Domácí úloha z 4. prosince 2015 (odevzdává se 11. prosince 2015)

Je dán typ $\Omega = \{a\}$, kde a je unární operační symbol. Na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$ je dána struktura Ω-algebry unární operací $a_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která je pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ dána předpisem

$$a_{\mathbb{N}}(n) = \begin{cases} n-1, & \text{je-li } n \neq 1, \\ 1, & \text{je-li } n = 1. \end{cases}$$

1. Ukažte, že pro libovolnou kongruenci $\sim$ na Ω-algebře $\mathbb{N}$ platí: jestliže $m \sim n$ pro nějaké $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, pak také $m \sim 1$.

2. Popište svaz všech kongruencí na Ω-algebře $\mathbb{N}$.

[Návod – můžete postupovat například takto:

1. Nejprve ukažte indukcí vzhledem k u, že pokud $m, n, u \in \mathbb{N}$ splňují $m > n > u$ a $m \sim n$, pak také $m - u \sim n - u$. Dále ukažte, že jestliže pro $u \in \mathbb{N}$ platí $u \sim 1$, pak také pro každé $v \in \mathbb{N}$, $v < u$ platí $v \sim 1$. Pak pro dané $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, $m \sim n$ označte $k = m - n$, vydělte číslo $m - 1$ číslem k se zbytkem, tedy $m - 1 = kq + r$, $0 \leq r < k$, $q, r \in \mathbb{Z}$, a ukažte, že pomocí předchozích výsledků lze indukcí dokázat pro libovolné $t = 1, 2, \ldots, q$, že $m \sim m - kt$, tedy také $m \sim r + 1$. Nakonec vysvětlete, proč tedy také $m - r \sim 1$ a jak odtud dostanete, že $n \sim 1$.

2. Pokud pro zvolenou kongruenci $\sim$ existuje přirozené číslo n, pro které neplatí $n \sim 1$, zvolte nejmenší takové.]