záporný. Fajn :). Ihneď sa nám však znepáči jeho zápornosť a radi by sme ho podvihli nad 1 :P. Žiadny problém, pridáme niekoľko kladných zlomkov s *nepárnym* menovateľom z Leibnizovho radu. Konkrétne,

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\underbrace{+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}}.$$

Čiastočný súčet s_{13} je rovný $\frac{6364777}{6126120} > 1$ a máme srdce na mieste. Avšak netrvá dlho a diabol nám už našepkáva, aby sme opäť zostúpili do jeho záporných hlbín pekelných :|. A nakoľko je človek od prirodzenosti slabý, hneď zhromažďujeme temnú armádu záporných zlomkov s párnym menovateľom

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}\underbrace{-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots}_{???}.$$

Skúste samy nájsť, koľko ich musíme pridať, aby sme číslo $\frac{6364777}{6126120}$ znížili pod 0 :). A takto postupne pokračujeme ďalej. Znova zatúžime po stratenom nebi a zvolávame zástupy dobrých kladných zlomkov s nepárnym menovateľom, aby nás vyniesli nad 1 :). Je zrejmé, že tento proces je možné neustále predlžovať. Získame prerovnanie Leibnizovho radu, pričom postupnosť čiastočných súčtov tohto prerovnania nemá limitu (prečo? :)). Získaný rad teda osciluje.

V poslednej časti tohto dokumentu sa budeme venovať súčinu dvoch konvergentných nekonečných radov. V prípade *konečných* súm je to brnkačka – súčty normálne roznásobujeme „každý s každým" podľa distributívneho zákona a výsledky potom na základe komutatívneho a asociatívneho zákona podľa ľubovôle sčítavame a združujeme. Vždy dostaneme rovnaký výsledok. Avšak súčin dvoch konvergentných *nekonečných* súm je omnoho delikátnejšia a častokrát veľmi zradná záležitosť. Roznásobovanie radov po jednotlivých členoch metódou „každý s každým" funguje síce bez problémov, vyvstáva však otázka, ako získaných nekonečne veľa výsledkoch sčítať (nezabúdajme, že pri nekonečných súčtoch nie vždy platí komutatívny zákon; naviac Riemannova veta o prerovnávaní všetko ešte viac komplikuje :/). Všetko teda závisí na *usporiadaní* jednotlivých čiastočných súčinov do výsledného nekonečného radu, ktorý sa potom označuje ako *súčin* východiskových radov. Nech $\sum a_n$ a $\sum b_n$ sú dva konvergentné rady so súčtami a a b. Ich vzájomným roznásobením dostaneme výrazy $a_i b_j$, kde indexy i, j nezávisle na sebe prebiehajú cez všetky prirodzené čísla. Podľa hĺbavého a svedomitého Dirichleta je nutné tieto výrazy združiť a sčítať takto

$$\begin{aligned}\underbrace{a_1b_1}_{c_1} + \underbrace{a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1}_{c_2} + \underbrace{a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1}_{c_3} \\ + \underbrace{a_1b_4 + a_2b_4 + a_3b_4 + a_4b_4 + a_4b_3 + a_4b_2 + a_4b_1}_{c_4} \\ + \underbrace{a_1b_5 + a_2b_5 + a_3b_5 + a_4b_5 + a_5b_5 + a_5b_4 + a_5b_3 + a_5b_2 + a_5b_1}_{c_5} + \cdots .\end{aligned}$$

Nekonečný rad $\sum c_n$ sa potom nazýva *Dirichletov súčin* radov $\sum a_n$ a $\sum b_n$. Je vždy konvergentný, pričom platí $\sum c_n = ab$. Naproti tomu, slávny a vizionársky Cauchy odporúča združovať a sčítavať takto

$$\underbrace{a_1b_1}_{c_1} + \underbrace{a_1b_2 + a_2b_1}_{c_2} + \underbrace{a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1}_{c_3} + \underbrace{a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1}_{c_4}$$

$$+\underbrace{a_1b_5 + a_2b_4 + a_3b_3 + a_4b_2 + a_5b_1}_{c_5} + \cdots.$$

V tomto prípade sa rad $\sum c_n$ označuje ako *Cauchyho súčin* radov $\sum a_n$ a $\sum b_n$. Cauchyho súčin dvoch konvergentných radov *nie je vždy* konvergentný. Ak však aspoň jeden z nich konverguje *absolútne*, potom i rad $\sum c_n$ konverguje a $\sum c_n = ab$. Toto pozorovanie sa označuje ako *Mertensova veta*. Nakoniec poznamenajme, že v prípade absolútnej konvergencie oboch radov $\sum a_n$ a $\sum b_n$ nezávisí na spôsobe združovania a sčítavania členov a_ib_j a výsledný rad bude vždy absolútne konvergentný so súčtom ab.

Príklad 18 (Cauchyho súčin)
Nájdime Cauchyho súčin radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ samého so sebou.

Riešenie:
Rad v zadaní príkladu je alternujúci a podľa Leibnizovho kritéria konverguje, a to neabsolútne (samy overte :)). Pre hľadaný Cauchyho súčin

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$$

postupne dostávame (v tomto prípade máme $\sum a_n = \sum b_n = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$)

$$c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + a_3b_{n-2} + \cdots + a_kb_{n+1-k} + \cdots + a_nb_1$$

$$= \frac{(-1)^0}{\sqrt{1}} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n-1}} + \frac{(-1)^2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(-1)^{n-3}}{\sqrt{n-2}} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(-1)^0}{\sqrt{1}}$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{n-2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{1}}\right].$$

Súčet v zátvorke je pre každé $n \in \mathbb{N}$ väčší alebo rovný 1. Vplýva to zo skutočnosti, že každý člen tohto súčtu spĺňa nerovnosť

$$\frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n+1-k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{n}, \qquad k \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

(samy sa presvedčte :)). Preto pre každý index n platí

$$|c_n| = \frac{1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{1}} \geq \underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ členov}} = 1.$$

Získaný Cauchyho súčin $\sum c_n$ teda diverguje, nakoľko nie je splnená nutná podmienka konvergencie radu (prečo? :)). Tento výsledok ukazuje, že požiadavka absolútnej konvergencie aspoň jedného z činiteľov Cauchyho súčinu v Mertensovej vete je dôležitá pre jeho konvergenciu.

Príklad 19 (Cauchyho súčin)
Pre dané $q > 1$ stanovme Cauchyho súčin

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}\right)^2.$$

Riešenie:
Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Zrejme

$$\sum a_n = \sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n},$$

a preto hľadaný Cauchyho súčin $\sum c_n$ spĺňa

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^k} \cdot \frac{1}{q^{n+1-k}} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{q^{n+1}}}_{\text{konštanta}} = \frac{n}{q^{n+1}}$$

pre každý index $n \in \mathbb{N}$. Daný súčin je teda rad tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^{n+1}}.$$

Východiskový rad v zadaní príkladu je zrejme absolútne konvergentný geometrický rad s kvocientom $1/q$ a so súčtom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{\frac{1}{q}}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{q-1}.$$

Mertensova veta nám potom zaručuje (absolútnu) konvergenciu získaného Cauchyho súčinu, pričom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^{n+1}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}\right)^2 = \frac{1}{(q-1)^2}.$$

Z poslednej rovnosti ihneď vyplýva identita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^n} = \frac{q}{(q-1)^2},$$

ktorá platí pre každé reálne $q > 1$. Vidíme teda, že Cauchyho súčin poskytuje v niektorých prípadoch nástroj na určovanie súčtov konvergentných nekonečných radov (porovnajte s Príkladom 3 :)).

Príklad 20 (Cauchyho súčin)
Zostrojme Cauchyho súčin radov

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Riešenie:
Nie je ťažké ukázať, že rady v zadaní príkladu sú absolútne konvergentné pre každú dvojicu reálnych čísiel x, y (samy overte :)). Preto aj ich Cauchyho súčin $\sum c_n$ je konvergentný a platí (nedajte sa zmiasť a dobre si to premyslite, začíname teraz od indexu 0 ;))

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}_{\text{kombinačné číslo}} \cdot x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k y^{n-k}.$$

Posledný výraz sa podľa binomickej vety dá upraviť na tvar

$$c_n = \frac{1}{n!} \cdot (x+y)^n = \frac{(x+y)^n}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Odvodili sme teda identitu

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!},$$

platiacu pre každé $x, y \in \mathbb{R}$. Tento výsledok nie je náhodný. Ukazuje, že súčet nekonečného radu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, chápaný ako funkcia premennej x, sa správa ako *exponenciálna funkcia.* Dobre sa nad tým zamyslite. Ak označíme $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, potom posledná rovnosť znamená $s(x) \cdot s(y) = s(x+y)$. Naviac, je zrejmé, že $s(0) = 1$. Tieto dve vlastnosti sú charakteristické práve pre exponenciálnu funkciu :). Neskôr dokážeme, že skutočne platí rovnosť

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{R} \ \text{ :).}$$

Neriešené príklady

1. Vhodným spôsobom nájdite súčty daných radov.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^{2n-1}} + \frac{2}{4^{2n}}\right)$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

   g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

2. Desatinné čísla $-0.\overline{12}$ a $0.53\overline{9}$ napíšte v tvare zlomkov.

3. Zostrojte rady s danými čiastočnými súčtami.

   $$\text{a) } s_n = 1 - \frac{1}{2^n} \qquad \text{b) } s_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

4. Zistite súčet radu

   $$p\cos\alpha + p^2\cos 2\alpha + p^3\cos 3\alpha + \cdots + p^n \cos n\alpha + \cdots$$

   v závislosti na reálnych parametroch α a p, pričom $|p| < 1$.

5. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnicu

   $$1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \cdots = \frac{\operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x}.$$

6. Odhadnite súčet daných radov s chybou menšou než 10^{-2}.

   $$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \qquad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n - 3}.$$

7. Pre dané $q > 1$ nájdite Dirichletov súčin

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}\right)^2$$

a stanovte jeho hodnotu.

8.* Dokážte dané identity.

$$1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{9} - \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2,$$

$$1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{18} - \tfrac{1}{20} - \cdots = 0.$$

9.* Využitím poznatku, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje absolútne so súčtom $\frac{\pi^2}{6}$, nájdite súčty radov

$$\tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{6^2} + \tfrac{1}{8^2} + \tfrac{1}{10^2} \cdots,$$

$$1 + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{7^2} + \tfrac{1}{9^2} + \cdots,$$

$$1 - \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} - \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{5^2} - \cdots.$$

10**. Pre dané $q > 1$ zistite pomocou Cauchyho súčinu dvoch vhodných radov hodnotu nekonečného súčtu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{q^n}.$$