Domácí úloha z 23. října 2015 (odevzdává se 30. října 2015)

V podokruhu $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ tělesa komplexních čísel $\mathbb{C}$ jsou dány podmnožiny I, J takto:

$$I = \{a + bi;\ a, b \in \mathbb{Z},\ 11|a + 5b\},$$
$$J = \{a + bi;\ a, b \in \mathbb{Z},\ 13|a + 5b\}.$$

Pro každou z množin I, J rozhodněte, zda je ideálem okruhu $\mathbb{Z}[i]$ (své rozhodnutí dokažte). A pokud skutečně jde o ideál, zjistěte, zda je to ideál hlavní (je-li hlavní, nalezněte nějaké číslo, které jej generuje, a tento fakt dokažte; není-li hlavní, z předpokladu o existenci generátoru odvoďte spor).

[Návod pro hledání generátoru ideálu v okruzích $\mathbb{Z}[i\sqrt{m}] = \{a + bi\sqrt{m};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, kde $m \in \mathbb{N}$, či pro důkaz, že takový generátor neexistuje: Jestliže pro nějaká $x, y \in \mathbb{Z}$ máme hlavní ideál $I = (x + yi\sqrt{m})$ okruhu $\mathbb{Z}[i\sqrt{m}]$, pak pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ taková, že $a+bi\sqrt{m} \in I$, nutně existují $c, d \in \mathbb{Z}$ tak, že $a+bi\sqrt{m} = (c+di\sqrt{m})\cdot(x+yi\sqrt{m})$. Protože absolutní hodnota součinu dvou komplexních čísel je rovna součinu jejich absoulutních hodnot, plyne odtud $|a+bi\sqrt{m}| = |c+di\sqrt{m}|\cdot|x+yi\sqrt{m}|$, a tedy umocněním $a^2+b^2m = (c^2 + d^2m)\cdot(x^2 + y^2m)$, a proto celé číslo $x^2 + y^2m$ je dělitelem celého čísla $a^2 + b^2m$. Neznámý generátor ideálu I v takovém okruhu lze tedy hledat tak, že pro několik prvků $a + bi\sqrt{m} \in I$ nalezneme největší společný dělitel d čísel $a^2 + b^2m$ v $\mathbb{Z}$, a k tomuto nalezenému d projdeme všechny dvojice celých čísel x, y splňující $x^2 + y^2m \mid d$ (takových dvojic je jen konečně mnoho) a pro každou zjistíme, zda je $x + yi\sqrt{m}$ hledaný generátor.]