Príklady na precvičovanie – mocninové rady

Jedným z najvýznamnejších typov funkcionálnych radov sú *mocninové rady*, t.j., jednotlivé členy $f_n(x)$ radu sú mocninové funkcie premennej x. Jedná sa teda o rady tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \tag{1}$$

kde x_0 (*stred mocninového radu* (1)) a a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, (*koeficienty mocninového radu* (1)) sú dané reálne čísla. O charaktere množín bodovej konvergencie radu (1) hovorí tzv. *prvá Abelova veta.* Z nej vyplýva, že rad (1) konverguje bodovo na niektorých *otvorených intervaloch so stredom v bode* x_0, t.j., na množinách typu $(x_0 - r, x_0 + r)$, kde r je vhodné nezáporné reálne číslo. Najväčšie možné takéto r sa priliehavo nazýva *polomer konvergencie* radu (1) a je možné ho vyjadriť pomocou *Cauchyho–Hadamardovho vzorca*

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{2}$$

Ak $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, kladieme $r = \infty$, kým pre $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ kladieme $r = 0$. Poznamenajme, že v prípade, keď existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

sa polomer konvergencie r dá vyjadriť i v tvare

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|},$$

čo sa s výhodou využíva v konkrétnych praktických úlohách. Maximálny interval $\mathcal{I} = (x_0 - r, x_0 + r)$ s hodnotou r zo vzorca (2) sa nazýva *interval konvergencie* radu (1). Je zrejmé, že celkový *obor konvergencie* radu (1) bude pozostávať z intervalu konvergencie $\mathcal{I}$ plus eventuálne z dvojice krajných bodov $x_0 - r$ a $x_0 + r$. Bodovú konvergenciu v týchto krajných bodoch je nutné vyšetriť osobitne. Súčet $s(x)$ radu (1) je teda určite definovaný všade na intervale konvergencie $\mathcal{I}$. Ak naviac rad (1) konverguje i v krajnom bode

$x_0 + r$, potom podľa tzv. *druhej Abelovej vety* pre hodnotu $s(x_0 + r)$ súčtu radu (1) v tomto bode platí

$$s(x_0 + r) = \lim_{x \to (x_0+r)^-} s(x).$$

Posledná rovnosť znamená, že súčet $s(x)$, ak je definovaný v bode $x_0 + r$, je zľava spojitý v $x_0 + r$. Tento fakt potom umožňuje efektívny výpočet hodnoty $s(x_0 + r)$. Podobné tvrdenie platí i pre krajný bod $x_0 - r$ (pokúste sa ho samy formulovať :)). Všimnime si, že rad (1) *vždy* konverguje vo svojom strede x_0.

Na každom *uzavretom* podintervale intervalu konvergencie $\mathcal{I}$ rad (1) konverguje *rovnomerne* (niekedy hovoríme, že rad (1) konverguje lokálne rovnomerne, resp. skoro rovnomerne na intervale $\mathcal{I}$, pozri predchádzajúci dokument o funkcionálnych radoch :)). To znamená, že súčet $s(x)$ je spojitou funkciou na intervale konvergencie $\mathcal{I}$ (prečo? :)). Okrem toho platia identity

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}, \quad x \in \mathcal{I},$$

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1},$$

kde a, b sú ľubovoľné reálne čísla z intervalu konvergencie $\mathcal{I}$ (samy zdôvodnite tieto identity :)).

Riešené príklady

Príklad 1

Určme obor konvergencie mocninového radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \cdot x^n.$$

Riešenie:

Stanovíme najprv interval konvergencie predloženého radu. Pre jeho polomer konvergencie platí

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n+1}{n}\right|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}}.$$

Keďže limita $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} = 1$ existuje (samy overte :)), limita superior danej postupnosti prechádza na samotnú limitu postupnosti

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Interval konvergencie daného radu má teda tvar $(-1,1)$ (prečo? :)). Celkový obor konvergencie bude teda pozostávať z intervalu $(-1,1)$, prípadne z bodov $x = \pm 1$. Dosadením $x = -1$, resp. $x = 1$ do radu v zadaní príkladu dostaneme číselné rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \cdot (-1)^n, \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}.$$

Nie je ťažké ukázať, že obidva divergujú (samy overte ;)). Preto obor konvergencie predloženého radu je iba interval $(-1,1)$.

Príklad 2

Pre $\alpha \in (0,1)$ stanovme obor konvergencie mocninového radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n.$$

Riešenie:

Postupujeme analogickým spôsobom ako v predchádzajúcom príklade. Zistíme polomer konvergencie daného radu

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\alpha^{n^2}|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\alpha^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

To znamená, že interval konvergencie skúmaného radu je $(-\infty,\infty)$, teda rad (bodovo) konverguje pre každé reálne číslo. Hľadaný obor konvergencie je preto celé $\mathbb{R}$.

Príklad 3

Nájdime obor konvergencie mocninového radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n.$$

Riešenie:
Všimime si, že v tomto prípade existuje limita

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Preto polomer konvergencie radu v zadaní príkladu môžeme vypočítať pomocou rovnosti

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

To znamená, že skúmaný rad (bodovo) konverguje iba vo svojom strede $x = 0$. Jeho oborom konvergencie je preto jednoprvková množina $\{0\}$.

Príklad 4
Zostrojme obor konvergencie mocninového radu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Riešenie:
Samy sa presvedčte, že polomer konvergencie predloženého radu je $r = 1$:). Rad teda určite bodovo konverguje na otvorenom intervale $(-1, 1)$. Dosadením $x = 1$ získame divergentný harmonický rad $\sum \frac{1}{n}$, kým voľbou $x = -1$ dostaneme Leibnizov alternujúci rad $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, ktorý, ako sme ukázali v predchádzajúcich dokumentoch, konverguje. Obor konvergencie radu v zadaní má preto tvar $[-1, 1)$.

Príklad 5
Nájdime súčet mocninového radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}.$$

Riešenie:
Pri riešení príkladov tohto typu využívame skutočnosť, že mocninové rady môžeme na ich intervaloch konvergencie derivovať a integrovať člen po člene,

pričom takto získané mocninové rady majú opäť ten istý interval konvergencie. Týmito operáciami sa snažíme daný rad previesť na mocninový rad, ktorého súčet vieme explicitne určiť. Významným príkladom takéhoto radu je geometrický mocninový rad $\sum x^n$, pre ktorý platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad x \in (-1,1).$$

Nechávame na čitateľa, aby ukázal, že rad v zadaní príkladu má interval konvergencie $(-1,1)$:). Ďalej pre každý jeho člen platí

$$n \cdot x^{n-1} = (x^n)' \quad \text{pre každé } x \in (-1,1).$$

Teda predložený rad vznikol derivovaním geometrického radu. Preto pre každé $x \in (-1,1)$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(pozor, v tomto geometrickom rade začíname od indexu 1 ;)).

Príklad 6

Stanovme súčet mocninového radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} \cdot x^{n-1}.$$

Riešenie:

Postupujeme v rovnakom duchu ako v predchádzajúcom príklade. Predložený rad má interval konvergencie $(-1,1)$ (samy overte :)). Platí

$$\frac{n(n+1)}{2} \cdot x^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \cdot x^{n+1}\right)'', \qquad x \in (-1,1)$$

(i toto si samy dobre premyslite :)). Pre súčet daného radu potom dostávame

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot x^{n+1}\right)'' = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\right)''$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' = \frac{1}{(1-x)^3}, \qquad x \in (-1, 1)$$

(detailné vypočty nechávame na čitateľa ;)).

Príklad 7

Určme súčet mocninového radu z Príkladu 4. Pomocou tohto výsledku potom odvoďme súčet Leibnizovho číselného radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Riešenie:

V Príklade 4 sme ukázali, že obor konvergencie daného radu je interval $[-1, 1)$. Nech $s(x)$ je hľadaný súčet, t.j.,

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad x \in [-1, 1).$$

Pre každé pevne zvolené $x \in (-1, 1)$ platí (samy si premyslite :))

$$\frac{x^n}{n} = \int_0^x t^{n-1} \, \mathrm{d}t.$$

Pre súčet $s(x)$ potom máme

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} \, \mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \right) \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t} \, \mathrm{d}t$$

$$= [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x) \quad \text{pre každé } x \in (-1, 1).$$

Funkcia $s(x)$ je však definovaná i v bode $x = -1$, pričom

$$s(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Hodnotu $s(-1)$ stanovíme pomocou druhej Abelovej vety, podľa ktorej je funkcia $s(x)$ sprava spojitá v bode -1. Konkrétne, platí

$$s(-1) = \lim_{x \to -1^+} s(x) = \lim_{x \to -1^+} [-\ln(1-x)] = -\ln 2.$$

Máme teda identitu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2, \qquad \text{resp.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

Poslednú rovnosť sme v jednom z predchádzajúcich dokumentov už odvodili, pričom sme využili (samozrejme :)) odlišné argumenty. Získaný výsledok teda poukazuje na význam mocninových radov pri určovaní súčtov niektorých číselných radov.

Špeciálnym typom mocninových radov sú *Taylorove rady.* Ak $f(x)$ je funkcia definovaná na nejakom okolí bodu x_0 a majúca vlastné derivácie všetkých rádov v bode x_0, potom jej Taylorov rad so stredom v bode x_0 formálne definujeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + \cdots ,$$

kde bod x je z uvažovaného okolia bodu x_0. Jedná sa teda o mocninový rad so stredom v bode x_0. Všimnime si, že n-tý čiastočný súčet Taylorovho radu funkcie $f(x)$ so stredom v bode x_0 je *n-tý Taylorov polynóm* $T_n(x)$ funkcie $f(x)$ so stredom v bode x_0. Z diferenciálneho počtu funkcií jednej premennej vieme, že n-tý zvyšok $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ možno vyjadriť v (tzv. Lagrangeovom) tvare

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1},$$

kde η je istý bod medzi bodmi x_0 a x. Prirodzene očakávame, že súčtom daného Taylorovho radu bude práve funkcia $f(x)$, t.j.,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n \quad \text{pre každé } x \text{ z daného okolia bodu } x_0. \quad (3)$$

Posledná rovnosť zrejme nastane práve vtedy, keď

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad \text{pre každé } x \text{ z daného okolia bodu } x_0$$

(samy si to premyslite :)). Postačujúcou podmienkou identity (3) je *rovnomerná ohraničenosť* postupnosti derivácií $\{f^{(n)}(x)\}$ funkcie $f(x)$ na uvažovanom okolí bodu x_0. Táto podmienka znamená, že existuje kladné reálne číslo K tak, že pre každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq K \quad \text{pre každé } x \text{ z daného okolia bodu } x_0.$$

V prípade platnosti rovnosti (3) často hovoríme, že funkcia $f(x)$ sa dá *rozvinúť do Taylorovho radu* na okolí bodu x_0. Významným a v praxi veľmi užitočným poznatkom je skutočnosť, že Taylorov rozvoj funkcie $f(x)$ v okolí bodu x_0, ak existuje, je určený *jednoznačne* v zmysle, že *každý mocninový rozvoj* funkcie $f(x)$ na okolí bodu x_0 je nutne jej Taylorov rozvoj (veľmi dôkladne si to premyslite :)). Na druhej strane, *každý mocninový rad, ktorý konverguje* na nejakom okolí svojho stredu, *je Taylorovým radom svojho súčtu* na tomto okolí :) (i toto si veľmi dobre zdôvodnite :)). Taylorove rozvoje funkcií teda splývajú s konvergentnými mocninovými radmi.

Poznamenajme, že v prípade $x_0 = 0$ sa príslušný Taylorov rad funkcie $f(x)$ na okolí x_0 niekedy označuje aj ako *Maclaurinov rad* funkcie $f(x)$. Uvedieme teraz Maclaurinove rozvoje niektorých elementárnych funkcií. Pri každom rozvoji je uvedený aj jeho príslušný obor konvergencie.

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot (-1)^n = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot (-1)^n = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \qquad x \in [-1, 1],$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \cdot (-1)^{n-1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \qquad x \in (-1, 1],$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2\cdot\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right), \qquad x\in(-1,1),$$

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}\cdot x^n = 1+\binom{p}{1}\cdot x+\binom{p}{2}\cdot x^2+\cdots, \qquad x\in(-1,1),$$

$$\text{kde } p\in\mathbb{R} \quad \text{a} \quad \binom{p}{n} := \frac{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}$$

je tzv. zovšeobecnený binomický koeficient.

Príklad 8

Dokážme, že funkcia $f(x) = 1/x$ je súčtom svojho Taylorovho radu so stredom v bode $x_0 = 3$ na intervale $(2,4)$.

Riešenie:

Funkcia $f(x)$ má zrejme všetky derivácie v každom nenulovom bode x, pričom nie je ťažké pomocou matematickej indukcie ukázať, že pre každé $n\in\mathbb{N}$ platí

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}, \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

(samy dokážte ;)). Príslušný Taylorov rad funkcie $f(x)$ so stredom v bode $x_0 = 3$ má preto tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(3)}{n!}\cdot(x-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\cdot(x-3)^n.$$

V tomto prípade jedná o geometrický rad, konkrétne

$$\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3-x}{3}\right)^n,$$

Nie je preto problém priamo určiť jeho súčet. Skutočne dostaneme funkciu $f(x)$, nakoľko

$$\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3-x}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{3-x}{3}} = \frac{1}{x}$$

pre každé x spĺňajúce $\left|\frac{3-x}{3}\right| < 1$, t.j. pre každé $x \in (0,6) \supset (2,4)$. Tento výsledok vyplýva i zo skúmania n-tého zvyšku $R_n(x)$ daného radu

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\eta^{n+1}} \cdot (x-3)^{n+1},$$

kde reálne číslo η leží medzi hodnotami x a 3. Nakoľko pre každé $x, \eta \in (2,4)$ a každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\eta^{n+1}}\right| = \frac{1}{\eta^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{a} \qquad |x-3| < 1$$

(samy overte :)), máme $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pre každé $x \in (2,4)$ (i toto si samy dobre premyslite :)).

Príklad 9

Nájdime Taylorov rozvoj funkcie $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ na okolí bodu $x_0 = 0$.

Riešenie:

Keďže $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2}$, jedná sa o binomický rozvoj s exponentom $p = -1/2$. Máme teda

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \cdot (x^2)^n$$

pre každé reálne x spĺňajúce $|x^2| < 1$, t.j., $|x| < 1$. Pre jednotlivé binomické koeficienty platí $\binom{-1/2}{0} = 1$ a

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{\overbrace{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}^{n \text{ členov}}}{n!}$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}.$$

Pre každé $x \in (-1,1)$ potom dostávame identitu

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \cdot x^{2n}.$$

Nechávame na čitateľa, aby ukázal, že napriek tomu, že funkcia $f(x)$ je definovaná i v $x = \pm 1$, jej Maclaurinov rad v týchto bodoch diverguje :).

Príklad 10

Nájdime mocninový rozvoj funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ na okolí bodu $x_0 = 0$.

Riešenie:

Pri riešení využijeme skutočnosť, že pre každé reálne číslo t platí rovnosť

$$\mathrm{e}^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Z tejto identity pomocou substitúcie $t = -x^2$ dostaneme

$$\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{2n} \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{R}.$$

Získali sme teda *istý* mocninový rozvoj funkcie $f(x)$ v okolí bodu $x_0 = 0$ platný na celom $\mathbb{R}$. Zároveň je to i Taylorov rozvoj funkcie $f(x)$ so stredom v bode $x_0 = 0$, a teda *jediný* mocninový rozvoj $f(x)$ na okolí $x_0 = 0$.

Príklad 11

Overme platnosť Maclaurinovho rozvoja funkcie $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Riešenie:

Využijúc filozofiu Príkladu 7, pokúsime sa nájsť vhodný geometrický rad, ktorý nejako súvisí s funkciou $f(x)$. Z vlastností elementárnych funkcií jednej premennej máme identitu

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} x,$$

platiacu pre každé reálne číslo x. Podintegrálny výraz je však možné pre $t \in (-1, 1)$ chápať ako súčet nekonečného geometrického radu s kvocientom $-t^2$, konkrétne

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n, \qquad |t| < 1$$

(samy si dobre premyslite :)). Pre každé $x \in (-1, 1)$ teda platí rovnosť

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n \right) \mathrm{d}t.$$

V poslednom výraze je možné zameniť poradie integrácie a sumácie (prečo? :)), preto dostávame

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-t^2)^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n \cdot t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot (-1)^n.$$

Získaný mocninový rozvoj platí iste na intervale $(-1, 1)$. Nakoľko konverguje i pre hodnoty $x = \pm 1$ a funkcia $\operatorname{arctg} x$ je spojitá na celom $\mathbb{R}$, podľa druhej Abelovej vety posledná rovnosť je splnená i na intervale $[-1, 1]$. Z jednoznačnosti mocninových rozvojov nakoniec vyplýva, že sa jedná o Maclaurinov rad funkcie $f(x)$ (samy si všetko dobre premyslite ;)).

Príklad 12

Zostrojme Taylorov rozvoj funkcie $f(x) = \sin^2 x$ na okolí bodu $x_0 = 0$.

Riešenie:

Priama cesta, ako pristúpiť k riešeniu tohto príkladu, je otrocky postupne počítať jednotlivé derivácie funkcie $f(x)$. Druhá, prijateľnejšia cesta, je založená na jednoznačnosti Taylorovho radu – stačí nájsť *akýkoľvek* mocninový rozvoj funkcie $f(x)$ na okolí bodu $x_0 = 0$. Pomocou goniometrickej identity

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

a mocninového rozvoja funkcie $\cos x$ postupne dostaneme

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \cdot (-1)^n$$

$$= \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{člen s } n=0} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \cdot (-1)^n = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \cdot (-1)^n.$$

Poslednú sumu môžeme upraviť na tvar

$$\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} \cdot (-1)^{n-1}}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

(samy overte :)). Toto je hľadaný Taylorov rad funkcie $f(x)$ v zadaní príkladu, platiaci pre každé $x \in \mathbb{R}$.

Neriešené príklady

1. Určte polomer a obor konvergencie daných mocninových radov.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot x^{2n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot x^n$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2\sqrt{n}}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} \cdot x^{n^2}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \sin \frac{1}{n}$

   g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^{n!}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n (n+1)(n+2)}$.

2. Nájdite súčty daných mocninových radov.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{2^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \cdot x^{2n-1}$.

3. Zostrojte mocninové rozvoje daných funkcií v okolí bodu $x_0 = 0$.

   a) $f(x) = \sqrt{1+x}$ b) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ c) $f(x) = \cos x^2$

   d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ e) $f(x) = \frac{x-3}{(x+1)^2}$ f) $f(x) = (1 + \mathrm{e}^x)^3$

   g) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ h) $f(x) = \arcsin x$ i) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$.

4. Stanovte Taylorov rad funkcie $f(x) = x^{3/2}$ so stredom v bode $x_0 = 1$.

5.* Napíšte niekoľko prvých členov Maclaurinovych radov funkcií

   a) $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ h) $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$ i) $f(x) = (\arcsin x)^2$.

6.* Pokúste sa vyriešiť Príklad 12 tak, že využijúc Maclaurinov rozvoj funkcie $\sin x$ určíte súčin

$$\sin^2 x = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \cdot (-1)^m\right).$$

Porovnaním získaného rozvoja s výsledkom v Príklade 12 dokážte kombinatorickú identitu

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = 2^{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \ :).$$

7.* Pomocou vhodných mocninových radov nájdite súčty daných konvergentných číselných radov.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{8^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$.