Príklady na precvičovanie – krivkové integrály, Greenova integrálna veta

Riešené príklady

Príklad 1
Vypočítajme krivkový integrál prvého druhu

$$I = \int_{\varphi} \sin 2x \, \mathrm{d}s,$$

kde trajektória krivky φ je časť grafu funkcie $y = \cos x$ pre $x \in [0, \pi/2]$.

Riešenie:
Štandardný postup je nasledujúci. Najprv vhodne parametrizujeme danú krivku φ. V prípade, keď sa jedná o rovinnú krivku, ktorej trajektória splýva s časťou grafu nejakej funkcie jednej reálnej premennej x, najpriamočiarejšie je zvoliť za parameter t samotné x. V našom príklade má parametrizácia krivky φ teda tvar

$$x = t, \quad y = \cos t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Predložený krivkový integrál potom prepíšeme na bežný určitý integrál s integračnou premennou t. Za tým účelom je nutné vyjadriť deriváciu krivky φ podľa parametra t. Keďže vektor $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, \pi/2]$, máme

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, -\sin t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(v krajných bodoch daného intervalu uvažujeme príslušné jednostranné derivácie funkcií $x(t)$ a $y(t)$). Pre absolútnu hodnotu vektora $\varphi'(t)$ potom platí

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{1 + \sin^2 t}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Pre krivkový integrál v zadaní príkladu potom dostávame

$$I = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin 2t}_{\sin 2x} \cdot \underbrace{\|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t}_{\mathrm{d}s} = \int_0^{\pi/2} \sin 2t \cdot \sqrt{1 + \sin^2 t} \, \mathrm{d}t.$$

Posledný určitý integrál môžeme vypočítať napríklad použitím substitúcie $u = 1 + \sin^2 t$. Potom

$$\mathrm{d}u = 2 \sin t \cos t \, \mathrm{d}t = \sin 2t \, \mathrm{d}t$$

a nové integračné medze sú od 1 do 2. Po dosadení pre hodnotu I máme

$$I = \int_1^2 \sqrt{u} \, \mathrm{d}u = \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{u^3} \right]_1^2 = \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{8} - 1 \right).$$

Príklad 2

Stanovme krivkový integrál prvého druhu

$$I = \int_\varphi (x^2 + y^2 + y^2) \, \mathrm{d}s,$$

kde φ je časť skrutkovice s parametrickým vyjadrením

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad t \in [0, 2\pi],$$

kde a, b sú kladné konštanty.

Riešenie:

V tomto prípade integrujeme funkciu troch premenných po priestorovej krivke, postupujeme však podobne ako v predchádzajúcom príklade :). Danú krivku už máme paramatrizovanú. Vypočítame absolútnu hodnotu vektora $\varphi'(t)$ jej prvej derivácie. Postupne dostávame

$$x' = -a \sin t, \quad y' = a \cos t, \quad z' = b$$

$$\Downarrow$$

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(samy overte :)). Pre krivkový integrál v zadaní príkladu potom máme

$$I = \int_0^{2\pi} \left([a \cos t]^2 + [a \sin t]^2 + [bt]^2 \right) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(a^2 + b^2 t^2 \right) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \, \mathrm{d}t = 2\pi \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(a^2 + \frac{4}{3} \cdot \pi^2 b^2 \right).$$

Príklad 3

Pre dané $a > 0$ určme dĺžku časti tzv. *reťazovky*, ktorá je grafom funkcie

$$y = a \cosh \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}} \right), \quad x \in [-2, 2].$$

Riešenie:

Jednou zo základných geometrických aplikácií krivkového integrálu prvého druhu je práve výpočet dĺžky trajektórie krivky. Konkrétne, ak φ je po častiach hladká krivka definovaná na intervale $[a, b]$, potom pre jej dĺžku platí

$$L = \int_{\varphi} \mathrm{d}s.$$

V našom prípade najprv vykonáme parametrizáciu danej krivky

$$x = t, \quad y = \frac{a}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{t}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} \right), \quad t \in [-2, 2].$$

Ďalej stanovíme jej prvú deriváciu

$$x' = 1, \quad y' = \frac{a}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{t}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{t}{a}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} \right), \quad t \in [-2, 2].$$

Pre hľadanú dĺžku krivky potom podľa vzorca vyššie máme

$$L = \int_{-2}^{2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, \mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{t}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} \right) \mathrm{d}t$$

(samy overte detaily výpočtu ;)). Elementárnou integráciou napokon pre hodnotu L dostaneme výraz

$$L = \left[\frac{a}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{t}{a}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} \right) \right]_{-2}^{2} = a \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{2}{a}} - \mathrm{e}^{-\frac{2}{a}} \right) = 2a \cdot \sinh \frac{2}{a}.$$

Príklad 4
Vypočítajme obsah prednej steny klinu, ktorý vznikol z trojbokého hranola ohraničeného rovinami

$$x + y = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

odsekom plochou $z = 4 - y^2$.

Riešenie:
Toto je ďalšia typická geometrická aplikácia krivkového integrálu prvého druhu. Nech φ je po častiach hladká krivka, ktorej trajektória leží v rovine xy a nech $z = f(x, y)$ je nejaká spojitá funkcia dvoch premenných definovaná na krivke φ. Potom pre obsah valcovej plochy kolmej na rovinu xy, ktorej základňou je trajektória krivky φ a ktorá je zhora ohraničená grafom funkcie $z = f(x, y)$, platí vzorec

$$S = \int_\varphi f(x, y)\,\mathrm{d}s.$$

V našom prípade po nakreslení vhodného obrázka zistíme, že daná krivka φ je úsečka

$$x + y = 2, \quad x \in [0, 2],$$

a pre danú funkciou $f(x, y)$ platí $f(x, y) = 4 - y^2$ (samy si premyslite :)). Pre hľadaný obsah S potom platí

$$S = \int_\varphi (4 - y^2)\,\mathrm{d}s.$$

Ďalej už postupujeme štandardným spôsobom ako v predchádzajúcich príkladoch :). Krivka φ má napríklad parametrizáciu

$$x = t, \quad y = 2 - t, \quad t \in [0, 2].$$

Pre vektor jej derivácie potom platí

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, -1) \quad \Longrightarrow \quad \|\varphi'(t)\| = \sqrt{2}, \quad t \in [0, 2].$$

Pre hodnotu S potom dostávame (samy overte detaily vypočtu :))

$$S = \int_0^2 \left[4 - (2 - t)^2\right] \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2} \cdot \left[4t + \frac{(2 - t)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

Príklad 5
Vypočítajme krivkový integrál druhého druhu

$$I = \int_{\varphi} f(x,y) \cdot \mathrm{d}r,$$

kde φ je časť paraboly $y = x^2$, $x \in [-1,1]$, orientovaná v smere rastu premennej x, a vektorová funkcia $f(x,y)$ má tvar

$$f(x,y) = (x^2 - 2xy,\ y^2 - 2xy).$$

Riešenie:
Krivkové integrály druhého druhu počítame podobne ako krivkové integrály prvého druhu – opäť parametrizujeme danú krivku a zostavíme určitý Riemannov integrál. V tomto prípade však vo výpočte musíme zohľadniť jednak dopredu danú *orientáciu* krivky, a jednak, či si táto orientácia rozumie s nami zvolenou parametrizáciou krivky. V našom prípade máme integrovať po oblúku paraboly $y = x^2$, ktorý spája body $[-1,1]$ a $[1,1]$, pričom postupujeme v smere od bodu $[-1,1]$ do bodu $[1,1]$ (samy si premyslite :)). Uvažujme takúto parametrizáciu krivky φ

$$x = t, \quad y = t^2, \quad t \in [-1,1].$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, 2t)$$

Pri prirodzenom pohybe parametra t vo svojom intervale $[-1,1]$, t.j., od hodnoty -1 do hodnoty 1, nám potom budú postupne jednotlivé body na parabole naskakovať práve v súlade s jej predpísanou orientáciou, t.j., prvý naskočí bod $[-1,1]$ (pre hodnotu parametra $t = -1$) a posledný naskočí bod $[1,1]$ (pre hodnotu parametra $t = 1$) (samy overte :)). V tomto prípade je teda nami zvolená parametrizáciu *súhlasná* s danou orientáciou paraboly. Táto skutočnosť sa potom pri samotnom výpočte predloženého krivkového integrálu odrazí v podobe znamienka plus pred znakom integrálu. Konkrétne,

$$I = +\int_{-1}^{1} \underbrace{\left(t^2 - 2t\cdot t^2,\ (t^2)^2 - 2t\cdot t^2\right)}_{f(x,y)=(x^2-2xy,\, y^2-2xy)} \underbrace{\cdot}_{\text{skalárny súčin}} \underbrace{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}r}$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(t^2 - 2t^3,\, t^4 - 2t^3\right) \cdot (1,\, 2t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \left(2t^5 - 4t^4 - 2t^3 + t^2\right)\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{t^6}{3} - \frac{4t^5}{5} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = -\frac{14}{15}.$$

Príklad 6

Stanovme krivkový integrál druhého druhu

$$I = \int_{\varphi} (y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z)$$

po skrutkovici φ s parametrickým vyjadrením

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \quad , a, b > 0, \quad t \in [0, 2\pi],$$

ktorá je orientovaná nesúhlasne s touto parametrizáciou.

Riešenie:

Postupujeme analogicky ako v predchádzajúcom príklade. Z charakteru zadania daného krivkového integrálu potrebujeme vyjadriť diferenciály premenných x, y a z ako funkcií parametra t. Platí

$$\mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}y = a\cos t\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}z = b\,\mathrm{d}t.$$

Po dosadení do predloženého integrálu a s ohľadom na predpísanú orientáciu krivky φ postupne dostávame (samy overte detaily výpočtu :))

$$I = -\int_0^{2\pi} \left[\underbrace{(a\sin t)\cdot(-a\sin t\,\mathrm{d}t)}_{y\cdot\mathrm{d}x} + \underbrace{(bt)\cdot(a\cos t\,\mathrm{d}t)}_{z\cdot\mathrm{d}y} + \underbrace{(a\cos t)\cdot(b\,\mathrm{d}t)}_{x\cdot\mathrm{d}z}\right]$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[a^2\sin^2 t - abt\cos t - ab\cos t\right]\mathrm{d}t = \pi a^2.$$

Príklad 7

Pomocou krivkového integrálu druhého druhu odvoďme vzorec na výpočet obsahu vnútra elipsy s polosami $a, b > 0$.

Riešenie:
Tento príklad ilustruje jednu zo základných geometrických aplikácií krivkového integrálu druhého druhu. Konkrétne, ak φ je po častiach hladká, kladne orientovaná Jordanova krivka, potom hodnota

$$\frac{1}{2} \cdot \oint_{\varphi} (-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$$

vyjadruje obsah vnútra krivky φ. Krúžok na znaku integrálu nám pripomína, že integrujeme po uzavretej krivke (krivkovému integrálu druhého druhu po uzavretej krivke sa niekedy hovorí aj *cirkulácia* po danej krivke). V našom prípade uvažujme pre jednoduchosť elipsu φ so stredom v začiatku systému súradníc s polosami ležiacimi na súradnicových osiach, t.j.,

$$\varphi\ :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Jej parametrické vyjadrenie má napríklad tvar

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

(samy si premyslite ;)). Elipsa φ je hladká Jordanova krivka, pričom máme

$$\mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}y = b\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Uvažujúc orientáciu φ súhlasnú s touto parametrizáciou, pre obsah jej vnútra potom platí

$$\begin{aligned} S &= +\frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} [(-b\sin t) \cdot (-a\sin t\,\mathrm{d}t) + (a\cos t) \cdot (b\cos t\,\mathrm{d}t)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} ab\,\mathrm{d}t = \frac{ab}{2} \cdot [t]_0^{2\pi} = \pi ab \quad :). \end{aligned}$$

Príklad 8
Určme prácu silového poľa $f(x, y, z) = (y, z, x)$, ktorá sa vykoná pri posune telesa s jednotkovou hmotnosťou z bodu $[-1, 0, \mathrm{e}^{\pi}]$ do bodu $[1, 0, 1]$ pozdĺž krivky φ s vyjadrením

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \mathrm{e}^t, \quad t \in [0, \pi].$$

Riešenie:
Toto je jedna zo základných aplikácií krivkového integrálu druhého druh vo fyzike. Podľa klasickej mechaniky sa práca W sily $f(x,y,z)$ pozdĺž priestorovej krivky φ definuje práve ako krivkový integrál druhého druhu z vektorovej funkcie $f(x,y,z)$ po krivke φ, t.j.,

$$W = \int_{\varphi} f(x,y,z) \cdot \mathrm{d}r.$$

Je pochopiteľné, že celková vykonaná práca bude závisieť na orientácií danej krivky, t.j., v akom smere budeme cestovať po krivke. V našom prípade začiatočnému bodu $[-1, 0, \mathrm{e}^{\pi}]$ odpoveda hodnota parametra $t = \pi$, kým koncovému bodu odpovedá hodnota parametra $t = 0$ (samy overte :)). To teda znamená, že daná parametrizácia krivky φ je nesúhlasná s jej predpísanou orientáciou. Ďalej platí

$$\varphi'(t) = (x'(t),\, y'(t),\, z'(t)) = (-\sin t,\, \cos t,\, \mathrm{e}^{t}), \quad t \in [0, \pi].$$

Pre celkovú vykonanú prácu potom dostávame

$$W = -\int_0^{\pi} (\sin t,\, \mathrm{e}^{t},\, \cos t) \cdot (-\sin t,\, \cos t,\, \mathrm{e}^{t})\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} (\sin^2 t - 2\mathrm{e}^{t} \cos t)\, \mathrm{d}t$$
$$= 1 + \mathrm{e}^{\pi} + \frac{\pi}{2}$$

(samy overte detaily výpočtu ;)). Kladná hodnota W znamená, že v celkovej energetickej bilancii vykonalo na telese prácu silové pole $f(x,y,z)$. Prípadná záporná hodnota W by signalizovala, že v konečnom dôsledku samo teleso vykonalo prácu (potrebnú na prekonanie pôsobenia poľa $f(x,y,z)$) :).

Príklad 9
Vypočítajme krivkový integrál druhého druhu

$$I = \oint_{\varphi} \left[2(x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x + (x+y)^2\, \mathrm{d}y\right],$$

kde geometrický obraz krivky φ predstavuje kladne orientovaný obvod rovinného trojuholníka ABC s vrcholmi

$$A = [1,1], \quad B = [2,2], \quad C = [1,3].$$

Riešenie:
Popri štandardnom spôsobe výpočtu krivkových integrálov druhého druhu (parametrizáciou integračnej cesty a následným prevodom na určitý Riemannov integrál) sa v prípade rovinných uzavretých kriviek s výhodou využíva prevod krivkového integrálu druhého druhu na dvojný integrál na základe *Greenovej integrálnej vety.* Ak $f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ je vektorová funkcia definovaná na rovinnej oblasti Ω, pričom funkcie $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ a $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ sú spojité na Ω, potom pre každú po častiach hladkú, kladne orientovanú Jordanovu krivku φ ležiacu aj so svojím vnútrom v Ω platí identita

$$\int_\varphi [P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y] = \iint_M \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je zjednotenie vnútra a trajektórie krivky φ. V našom prípade máme

$$P(x,y) = 2(x^2+y^2), \quad Q(x,y) = (x+y)^2,$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 4y, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2(x+y), \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2(x-y).$$

Funkcie P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ a $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sú iste spojité na celom $\mathbb{R}^2$ a krivka φ je po častiach hladká, kladne orientovaná Jordanova krivka (samy si premyslite :)). Sú teda splnené všetky predpoklady Greenovej integrálnej vety. Potom pre hodnotu krivkového integrálu v zadaní príkladu platí

$$I = \iint_M 2(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je zjednotenie vnútra a hranice trojuholníka ABC. Samy si premyslite, že množina M je elementárna vzhľadom na os x s vyjadrením

$$M: \quad 1 \le x \le 2, \qquad x \le y \le 4-x.$$

Prepisom daného dvojného integrálu na dvojnásobný postupne dostaneme

$$I = \int_1^2 \left[\int_x^{4-x} 2(x-y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_1^2 \left[-(x-y)^2\right]_x^{4-x} \mathrm{d}x$$

$$= -4 \cdot \int_1^2 (x-2)^2\,\mathrm{d}x = -4 \cdot \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^2 = -\frac{4}{3}.$$

Odporúčame čitateľovi, aby sa pokúsil vypočítať predložený integrál i tradičným spôsobom a porovnal náročnosť obidvoch výpočtov ;).

Príklad 10

Stanovme krivkový integrál druhého druhu

$$I = \oint_{\psi} \left\{ \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x + y \left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] \mathrm{d}y \right\},$$

pozdĺž kladne orientovanej Jordanovej krivky $\psi = \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \psi_3 \oplus \psi_4$, kde

$$\begin{aligned}
&\psi_1 \;:\; x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right], \\
&\psi_2 \;:\; x = t, \quad y = 0, \quad t \in [1,\, 2], \\
&\psi_3 \;:\; x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad t \in \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right], \\
&\psi_4 \;:\; x = 0, \quad y = t, \quad t \in [1,\, 2].
\end{aligned}$$

Riešenie:

Toto je výstižný príklad poukazujúci na výpočtovú efektívnosť Greenovej integrálnej vety. Počítať predložený krivkový integrál prevodom na určitý Riemannov integrál je v tomto prípade náročné (nie však nemožné :)) z dvoch dôvodov – pomerne komplikovaná je jednak integrovaná funkcia, a jednak i samotná integračná cesta :-/ (samy si nakreslite vhodný obrázok a vyznačte predpísanú orientáciu krivky ψ :)). Poďme preto overiť predpoklady Greenovej vety :). Nakoľko máme

$$P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad Q(x, y) = y \left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right],$$

parciálnym derivovaním dostaneme (samy overte :))

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = y^2.$$

Ďalej krivka ψ je iste po častiach hladká. To znamená, že všetky predpoklady Greenovej integrálnej vety sú splnené (samy si dôkladne premyslite :)). Pre hľadanú hodnotu I potom platí

$$I = \iint_M y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je zjednotenie vnútra a trajektórie krivky ψ. Posledný dvojný integrál transformujeme do polárnych súradníc, nakoľko množina M je v tejto reprezentácii obdĺžnikom s vyjadrením

$$M: \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 1 \leq \rho \leq 2$$

(samy si dobre premyslite :)). Dostávame teda

$$I = \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho \sin\varphi)^2 \rho \,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

$$= \left(\int_1^2 \rho^3 \,\mathrm{d}\rho\right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi\right) = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 \cdot \left[\frac{2\varphi - \sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{15\pi}{16}$$

(samy overte detaily medzivýpočtov ;)).

Príklad 11

Zistime, či hodnota krivkového integrálu druhého druhu

$$I = \int_\varphi \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y\right]$$

závisí na integračnej ceste φ v oblasti $\Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$. V prípade zápornej odpovede stanovme hodnotu integrálu

$$\int_{[0,1]}^{[4,3]} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y\right].$$

Riešenie:
Keďže oblasť Ω je jednoducho súvislá (samy si premyslite :)) a funkcie

$$P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sú spojito diferencovateľné na Ω (tiež si samy premyslite :)), nezávislosť predloženého krivkového integrálu na integračnej ceste φ v Ω je ekvivalentná s platnosťou identity

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{na celom } \Omega.$$

Elementárnym derivovaním dostaneme rovnosti

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} = \frac{yx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

pre každý bod $[x,y] \in \Omega$. Vektorové pole $f(x,y) = (P(x,y),\, Q(x,y))$ je preto potenciálové v oblasti Ω, a teda hodnota krivkového integrálu v zadaní príkladu nezávisí v Ω na integračnej ceste φ. Pre hodnotu I potom platí

$$I = V(B) - V(A),$$

kde $V(x,y)$ je (ľubovoľný) potenciál vektorového poľa $f(x,y)$ a A a B sú začiatočný a koncový bod orietnovanej krivky φ. V druhej časti príkladu teda potrebujeme nájsť aspoň jeden potenciál $V(x,y)$ vektorového poľa $f(x,y)$. Nakoľko podľa definície potenciálu platí

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

hľadané $V(x,y)$ je kmeňová funkcia pre dvojicu $P(x,y)$ a $Q(x,y)$. Nasadíme preto štandardný aparát známy z Matematickej analýzy II :). Samy ukážte, že množina všetkých potenciálov $V(x,y)$ poľa $f(x,y)$ má tvar

$$V(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C, \quad \text{kde } C \text{ je reálna konštanta :).}$$

Využitím tohto výsledku potom dostávame

$$\int_{[0,1]}^{[4,3]} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y \right] = [V(x,y)]_{[0,1]}^{[4,3]} = V(4,3) - V(0,1)$$

$$= \left(\sqrt{4^2+3^2}+C\right) - \left(\sqrt{0^2+1^2}+C\right) = \sqrt{25}-\sqrt{1} = 4.$$

Vidíme, že hodnota daného krivkového integrálu nezávisí na konkrétnom výbere príslušného potenciálu $V(x,y)$.

Nakoniec poznamenajme, že všetky vykonané výpočty by fungovali i na väčšej oblasti $\Psi = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$. Samy overte, že funkcie $V(x,y)$, $P(x,y)$ a $Q(x,y)$, ako aj ich prvé parciálne derivácie, možno spojito rozšíriť i na oblasť Ψ so zachovaním všetkých vzájomných vzťahov :). Obzvlášť, rovnosť $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ platí v každom bode oblasti Ψ a možno ju použiť ako argument na to, že vektorové pole $f=(P,Q)$ je potenciálové na celom Ψ s potenciálom $V(x,y)$. Napriek tomu oblasť Ψ *nie je* jednoducho súvislá. To podčiarkuje skutočnosť, že predpoklad jednoduchej súvislosti danej oblasti je len *postačujúci* na argument

$$\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x \quad \Longrightarrow \quad \text{vektorové pole } f=(P,Q) \text{ je potenciálové,}$$

nie však *nutný*. V nasledujúcom príklade preberieme ďalšiu možnú variantu tejto problematiky.

Príklad 12

Rozhodnime, či vektorové pole

$$f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

je potenciálové v oblasti $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$.

Riešenie:

Nutné podmienky na to, aby vektorové pole $f=(P,Q)$ bolo potenciálové v oblasti Ω, sú splnené. Funkcie

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

totiž spĺňajú rovnosť $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ na celom Ω (samy overte ;)). V tomto prípade ale Ω *nie je* jednoducho súvislá oblasť, a preto platnosť uvedenej rovnosti ešte *nemusí zaručiť*, že pole $f(x,y)$ je potenciálové na celom Ω. Uvažujme napríklad kladne orientovanú kružnicu φ so stredom v bode $[0,0]$ a polomerom 2, t.j.,

$$\varphi\ :\ x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

(samy si premyslite, že táto parametrizácia je súhlasná s kladnou orientáciou krivky φ :)). Ďalej máme

$$\mathrm{d}x = -2\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}y = 2\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Potom pre hodnotu krivkového integrálu z $f(x,y)$ pozdĺž krivky φ platí

$$\oint_{\varphi} f(x,y)\cdot \mathrm{d}r = \oint_{\varphi}\left[-\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\right] = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = 2\pi$$

(samy overte detaily výpočtu :)). Cirkulácia vektorového poľa $f(x,y)$ po uzavretej krivke φ je teda *nenulová*. To signalizuje, že krivkový integrál z funkcie $f(x,y)$ v oblasti Ω *závisí* na integračnej ceste, a preto pole $f(x,y)$ nemôže byť potenciálové v Ω.