Domácí úloha z 2. října 2015 (odevzdává se 9. října 2015)

Na množině $\mathcal{F}$ všech zobrazení $[0,1] \to [0,1]$ jsme na cvičení definovali následující uspořádání: pro libovolná $f, g \in \mathcal{F}$

$$f \leq g \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in [0,1]: \ f(x) \leq g(x)$$

a ukázali, že $(\mathcal{F}, \leq)$ je úplný distributivní svaz.

a) Nechť $\mathcal{R}$ je množina všech funkcí z $\mathcal{F}$, které jsou rostoucí. Rozhodněte, zda $\mathcal{R}$ je podsvaz svazu $\mathcal{F}$. Pokud ano, vysvětlete, zda je svaz $\mathcal{R}$ modulární, distributivní či úplný.

b) Nechť $\mathcal{S}$ je množina všech funkcí z $\mathcal{F}$, které jsou spojité. Rozhodněte, zda $\mathcal{S}$ je podsvaz svazu $\mathcal{F}$. Pokud ano, vysvětlete, zda je svaz $\mathcal{S}$ modulární, distributivní či úplný.

c) Nechť zobrazení $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ je určeno předpisem

$$\big(\varphi(f)\big)(x) = \big(f(x)\big)^2$$

pro každé $f \in \mathcal{F}$ a každé $x \in [0,1]$. Rozhodněte, zda je φ izotonní zobrazení, resp. homomorfismus svazů.

d) Nechť zobrazení $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ je určeno předpisem

$$\big(\psi(f)\big)(x) = \tfrac{1}{2}\big(f(x) + f(1-x)\big)$$

pro každé $f \in \mathcal{F}$ a každé $x \in [0,1]$. Rozhodněte, zda je ψ izotonní zobrazení, resp. homomorfismus svazů.