

Domácí úkol z 21. 9. 2015

Příklad 1. Nalezněte matici přechodu od báze \mathcal{U} k bázi \mathcal{V} , je-li:

- $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_3\} = \{(2, 1, 0); (0, 3, 5); (5, -10, 6)\}$
- $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\} = \{(2, -5, -10); (-6, 25, -7); (19, -28, 18)\}$

Řešení. Z definice matice přechodu hledáme koeficienty $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$ takové, že bude splněna soustava rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 & (2, -5, -10) &= a(2, 1, 0) + b(0, 3, 5) + c(5, -10, 6) \\ \mathbf{v}_2 &= d\mathbf{u}_1 + e\mathbf{u}_2 + f\mathbf{u}_3 & \iff (-6, 25, -7) &= d(2, 1, 0) + e(0, 3, 5) + f(5, -10, 6) \\ \mathbf{v}_3 &= g\mathbf{u}_1 + h\mathbf{u}_2 + i\mathbf{u}_3 & (19, -28, 18) &= g(2, 1, 0) + h(0, 3, 5) + i(5, -10, 6) \end{aligned}$$

Rozepsáním rovnic získáme tři soustavy rovnic, kde má každá soustava tři rovnice a tři neznámé.

$$\begin{array}{rcl} 2 = 2a & + 5c & -6 = 2d & + 5f & 19 = 2g & + 5i \\ -5 = a & + 3b - 10c & 25 = d & + 3e - 10f & -28 = g & + 3h - 10i \\ -10 = & + 5b + 6c & -7 = & + 5e + 6f & 18 = & + 5h + 6i \end{array}$$

Je vidět, že se prakticky jedná o jednu soustavu s odlišnými absolutními členy a jiným označením neznámých. Proto můžeme řešit všechny tři soustavy naráz úpravou levého bloku následující matice na schodovitý tvar, popř. až na jednotkovou matici:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 5 & 2 & -6 & 19 \\ 1 & 3 & -10 & -5 & 25 & -28 \\ 0 & 5 & 6 & -10 & -7 & 18 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -10 & -5 & 25 & -28 \\ 0 & 5 & 6 & -10 & -7 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right) \sim \dots \\ & \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Pravý blok upravené matice (oddělený dvojitou čarou) je zřejmě hledanou maticí přechodu od báze \mathcal{U} k bázi \mathcal{V} , neboť se vlastně jedná o matici řešení soustav ve tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a & d & g \\ 0 & 1 & 0 & b & e & h \\ 0 & 0 & 1 & c & f & i \end{array} \right), \text{ (pokud nedošlo k výměně sloupců!)}$$

Hledaná matice přechodu je tedy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.