Domácí úloha z 27. listopadu 2015 (odevzdává se 4. prosince 2015)

Polynom $f = x^4+ax^3+bx^2+cx+d \in \mathbb{C}[x]$ má kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost). Nalezněte normovaný kubický polynom $g(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ mající kořeny

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_4),\\ \beta_2 &= (\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_4),\\ \beta_3 &= (\alpha_1+\alpha_4)(\alpha_2+\alpha_3),\end{aligned}$$

tj. vyjádřete koeficienty A, B, C pomocí koeficientů a, b, c, d.

[Poznámka: tento postup umožňuje řešit polynomiální rovnice 4. stupně, umíme-li řešit polynomiální rovnice 3. stupně (na což máme Cardanovy vzorce). Substitucí $y = x + \frac{a}{4}$ převedeme daný polynom do tvaru, kdy je koeficient u y^3 nulový. Bez újmy na obecnosti tedy lze předpokládat, že pro daný polynom f platí $a = 0$. Pak kořeny vzniklého kubického polynomu $g(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ splňují

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_4) = -(\alpha_1+\alpha_2)^2,\\ \beta_2 &= (\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_4) = -(\alpha_1+\alpha_3)^2,\\ \beta_3 &= (\alpha_1+\alpha_4)(\alpha_2+\alpha_3) = -(\alpha_1+\alpha_4)^2,\end{aligned}$$

neboť $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 0$. Vypočteme-li $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, dostaneme

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2 &= \pm\sqrt{-\beta_1},\\ \alpha_1+\alpha_3 &= \pm\sqrt{-\beta_2},\\ \alpha_1+\alpha_4 &= \pm\sqrt{-\beta_3},\end{aligned}$$

odkud snadno dopočítáme všechny kořeny původního polynomu f, dostáváme například $2\alpha_1 = (\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_1+\alpha_3)+(\alpha_1+\alpha_4)$, $2\alpha_2 = (\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_1+\alpha_3)-(\alpha_1+\alpha_4)$ atd.]