

Teorie a variety

Definice. Libovolnou množinu rovností typu Ω nazýváme teorií typu Ω .

Definice. Necht' T je teorie typu Ω . Třidu všech Ω -algeber, v nichž platí všechny rovnosti teorie T , nazýváme varietou Ω -algeber určenou teorií T .

Příklad. Necht' T je libovolná teorie typu Ω . Pak platí, že ve varietě určené teorií T leží všechny jednoprvkové Ω -algebry. Jestliže typ Ω nemá žádný nulární operační symbol, pak ve varietě určené teorií T leží také prázdná Ω -algebra.

Poznámka. Všimněte si, že v předchozí definici hovoříme o třídě všech Ω -algeber, nikoli o množině všech Ω -algeber. Nelze totiž hovořit o množině všech Ω -algeber stejně jako nelze hovořit o množině všech množin. Důvodem jsou paradoxy naivní teorie množin (pokud by existovala množina všech množin, existovala by i množina M všech těch množin, které nejsou svým prvkem; pak oba případy $M \in M$ i $M \notin M$ vedou ke sporu).

Pro pokročilejší: souvislost s predikátovou logikou

Právě zavedený pojem „teorie typu Ω “ je speciální případ teorie v predikátové logice v jazyce s operačními symboly z Ω .

Pro libovolné n -ární termy je rovnost $t_1 = t_2$ atomickou formulí predikátové logiky, z níž přidáním všeobecných kvantifikátorů utvoříme uzavřenou formuli (tj. sentenci)

$$(\forall x_1) \dots (\forall x_n)(t_1 = t_2).$$

Provedeme-li to se všemi rovnostmi nějaké teorie T typu Ω , získáme tak množinu uzavřených formulí, tedy teorii predikátové logiky.

Varieta Ω -algeber určená teorií T je pak právě třída všech modelů takto vzniklé teorie predikátové logiky.

Varieta grup, varieta komutativních grup

Příklad. Uvažme typ $\Omega = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$, kde operační symbol \cdot je binární, symbol $^{-1}$ je unární a symbol 1 je nulární. Teorie

$$\{(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3), x_1 \cdot 1 = x_1, 1 \cdot x_1 = x_1, \\ x_1 \cdot (x_1)^{-1} = 1, (x_1)^{-1} \cdot x_1 = 1\}$$

určuje varietu všech grup, přidáním další rovnosti $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$ získáme teorii určující varietu všech komutativních grup. Tato varieta je samozřejmě též varietou určenou teorií

$$\{(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3), x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1, x_1 \cdot 1 = x_1, x_1 \cdot (x_1)^{-1} = 1\}.$$

Varieta okruhů

Příklad. Uvažme typ $\Omega = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$, kde operační symboly $+$ a \cdot jsou binární, symbol $-$ je unární a symboly $0, 1$ jsou nulární.

Varieta všech okruhů je varieta Ω -algeber určená následující teorií typu Ω :

$$\{(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3), x_1 + x_2 = x_2 + x_1, x_1 + 0 = x_1, \\ x_1 + (-x_1) = 0, (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3), x_1 \cdot 1 = x_1, 1 \cdot x_1 = x_1, \\ x_1 \cdot (x_2 + x_3) = (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3), \\ (x_1 + x_2) \cdot x_3 = (x_1 \cdot x_3) + (x_2 \cdot x_3)\}.$$

Není jasné, jak zachytit podmínky oboru integrity a tělesa. Později uvidíme, že ani třídu všech oborů integrity ani třídu všech těles nemůžeme dostat jako varietu univerzálních algeber.

Varieta svazů

Příklad. Uvažme typ $\Omega = \{\vee, \wedge\}$, kde oba operační symboly jsou binární. Varieta všech svazů je určena následující teorií T typu Ω :

$$T = \{x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1, (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3), x_1 \vee x_1 = x_1, \\ x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1, (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3), x_1 \wedge x_1 = x_1, \\ (x_1 \vee x_2) \wedge x_1 = x_1, (x_1 \wedge x_2) \vee x_1 = x_1\}.$$

Teorie

$$T_1 = T \cup \{x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)\}$$

určuje varietu všech distributivních svazů, teorie

$$T_2 = T \cup \{(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee (x_1 \wedge x_3))\}$$

určuje varietu všech modulárních svazů.

Varieta vektorových prostorů nad tělesem $(R, +, \cdot)$

Příklad. Uvažme typ $\Omega = \{\oplus, \ominus, o\} \cup R$, kde operační symbol \oplus je binární, symbol \ominus je unární, symbol o je nulární a pro každé $r \in R$ je r unární operační symbol. Uvažme následující teorii T typu Ω :

$$T = \{(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3), \\ x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1, x_1 \oplus o = x_1, x_1 \oplus (\ominus x_1) = o\}.$$

Tato teorie (uvažovaná jako teorie typu $\{\oplus, \ominus, o\}$) určuje varietu všech komutativních grup.

Vektorový prostor nad tělesem $(R, +, \cdot)$ je komutativní grupa (V, \oplus) a zobrazení $\odot : R \times V \rightarrow V$ splňující pro každé $u, v \in V$ a každé $r, s \in R$

$$r \odot (u \oplus v) = (r \odot u) \oplus (r \odot v)$$

$$(r + s) \odot u = (r \odot u) \oplus (s \odot u)$$

$$(r \cdot s) \odot u = r \odot (s \odot u)$$

$$1 \odot u = u.$$

K teorii T přidáme zbylé čtyři axiomy vektorových prostorů.

Čtvrtý axiom $1 \odot u = u$ je nejsnadnější: $1 \in R$ je unární operační symbol, tedy odpovídající rovností je rovnost $1(x_1) = x_1$.

Pro druhý a třetí axiom uvážíme libovolné $r, s \in R$. To jsou unární operační symboly. Ale pak též $r + s$ a $r \cdot s$ jsou prvky R , a tedy unární operační symboly. Dostáváme následující rovnosti typu Ω :

$$(r + s)(x_1) = r(x_1) \oplus s(x_1), \quad (r \cdot s)(x_1) = r(s(x_1)).$$

První axiom pro libovolné $r \in R$ dává rovnost

$r(x_1 \oplus x_2) = r(x_1) \oplus r(x_2)$. Celkem tedy dostáváme teorii

$$T \cup \{1(x_1) = x_1\} \cup \left(\bigcup_{r \in R} \{r(x_1 \oplus x_2) = r(x_1) \oplus r(x_2)\} \right) \cup \\ \cup \left(\bigcup_{r \in R} \bigcup_{s \in R} \{(r + s)(x_1) = r(x_1) \oplus s(x_1), (r \cdot s)(x_1) = r(s(x_1))\} \right).$$

Tato teorie určuje varietu všech vektorových prostorů nad tělesem R .

Variety jsou uzavřené na podalgebry algeber

Poznámka. Viděli jsme, že třída všech grup, třída všech okruhů, třída všech vektorových prostorů nad tělesem R jsou příklady variet. Následující věta proto zobecňuje tvrzení, se kterými jsme se setkávali opakovaně: podgrupa grupy je sama grupou, podokruh okruhu je sám okruhem, podprostor vektorového prostoru nad tělesem R je vektorový prostor nad tělesem R atd.

Věta. *Nechť T je teorie typu Ω , V varieta Ω -algeber určená teorií T . Pak pro každou Ω -algebru $A \in V$ a každou podalgebru B Ω -algebry A platí $B \in V$.*

Důkaz. Uvažme libovolnou rovnost $t_1 = t_2$ z teorie T . Protože $A \in V$, platí tato rovnost v Ω -algebře A . Pro každý n -ární term t typu Ω a libovolné $a_1, \dots, a_n \in B$ platí $t_B(a_1, \dots, a_n) = t_A(a_1, \dots, a_n)$. Proto rovnost $t_1 = t_2$ platí i v Ω -algebře B . Dokázali jsme, že každá rovnost teorie T platí v Ω -algebře B , a tedy $B \in V$.

Homomorfismy zachovávají operace určené termy

Věta. Necht' A, B jsou univerzální algebry typu Ω , $\varphi : A \rightarrow B$ homomorfismus Ω -algeber. Pak pro libovolný n -ární term t typu Ω a libovolné $a_1, \dots, a_n \in A$ platí

$$t_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = \varphi(t_A(a_1, \dots, a_n)).$$

Důkaz indukcí vzhledem ke složitosti termu t . Je-li termem t proměnná x_k nebo nulární operační symbol $f \in \Omega$, pak věta platí. Necht' pro n -ární termy t_1, \dots, t_k typu Ω byla věta dokázána a term $t = f(t_1, \dots, t_k)$ pro k -ární operační symbol $f \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned} \varphi(t_A(a_1, \dots, a_n)) &= \varphi(f_A((t_1)_A(a_1, \dots, a_n), \dots, (t_k)_A(a_1, \dots, a_n))) = \\ &= f_B(\varphi((t_1)_A(a_1, \dots, a_n)), \dots, \varphi((t_k)_A(a_1, \dots, a_n))) = \\ &= f_B((t_1)_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)), \dots, (t_k)_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))) = \\ &= t_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)), \end{aligned}$$

což se mělo dokázat.

Variety jsou uzavřené na obrazy algeber v homomorfismech

Věta. Nechť T je teorie typu Ω , V varieta Ω -algeber určená teorií T . Nechť A, B jsou Ω -algebry, $\varphi: A \rightarrow B$ surjektivní homomorfismus Ω -algeber. Pak platí: je-li $A \in V$, pak též $B \in V$.

Důkaz. Nechť $t_1 = t_2$ je rovnost z teorie T , přičemž že oba termy t_1, t_2 jsou n -ární. Protože $A \in V$, platí tato rovnost v Ω -algebře A . Je třeba ověřit, že pro libovolné $b_1, \dots, b_n \in B$ platí

$$(t_1)_B(b_1, \dots, b_n) = (t_2)_B(b_1, \dots, b_n).$$

Protože je φ surjekce, existují $a_1, \dots, a_n \in A$ tak, že $b_1 = \varphi(a_1)$, \dots , $b_n = \varphi(a_n)$. Pak z předchozí věty dostáváme

$$\begin{aligned}(t_1)_B(b_1, \dots, b_n) &= (t_1)_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = \varphi((t_1)_A(a_1, \dots, a_n)) = \\ &= \varphi((t_2)_A(a_1, \dots, a_n)) = (t_2)_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = (t_2)_B(b_1, \dots, b_n).\end{aligned}$$

Dokázali jsme, že každá rovnost teorie T platí v Ω -algebře B , a tedy $B \in V$.

Důsledek. Variety jsou uzavřené na faktoralgebry.

Operace určené termy se v součinu počítají po složkách

Věta. Necht' Ω je typ. Necht' pro libovolný prvek i množiny I je dána univerzální algebra A_i typu Ω . Označme A součin těchto Ω -algeber, tj. $A = \prod_{i \in I} A_i$. Uvažme libovolný n -ární term t typu Ω a libovolné $\chi_1, \dots, \chi_n \in A$. Označme $\chi = t_A(\chi_1, \dots, \chi_n)$. Pak pro každé $i \in I$ platí $\chi(i) = t_{A_i}(\chi_1(i), \dots, \chi_n(i))$.

Důkaz indukcí vzhledem ke složitosti termu t . Je-li termem t proměnná x_k nebo nulární operační symbol $f \in \Omega$, pak věta platí. Necht' pro n -ární termy t_1, \dots, t_k typu Ω byla věta dokázána a term $t = f(t_1, \dots, t_k)$ pro k -ární operační symbol $f \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned} (t_A(\chi_1, \dots, \chi_n))(i) &= (f_A((t_1)_A(\chi_1, \dots, \chi_n), \dots, (t_k)_A(\chi_1, \dots, \chi_n)))(i) = \\ &= f_{A_i}(((t_1)_A(\chi_1, \dots, \chi_n))(i), \dots, ((t_k)_A(\chi_1, \dots, \chi_n))(i)) = \\ &= f_{A_i}((t_1)_{A_i}(\chi_1(i), \dots, \chi_n(i)), \dots, (t_k)_{A_i}(\chi_1(i), \dots, \chi_n(i))) = \\ &= t_{A_i}(\chi_1(i), \dots, \chi_n(i)), \end{aligned}$$

což se mělo dokázat.

Variety jsou uzavřené na součiny algeber

Věta. Nechť T je teorie typu Ω , V varieta Ω -algeber určená teorií T . Nechť pro libovolný prvek i množiny I je dána univerzální algebra A_i typu Ω . Označme A součin těchto Ω -algeber, tj. $A = \prod_{i \in I} A_i$. Pak platí: jestliže pro každé $i \in I$ je $A_i \in V$, pak též $A \in V$.

Důkaz. Nechť $t_1 = t_2$ je rovnost z teorie T , přičemž že oba termy t_1, t_2 jsou n -ární. Protože pro každé $i \in I$ je $A_i \in V$, platí tato rovnost v Ω -algebře A_i . Pro libovolné $\chi_1, \dots, \chi_n \in A$ dokažme

$$(t_1)_A(\chi_1, \dots, \chi_n) = (t_2)_A(\chi_1, \dots, \chi_n).$$

Stačí ověřit, že pro každé $i \in I$ je

$$\begin{aligned} ((t_1)_A(\chi_1, \dots, \chi_n))(i) &= (t_1)_{A_i}(\chi_1(i), \dots, \chi_n(i)) = \\ &= (t_2)_{A_i}(\chi_1(i), \dots, \chi_n(i)) = ((t_2)_A(\chi_1, \dots, \chi_n))(i), \end{aligned}$$

kde prostřední rovnost plyne z $A_i \in V$, zbylé dvě z předchozí věty.

Příklady použití předchozích vět

Příklad. Ani třída všech oborů integrity ani třída všech těles není varetou univerzálních algeber typu $\{+, \cdot, -, 0, 1\}$. Podle předchozí věty k tomu stačí najít dvě tělesa, jejichž součinem není těleso, a dva obory integrity, jejichž součinem není obor integrity. To je snadné: platí dokonce, že součin libovolných dvou těles (která jsou samozřejmě i obory integrity) není oborem integrity (a tedy ani tělesem). V každém takovém součinu totiž máme dělitele nuly, neboť platí $(0, 1) \cdot (1, 0) = (0, 0)$.

Příklad. Třída všech svazů, které jsou řetězci, netvoří varetu univerzálních algeber typu $\{\vee, \wedge\}$, neboť součinem dvou dvouprvkových řetězců je čtyřprvkový svaz, který není řetězec.

Příklad. Třída všech konečných grupoidů netvoří varetu univerzálních algeber typu $\{\cdot\}$. Součinem netriviálních konečných grupoidů přes nekonečnou množinu indexů je totiž nekonečný grupoid.

Ještě jeden příklad použití předchozích vět

Příklad. Třída všech grup netvoří varietu univerzálních algeber typu $\{\cdot\}$, neboť tato třída není uzavřena na podalgebry (existují podgrupoidy grup, které nejsou grupami, například $(\mathbb{N}, +)$ je podgrupoid grupy $(\mathbb{Z}, +)$).

Přesto jsme dostali třídu všech grup jako varietu univerzálních algeber typu $\{\cdot, ^{-1}, 1\}$. Rozšířením typu jsme totiž dosáhli toho, že zmíněné podgrupoidy už nebyly podalgebry $\{\cdot, ^{-1}, 1\}$ -algeber.

Nabízí se tedy otázka, zda i v případě třídy všech těles nebo třídy všech oborů integrity přidáním dalších operačních symbolů k typu $\{+, \cdot, -, 0, 1\}$ nedostaneme varietu Ω -algeber. Zde je však situace odlišná: tyto třídy nejsou uzavřené na součin a součin se přidáním dalších operačních symbolů nezmění (přibudou pouze další operace na téže nosné množině součinu). Dostali jsme tedy, že ani třída všech těles ani třída všech oborů integrity netvoří varietu Ω -algeber pro žádné $\Omega \supseteq \{+, \cdot, -, 0, 1\}$. Podobně třída všech řetězců netvoří varietu Ω -algeber pro žádné $\Omega \supseteq \{\vee, \wedge\}$.

Birkhoffova věta

Poznámka. Následující věta završí popis variet Ω -algeber.

Charakterizuje, které třídy Ω -algeber jsou varietami, tj. které třídy je možné charakterizovat nějakou množinou rovností.

Věta (Birkhoff). *Nechť Ω je typ. Třída Ω -algeber je varieta, právě když splňuje všechny tři následující podmínky:*

- ▶ *obsahuje všechny podalgebry všech svých Ω -algeber;*
- ▶ *obsahuje obrazy všech svých Ω -algeber ve všech surjektivních homomorfismech;*
- ▶ *obsahuje součin libovolného (i prázdného) systému svých Ω -algeber.*

Poznámka. Předchozí věty dokazují jeden směr (každá varieta splňuje všechny tři podmínky). Pro kompletní důkaz budeme muset zavést a studovat tzv. volné algebry.

Poznámka. Třetí podmínku Birkhoffovy věty je možné ekvivalentně formulovat takto: „obsahuje součin libovolného neprázdného systému svých Ω -algeber a současně obsahuje alespoň jednu jednoprvkovou Ω -algebru.“

Definice termu typu Ω nad množinou X

Definice. Necht' Ω je typ, X libovolná množina disjunktní s Ω . Pro každé nezáporné celé číslo n označme Ω_n množinu všech operačních symbolů z Ω , které jsou n -ární.

Položme $M_0 = \Omega_0 \cup X$ a pro každé $i \in \mathbb{N}$ označme

$$M_i = M_{i-1} \cup \{f(t_1, \dots, t_n); n \in \mathbb{N}, f \in \Omega_n, t_1, \dots, t_n \in M_{i-1}\}.$$

Pak $F_X(\Omega) = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ se nazývá množina všech termů typu Ω nad množinou X , jejím prvkům říkáme termy typu Ω nad množinou X .

Poznámka. Výrazem $f(t_1, \dots, t_n)$ je nutno rozumět slovo nad abecedou, která obsahuje kromě prvků $X \cup \Omega$ také závorky a čárku. Termy typu Ω , které jsme užívali dosud, jsou tedy termy typu Ω nad množinou $\{x_1, x_2, \dots\}$, platí tedy $F(\Omega) = F_{\{x_1, x_2, \dots\}}(\Omega)$. Podobně $F_{\{x_1, \dots, x_n\}}(\Omega)$ je množina všech n -árních termů typu Ω . V dalším textu nebudeme stále opakovat předpoklad $X \cap \Omega = \emptyset$, striktně vzato jsme měli v definici také předpokládat, že množina $X \cup \Omega$ neobsahuje závorky ani čárku. Kdykoli tedy dále napíšeme $F_X(\Omega)$, mlčky předpokládáme, že zmíněné předpoklady jsou splněny.

Množina termů $F_X(\Omega)$ tvoří Ω -algebru

Definice. Necht' Ω je typ, X množina. Na množině $F_X(\Omega)$ definujeme Ω -algebru následujícím způsobem. Pro libovolný n -ární operační symbol $f \in \Omega$ definujeme n -ární operaci $f_{F_X(\Omega)}$ na Ω -algebře $F_X(\Omega)$ příslušnou operačnímu symbolu f takto: pro každé $t_1, \dots, t_n \in F_X(\Omega)$ je

$$f_{F_X(\Omega)}(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n).$$

Poznámka. Všimněte si, jak se počítají hodnoty operací v právě popsané Ω -algebře. Dá se říci, že se vlastně nepočítají. Termy se do operačního symbolu pouze dosadí, čímž vznikne nový term, a to je výsledek. Znamená to, že každý prvek množiny $F_X(\Omega)$, který nepatří do X , je hodnotou právě jedné operace na jednoznačně určených operandech, je jej totiž možné získat jedině tak, jak byl sestaven dle definice termu. Proto v této Ω -algebře platí jen triviální rovnosti (tj. takové, kde na obou stranách stojí stejný term). Protože tato Ω -algebra není svázána žádnými netriviálními rovnostmi, nazývá se volná.

Volná algebra typu Ω generovaná množinou X

Definice. Ω -algebra $F_X(\Omega)$ z předchozí definice se nazývá volná algebra typu Ω generovaná množinou X .

Poznámka. Abychom ospravedlnili užitý název, je třeba dokázat následující větu.

Věta. Ω -algebra $F_X(\Omega)$ je generovaná množinou X , tj. platí $\langle X \rangle = F_X(\Omega)$.

Důkaz. Stačí ukázat inkluzi $F(\Omega) \subseteq \langle X \rangle$, tedy dokázat, že každý term t typu Ω nad množinou X patří do $\langle X \rangle$.

To provedeme indukcí vzhledem ke složitosti termu.

Pro nulární symbol f typu Ω platí $f = f_{F(\Omega)}$, což je prvek libovolné podalgebry.

Pro term $f(t_1, \dots, t_n)$ vzniklý z n -árního symbolu $f \in \Omega$ a termů t_1, \dots, t_n patřících dle indukčního předpokladu do $\langle X \rangle$ je $f(t_1, \dots, t_n) = f_{F(\Omega)}(t_1, \dots, t_n) \in \langle X \rangle$ dle definice podalgebry.

Dohoda o diagramech

Poznámka. Budeme pracovat s diagramy, v nichž budou vystupovat Ω -algebry i množiny. Proto některé šipky v takovém diagramu mohou odpovídat homomorfismům Ω -algeber, kdežto jiné budou odpovídat pouze zobrazením.

Stále bude platit, že nepřerušované šipky odpovídají daným zobrazením, kdežto přerušovaná právě tomu zobrazení, jehož jednoznačnou existenci věta tvrdí.

Fráze „diagram komutuje“ znamená, že kdykoli se z jednoho místa diagramu lze dostat do jiného dvěma cestami respektujícími orientaci šipek, pak jsou stejná obě zobrazení vzniklá poskládáním odpovídajících zobrazení podle těchto cest.

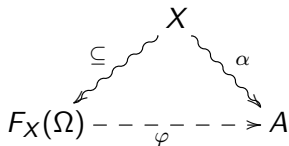
Pro snadnější pochopení diagramu zavedeme tuto dohodu:

obyčejná šipka \longrightarrow znázorňuje homomorfismus Ω -algeber,
vlnící se šipka \rightsquigarrow znázorňuje zobrazení, které homomorfismus není.

Například inkluze $X \subseteq F_X(\Omega)$ dává zobrazení $X \rightarrow F_X(\Omega)$, které v diagramu znázorníme takto: $X \rightsquigarrow F_X(\Omega)$.

Charakterizace volnosti pomocí homomorfismů

Věta. Necht' Ω je typ, X množina. Dále necht' A je libovolná Ω -algebra a $\alpha : X \rightarrow A$ libovolné zobrazení. Pak existuje jediný homomorfismus Ω -algeber $\varphi : F_X(\Omega) \rightarrow A$ splňující podmínku $\varphi(x) = \alpha(x)$ pro všechny prvky $x \in X$.



Důkaz. Libovolný prvek množiny $F_X(\Omega)$ je term nad množinou X . Definujme zobrazení $\varphi : F_X(\Omega) \rightarrow A$ indukcí vzhledem k definici termu:

- ▶ Pro libovolný prvek $x \in X$ klademe $\varphi(x) = \alpha(x)$.
- ▶ Aby zobrazení $\varphi : F_X(\Omega) \rightarrow A$ mohlo být homomorfismus Ω -algeber, je třeba pro libovolný nulární operační symbol $f \in \Omega$ položit $\varphi(f) = f_A$.

- Pro libovolné přirozené číslo n uvažme nyní term $t = f(t_1, \dots, t_n)$ typu Ω nad množinou X , který vznikl z n -árního operačního symbolu $f \in \Omega$ a termů t_1, \dots, t_n typu Ω nad množinou X . Aby zobrazení $\varphi : F_X(\Omega) \rightarrow A$ mohlo být homomorfismus Ω -algeber, je třeba, aby

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi(f(t_1, \dots, t_n)) = \varphi(f_{F_X(\Omega)}(t_1, \dots, t_n)) = \\ &= f_A(\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_n)).\end{aligned}$$

Klademe proto $\varphi(t) = f_A(\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_n))$.

Je zřejmé, že pro právě zkonstruované zobrazení φ platí $\varphi(x) = \alpha(x)$ pro všechny prvky $x \in X$, a že je to jediné zobrazení s touto vlastností, které by mohlo být homomorfismus Ω -algeber.

Je také jasné, že φ je skutečně homomorfismem Ω -algeber. Zajistili jsme to právě definicemi ve druhém a třetím bodu indukce.