Další příklady použití věty charakterizující volné algebry

<u>*Příklad.*</u> Pro dané těleso $(R, +, \cdot)$ uvažme typ $\Omega = \{\oplus, \ominus, o\} \cup R$ a varietu V vektorových prostorů nad R.
Pro libovolné přirozené číslo n má vektorový prostor R^n následující vlastnost: pro libovolný vektorový prostor U nad tělesem R a libovolnou n-tici vektorů $u_1, \dots, u_n \in U$ existuje lineární zobrazení (tedy homomorfismus vektorových prostorů) $\varphi : R^n \to U$ určené předpisem $\varphi((r_1, \dots, r_n)) = r_1 u_1 + \cdots + r_n u_n$. Nechť $v_i \in R^n$ je n-tice mající v i-té složce 1, jinde nuly. Zřejmě φ je jediný homomorfismus $R^n \to U$ splňující $v_i \mapsto u_i$. Proto $F_{\{x_1,\dots,x_n\}}(V) \cong R^n$, vnoření generátorů je definováno takto: $x_i \mapsto v_i$.

<u>*Příklad.*</u> Nechť $\Omega = \{\cdot\}$ a V je varieta všech pologrup.
Pak $F_{\{x_1,\dots,x_n\}}(V)$ je izomorfní s pologrupou všech neprázdných slov (tedy konečných posloupností) nad abecedou o n písmenech $x_1, \dots, x_n$, kde operací je konkatenace (napsání slov za sebe).
Jestliže totiž zvolíme libovolnou pologrupu a v ní libovolně prvky $a_1, \dots, a_n$, pak existuje jediný homomorfismus zobrazující písmeno x_i na prvek a_i pro každé i.

Volné grupy

Příklad. Nechť $\Omega = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$ a V je varieta všech grup. Pro libovolnou množinu X popišme konstrukci volné grupy $F_X(V)$ generované množinou X. Pro každý prvek $x \in X$ zavedeme nový symbol $\bar{x}$ a označíme $Y = X \cup \{\bar{x};\, x \in X\}$. Nosnou množinou konstruované grupy je množina všech těch slov (tedy konečných posloupností) nad abecedou Y, v nichž nestojí vedle sebe nikde žádné písmeno a jeho pruhovaná varianta. Operace násobení se počítá tak, že se provede konkatenace daných slov (tj. zapíší se slova za sebe) a pokud na rozhraní slov se objevilo písmeno vedle své pruhované varianty, tak se obě odstraní, což se provádí tak dlouho, dokud dostáváme vedle sebe stojící písmeno a jeho pruhovanou variantu. Neutrálním prvkem této grupy je prázdné slovo. A konečně inverzní prvek k danému slovu se vytvoří tak, že se napíše slovo získané z daného slova vypsáním jeho písmen v opačném pořadí a „výměnou pruhů“, tj. písmena bez pruhů pruh dostanou a písmena s pruhem o něj přijdou. Tím jsme sestrojili grupu a je možné ověřit, že splňuje potřebnou podmínku o homomorfismech.

Rovnosti platné ve volné Ω-algebře

Poznámka. Pro uzavřenou třídu Ω-algeber V a množinu generátorů X jsme konstruovali volnou algebru $F_X(V) = F_X(\Omega)/\sim_V$ tak, že jsme faktorizovali volnou algebru $F_X(\Omega)$ typu Ω co možná nejmenší kongruencí $\sim_V$, aby platilo $F_X(V) \in V$. Následující věta pro množinu generátorů $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ popisuje, které rovnosti tvořené n-árními termy v $F_X(V)$ platí: jsou to právě ty rovnosti, které platí v každé Ω-algebře $A \in V$.

Věta. *Nechť Ω je typ, n nezáporné celé číslo, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ je n-prvková množina proměnných. Nechť V je uzavřená třída Ω-algeber a nechť $\pi : F_X(\Omega) \to F_X(V)$ je projekce na volnou algebru třídy V generovanou množinou X. Pak pro libovolné n-ární termy t_1, t_2 typu Ω, tj. pro libovolné $t_1, t_2 \in F_X(\Omega)$, jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $\pi(t_1) = \pi(t_2)$;

(ii) *rovnost $t_1 = t_2$ platí v Ω-algebře $F_X(V)$;*

(iii) *rovnost $t_1 = t_2$ platí v každé Ω-algebře $A \in V$.*

Důkaz věty

„(iii) $\implies$ (ii)“ To plyne z $F_X(V) \in V$.

„(ii) $\implies$ (i)“ Operace $(t_1)_{F_X(V)}$ a $(t_2)_{F_X(V)}$ jsou stejné. Homomorfismus π zachovává operace určené termy, proto platí

$$(t_i)_{F_X(V)}(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)) = \pi\big((t_i)_{F_X(\Omega)}(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

pro $i = 1, 2$. Podle definice operací na Ω-algebře $F_X(\Omega)$ je $(t_i)_{F_X(\Omega)}(x_1, \ldots, x_n) = t_i$.

„(i) $\implies$ (iii)“ Zvolme libovolně $A \in V$ a libovolné $a_1, \ldots, a_n \in A$. Dokažme $(t_1)_A(a_1, \ldots, a_n) = (t_2)_A(a_1, \ldots, a_n)$. Pro zobrazení $\alpha : X \to A$ dané předpisem $\alpha(x_j) = a_j$ pro každé $j = 1, \ldots, n$ máme komutativní diagram

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, squiggly, "\subseteq"'] \arrow[d, squiggly, "\mu"'] \arrow[dr, squiggly, "\alpha"] & \\
F_X(\Omega) \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & F_X(V) \arrow[r, "\psi"] & A
\end{tikzcd}$$

Pro libovolný $t \in F_X(\Omega)$ platí $\varphi(t) = t_A(a_1, \ldots, a_n)$, a tedy $(t_1)_A(a_1, \ldots, a_n) = \varphi(t_1) =$ $= \psi(\pi(t_1)) = \psi(\pi(t_2)) =$ $= \varphi(t_2) = (t_2)_A(a_1, \ldots, a_n)$.

Teorie určená třídou Ω-algeber

Poznámka. Pro každou teorii typu Ω jsme definovali varietu, kterou tato teorie určuje a dokázali, že tato varieta je uzavřenou třídou Ω-algeber. Nyní naopak každé třídě Ω-algeber přiřadíme teorii, kterou tato třída určuje:

Definice. Nechť V je třída Ω-algeber. Teorii určenou třídou V definujeme jako množinu všech rovností platících v každé Ω-algebře $A \in V$.

Poznámka. Přímo z definic plyne, že je-li T teorie typu Ω, V varieta určená teorií T a T' teorie určená varietou V, pak platí $T \subseteq T'$. Teorii T' lze pak chápat jako množinu všech důsledků rovností z teorie T. Je to největší teorie (vzhledem k inkluzi) určující varietu V.

Podobně je-li V libovolná třída Ω-algeber, T teorie určená třídou V a V' varieta určená teorií T, pak $V \subseteq V'$. Zřejmě je V' nejmenší varietou (vzhledem k inkluzi) obsahující třídu V.

Uzavřené třídy určující tutéž teorii mají stejné volné algebry (případ konečně mnoha generátorů)

<u>Důsledek.</u> Nechť Ω je typ. Nechť V_1 a V_2 jsou uzavřené třídy Ω-algeber určující stejnou teorii T. Nechť n je libovolné nezáporné celé číslo a $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pak platí $F_X(V_1) = F_X(V_2)$.

<u>Důkaz.</u> Nechť $\pi_1 : F_X(\Omega) \to F_X(V_1)$ a $\pi_2 : F_X(\Omega) \to F_X(V_2)$ jsou projekce na volné algebry tříd V_1 a V_2.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, squiggly, "\mu_1"'] \arrow[d, squiggly, "\subseteq"'] \arrow[dr, squiggly, "\mu_2"] & \\
F_X(V_1) & F_X(\Omega) \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & F_X(V_2)
\end{tikzcd}$$

Podle předchozí věty pro libovolné $t_1, t_2 \in F_X(\Omega)$ platí $\pi_1(t_1) = \pi_1(t_2)$ právě tehdy, když rovnost $t_1 = t_2$ platí v každé Ω-algebře $A \in V_1$, tedy právě když rovnost $t_1 = t_2$ patří do teorie T, což znamená, že rovnost $t_1 = t_2$ platí v každé Ω-algebře $A \in V_2$, a to podle této věty platí právě tehdy, když $\pi_2(t_1) = \pi_2(t_2)$. Obě projekce π_1 a π_2 mají stejná jádra, tedy $F_X(V_1) = F_X(V_2)$.

Uzavřené třídy určující tutéž teorii mají stejné volné algebry (obecný případ libovolně mnoha generátorů)

Poznámka. Předchozí důsledek o volných algebrách s konečně mnoha generátory zobecníme na případ volných algeber s libovolnou množinou generátorů:

Věta. *Nechť Ω je typ. Nechť V_1 a V_2 jsou uzavřené třídy Ω-algeber určující stejnou teorii T. Pak pro libovolnou množinu proměnných X platí $F_X(V_1) = F_X(V_2)$.*

Důkaz. Víme, že věta platí, je-li X konečná množina. Předpokládejme, že X je nekonečná množina. Nechť opět $\pi_1 : F_X(\Omega) \to F_X(V_1)$ a $\pi_2 : F_X(\Omega) \to F_X(V_2)$ jsou projekce na volné algebry tříd V_1 a V_2. Důkaz povedeme sporem, budeme předpokládat, že $F_X(V_1) \neq F_X(V_2)$. Pak tedy π_1 a π_2 mají různá jádra. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že existují $t_1, t_2 \in F_X(\Omega)$ splňující $\pi_1(t_1) = \pi_1(t_2)$ a $\pi_2(t_1) \neq \pi_2(t_2)$. V termech t_1 a t_2 vystupuje jen konečně mnoho generátorů.

Zvolme neprázdnou konečnou množinu $Y \subseteq X$ tak, že každá proměnná vystupující v alespoň jednom z termů t_1 a t_2 patří do Y. Zvolme libovolné zobrazení $\mu : X \to Y$ takové, že pro každé $y \in Y$ platí $\mu(y) = y$ (prvky $y \in X$, $y \notin Y$ zobrazíme zcela libovolně).

Máme tedy komutativní diagram
$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, squiggly, "\subseteq"'] \arrow[rr, squiggly, bend left, "\mathrm{id}_Y"] & X \arrow[r, squiggly, "\mu"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

Podle předchozího důsledku platí $F_Y(V_1) = F_Y(V_2)$, označme $\pi : F_Y(\Omega) \to F_Y(V_1)$ projekci na volnou algebru. Pro každé $i = 1, 2$ doplníme předchozí diagram takto:

Existenci homomorfismu φ dává volnost $F_Y(\Omega)$ pro zobrazení $Y \to F_X(\Omega)$, je jasné, že φ je zobrazení inkluze.

Existenci homomorfismů φ_i a ψ_i dává volnost $F_Y(V_i)$ a $F_X(V_i)$ pro zobrazení $Y \to F_X(V_i)$ a $X \to F_Y(V_i)$.

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, squiggly, "\subseteq"'] \arrow[rr, squiggly, bend left, "\mathrm{id}_Y"] \arrow[d, squiggly, "\subseteq"'] & X \arrow[r, squiggly, "\mu"'] \arrow[d, squiggly, "\subseteq"'] & Y \arrow[d, squiggly, "\subseteq"'] \\
F_Y(\Omega) \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & F_X(\Omega) \arrow[d, "\pi_i"] & F_Y(\Omega) \arrow[d, "\pi"] \\
F_Y(V_i) \arrow[r, dashed, "\varphi_i"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\mathrm{id}_{F_Y(V_i)}"'] & F_X(V_i) \arrow[r, dashed, "\psi_i"] & F_Y(V_i)
\end{tikzcd}
$$

Zobrazení $Y \to F_X(V_i)$ určí homomorfismus $F_Y(\Omega) \to F_X(V_i)$ jednoznačně, komutuje tedy „dolní čtverec," tj. $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i \circ \pi$. „Diagonální" obrazení $Y \to F_Y(V_i)$ dá homomorfismus $F_Y(V_i) \to F_Y(V_i)$ jednoznačně, komutuje tedy „dolní trojúhelník," tj. $\psi_i \circ \varphi_i = \mathrm{id}_{F_Y(V_i)}$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, rightsquigarrow, "\subseteq"'] \arrow[rr, rightsquigarrow, bend left, "\mathrm{id}_Y"] \arrow[d, rightsquigarrow, "\subseteq"'] & X \arrow[r, rightsquigarrow, "\mu"'] \arrow[d, rightsquigarrow, "\subseteq"'] & Y \arrow[d, rightsquigarrow, "\subseteq"'] \\
F_Y(\Omega) \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & F_X(\Omega) \arrow[d, "\pi_i"] & F_Y(\Omega) \arrow[d, "\pi"] \\
F_Y(V_i) \arrow[r, dashed, "\varphi_i"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\mathrm{id}_{F_Y(V_i)}"'] & F_X(V_i) \arrow[r, dashed, "\psi_i"] & F_Y(V_i)
\end{tikzcd}$$

Proto jsou obě zobrazení φ_1 a φ_2 injektivní. Dolní komutativní čtverce pro $i = 1$ i $i = 2$ lze najednou nakreslit do diagramu:

$$\begin{tikzcd}
 & & F_X(V_1) & \\
F_Y(V_1) = F_Y(V_2) \arrow[urr, hook, "\varphi_1"] \arrow[drr, hook, "\varphi_2"'] & & F_Y(\Omega) \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[r, "\varphi"] & F_X(\Omega) \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \\
 & & F_X(V_2) &
\end{tikzcd}$$

Platí $t_1, t_2 \in F_Y(\Omega)$, $\varphi(t_1) = t_1$, $\varphi(t_2) = t_2$, $\varphi_2(\pi(t_1)) = \pi_2(\varphi(t_1)) =$
$= \pi_2(t_1) \neq \pi_2(t_2) = \pi_2(\varphi(t_2)) =$
$= \varphi_2(\pi(t_2))$, tedy $\pi(t_1) \neq \pi(t_2)$.
Protože φ_1 je injektivní, $\varphi_1(\pi(t_1)) \neq \varphi_1(\pi(t_2))$, tedy $\pi_1(t_1) =$
$= \pi_1(\varphi(t_1)) = \varphi_1(\pi(t_1)) \neq \varphi_1(\pi(t_2)) = \pi_1(\varphi(t_2)) = \pi_1(t_2)$, spor.

Svou teorií je uzavřená třída jednoznačně určena

<u>Věta.</u> Nechť Ω je typ. Nechť V_1 a V_2 jsou uzavřené třídy Ω-algeber určující stejnou teorii T. Pak $V_1 = V_2$.

<u>Důkaz.</u> Nechť $A \in V_1$ je libovolná. Označme X nosnou množinu Ω-algebry A. Máme tedy zobrazení $\mathrm{id}_X : X \to A$. Volnost $F_X(V_1)$ dává homomorfismus $\psi : F_X(V_1) \to A$ splňující $\psi \circ \mu = \mathrm{id}_X$, kde $\mu : X \to F_X(V_1)$ je vnoření generátorů do volné algebry $F_X(V_1)$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, squiggly, "\mu"'] \arrow[dr, squiggly, "\mathrm{id}_X"] & \\
F_X(V_1) \arrow[rr, "\psi"] & & A
\end{tikzcd}$$

Protože id_X je surjektivní, je také ψ surjektivní. Podle předchozí věty $F_X(V_1) = F_X(V_2)$, tedy $F_X(V_1) \in V_2$. Protože třída V_2 je uzavřená, plyne odtud, že A, jakožto obraz algebry $F_X(V_1)$ v surjektivním homomorfismu ψ, patří do V_2.
Dokázali jsme inkluzi $V_1 \subseteq V_2$, opačná inkluze plyne ze symetrie.

Dokončení důkazu Birkhoffovy věty

Věta (Birkhoff). Nechť Ω je typ. Třída Ω-algeber je varieta, právě když splňuje všechny tři následující podmínky:

- *obsahuje všechny podalgebry všech svých Ω-algeber;*
- *obsahuje obrazy všech svých Ω-algeber ve všech surjektivních homomorfismech;*
- *obsahuje součin libovolného (i prázdného) systému svých Ω-algeber.*

Důkaz. Víme, že každá varieta je uzavřená třída, a potřebujeme dokázat, že také naopak každá uzavřená třída je varietou.

Nechť V je libovolná uzavřená třída Ω-algeber,
T je teorie, kterou určuje třída V,
V' je varieta Ω-algeber určená teorií T, zřejmě platí $V \subseteq V'$,
T' teorie, kterou určuje varieta V', zřejmě platí $T \subseteq T'$.
Z $V \subseteq V'$ plyne $T \supseteq T'$, dohromady $T = T'$.
Podle předchozí věty odtud plyne $V = V'$, je tedy V varieta.

Význam volných algeber: prezentace grupy

<u>*Poznámka.*</u> Prezentace grup je metoda, jak (jednoznačně až na izomorfismus) popsat grupu: zadáme generátory a relace mezi nimi.
Nechť V je varieta všech grup.
Mějme libovolnou pevně zvolenou grupu G a zvolme množinu M generátorů grupy G, tedy $M \subseteq G$, $\langle M \rangle = G$. Zřejmě taková množina M vždy existuje (například $M = G$).
Zvolme množinu X a bijekci $\nu : X \to M$.
Máme volnou grupu $F_X(V)$ generovanou množinou X, a tedy i homomorfismus $\psi : F_X(V) \to G$.
Obraz $\psi(F_X(V))$ je podgrupa grupy G obsahující M, je tedy ψ surjektivní. Proto $G \cong F_X(V)/\ker\psi$.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, rightsquigarrow, "\mu"'] \arrow[dr, rightsquigarrow, "\nu"] & \\
F_X(V) \arrow[rr, "\psi"] & & G
\end{tikzcd}$$

Protože jde o grupy, je kongruence $\ker\psi$ zadána třídou H obsahující 1_G. Víme, že H je normální podgrupa grupy G. Protože množina všech normálních podgrup grupy G tvoří úplný svaz, lze definovat „normální podgrupu generovanou množinou“ obvyklým způsobem. To umožní zadat H množinou generátorů.

Definice a příklad prezentace grupy

Definice. Prezentací grupy rozumíme zápis $\langle X \mid R \rangle$, kde X je množina a R je podmnožina volné grupy $F_X(V)$ generované množinou X; zde V značí varietu všech grup. Prezentovanou grupou je pak faktorgrupa $F_X(V)/H$, kde H je normální podgrupa grupy $F_X(V)$ generovaná množinou R. Prvkům množiny X říkáme generátory grupy, prvkům množiny R generující relace. Jsou-li množiny X a R dány výčtem prvků, píšeme $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ místo přesnějšího $\langle \{x_1, \dots, x_n\} \mid \{r_1, \dots, r_m\} \rangle$.

Příklad. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je $\langle a \mid a^n \rangle$ prezentací n-prvkové cyklické grupy, neboť $F_{\{a\}}(V) = \langle a \rangle$ je nekonečná cyklická grupa, v níž prvek a^n generuje podgrupu $\langle a^n \rangle$. Faktorgrupou tedy je grupa $\langle a \rangle / \langle a^n \rangle$, což je n-prvková cyklická grupa.

Poznámka. Někdy se relace v prezentaci grupy píší jako rovnosti, tedy zápisem $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1 = r_1', \dots, r_m = r_m' \rangle$ znamenajícím $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1^{-1} r_1', \dots, r_m^{-1} r_m' \rangle$. Naopak $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ lze psát $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1 = 1, \dots, r_m = 1 \rangle$. Pozor: nejde o rovnosti v námi zavedeném smyslu, nelze v nich za zapsané prvky dosazovat jiné!

Další příklad prezentace grupy

Příklad. Grupa $(\mathbb{D}_n, \circ)$ všech symetrií pravidelného n-úhelníka je generována rotací r o úhel $\frac{2\pi}{n}$ a libovolně zvolenou osovou souměrností s. Skutečně, $\langle r \rangle$ je cyklická podgrupa mající n prvků, tedy $\langle r, s \rangle \subseteq \mathbb{D}_n$ obsahuje více než polovinu z $2n$ prvků grupy $\mathbb{D}_n$, tedy z Lagrangeovy věty $\langle r, s \rangle = \mathbb{D}_n$. V grupě $\mathbb{D}_n$ platí $r^n = 1$, $s^2 = 1$, $r \circ s = s \circ r^{-1}$, a tedy $r \circ s \circ r \circ s = 1$.

Zadejme prezentací grupu $G = \langle \rho, \sigma \mid \rho^n, \sigma^2, \rho \cdot \sigma \cdot \rho \cdot \sigma \rangle$.

Volná grupa generovaná množinou $\{\rho, \sigma\}$ je grupa F všech slov nad abecedou $\{\rho, \sigma, \bar{\rho}, \bar{\sigma}\}$, ve kterých se nikde nevyskytne ani písmeno σ vedle $\bar{\sigma}$ ani ρ vedle $\bar{\rho}$; operací je konkatenace a následné umazání podslov $\sigma\bar{\sigma}$, $\bar{\sigma}\sigma$, $\rho\bar{\rho}$, $\bar{\rho}\rho$, pokud se vyskytnou. Proto platí $\sigma^{-1} = \bar{\sigma}$, $\rho^{-1} = \bar{\rho}$. Homomorfismus $\psi : F \to \mathbb{D}_n$ určený předpisem $\rho \mapsto r$, $\sigma \mapsto s$ je surjektivní, protože $\langle r, s \rangle = \mathbb{D}_n$.

Nechť H je normální podgrupa grupy F generovaná množinou $\{\rho^n, \sigma^2, \rho \cdot \sigma \cdot \rho \cdot \sigma\}$, z definice tedy $G = F/H$. Ukážeme $G \cong \mathbb{D}_n$.

Protože v grupě $\mathbb{D}_n$ platí $r^n = 1$, $s^2 = 1$, $r \circ s \circ r \circ s = 1$, platí $\{\rho^n, \sigma^2, \rho \cdot \sigma \cdot \rho \cdot \sigma\} \subseteq \ker \psi$ (zde užíváme jádro homomorfismu grup v původním významu normální podgrupy), a tedy $H \subseteq \ker \psi$. Hlavní věta o faktorových grupách dává surjektivní homomorfismus $\tilde{\psi} : G \to \mathbb{D}_n$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, twoheadrightarrow, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{D}_n \\ G = F/H \arrow[ur, "\tilde{\psi}"'] & \end{tikzcd}$$

Ukážeme, že $\tilde{\psi}$ je injektivní. Zvolme třídu rozkladu F/H a v ní reprezentanta, tedy slovo nad abecedou $\{\rho, \sigma, \bar{\rho}, \bar{\sigma}\}$. V tomto slově nahradíme každý výskyt písmene $\bar{\sigma}$ písmenem σ a každý výskyt písmene $\bar{\rho}$ nahradíme $n - 1$ písmeny ρ. Protože $\sigma^2, \rho^n \in H$, je nové slovo nad abecedou $\{\rho, \sigma\}$ ve stejné třídě jako slovo původní. Pokud nové slovo obsahuje podslovo $\rho\sigma$, nahradíme jeho první výskyt slovem $\sigma\rho \cdots \rho$, v němž se písmeno ρ opakuje $(n-1)$-krát. Přitom kdykoli se objeví podslovo $\sigma\sigma$, smažeme jej. Protože $(\rho\sigma)H = (\sigma\rho^{n-1})H$, $\sigma^2 \in H$, jsme pořád v téže třídě. Časem dostaneme slovo mající pouze písmena ρ až na případně jedno písmeno σ na začátku. Je-li písmen ρ alespoň n, odstraníme jich n. V každé třídě rozkladu F/H tedy existuje slovo tvaru: nejvýše jedno σ na začátku a dále nejvýše $n - 1$ písmen ρ. Takových slov je $2n$, tedy $\tilde{\psi}$ je injektivní.

Využití prezentace grupy

Prezentaci $\langle \rho, \sigma \mid \rho^n, \sigma^2, \rho \cdot \sigma \cdot \rho \cdot \sigma \rangle$ grupy $\mathbb{D}_n$ lze využít ke snadnějšímu provádění výpočtů v této grupě.

Obecně však musíme být velmi opatrní při hledání prezentace pro danou grupu.

Pro danou prezentaci může být nesnadné (nebo dokonce nemožné) rozhodnout, zda zadává konečnou grupu. Například grupa daná prezentací $\langle x, y \mid x^2, y^2, (xy)^2 \rangle$ je čtyřprvková, kdežto grupa daná prezentací $\langle x, y \mid x^3, y^3, (xy)^3 \rangle$ je nekonečná.

Další problém je v tom, že dané relace mohou mít nečekané důsledky. Z předchozího víme, že grupa daná prezentací $\langle x, y \mid x^4, y^2, xyxy \rangle$ je izomorfní s $\mathbb{D}_4$, je tedy osmiprvková. Mírná modifikace $\langle x, y \mid x^4, y^2, x^2yxy \rangle$ však nedá osmiprvkovou grupu, protože je zde skrytá relace: z $x^2yxy \sim 1$ vynásobením x^2 zleva a y zprava plyne $yx \sim x^2y$, tedy

$$x \sim y^2x \sim yx^2y \sim x^2yxy \sim x^4y^2 \sim 1,$$

a tedy tato grupa je dvojprvková, generovaná prvkem y.

Další využití prezentací

Příklad. Připomeňme, že $SL_2(\mathbb{Z})$ je množina všech matic 2×2 s celočíselnými prvky a determinantem 1. Spolu s obvyklým násobením matic tvoří grupu mající dvojprvkovou normální podgrupu $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$. Příslušnou faktorgrupu značíme $PSL_2(\mathbb{Z})$. (Grupa $PSL_2(\mathbb{Z})$ má významnou roli při studiu tzv. modulárních forem.)

Je možné ukázat (ale není to úplně snadné), že grupa daná prezentací $\langle x, y \mid x^3, y^2 \rangle$ je izomorfní právě s grupou $PSL_2(\mathbb{Z})$. Přitom prvek x odpovídá třídě obsahující matici $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a prvek y třídě obsahující matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Poznámka. Fakt, že každá Ω-algebra dané variety je surjektivním obrazem volné Ω-algebry je naprosto zásadní například v teorii modulů nad daným okruhem, kde umožní pro daný modul vytvářet tzv. volné rezolventy. Ale to už je látka z jiného předmětu...