Domácí úkol z 22. 10. 2015

Příklad 4. ***Skripta, příklad 53 na straně 126.*** *Nalezněte přímku r, která protíná přímku p, rovinu α a prochází bodem M. Přitom:*

- $p : X = [0, 0, -6, -7] + t(1, 1, 2, 1), t \in \mathrm{R}$;
- $\alpha : X = [2, 1, 1, 1] + r(1, 2, -1, 1) + s(-1, 2, 1, 2), r, s \in \mathrm{R}$;
- $M = [7, -2, -1, 0]$.

Řešení. Dá se řešit různými způsoby, ukážeme dva z nich:

1. *Geometrický.* Přímka p a bod M zadávají jednoznačně jistou rovinu σ, ve které leží hledaná přímka r. Počet řešení pak bude záležet na vzájemné poloze rovin σ a α.

   - pokud nastane případ $\alpha \cap \sigma = \emptyset$, úloha nebude mít žádné řešení;
   - v případě $\alpha \cap \sigma = \{N\}$ úloha bude mít právě jedno řešení – přímku $r = MN$;
   - pokud budou roviny splývat nebo se protínat v přímce, úloha bude mít nekonečně mnoho řešení.

   Pokud označíme bod $[0, 0, -6, -7]$ (z vyjádření přímky p) jako P, dva směrové vektory roviny σ mohou být $(1, 1, 2, 1)$ (z téhož vyjádření) a $\overrightarrow{PM} = (7, -2, 5, 7)$. Protože $M \in \sigma$, parametrické vyjádření bude tvaru

   $$\sigma : X = [0, 0, -6, -7] + u(1, 1, 2, 1) + v(7, -2, 5, 7), u, v \in \mathrm{R}$$

   .

   Nyní můžeme zjistit průnik rovin σ a α. Protože hledáme jen konkrétní průnik, nebudeme se „zatěžovat“ obecným postupem jako na cvičení a přejdeme rovnou k věci.

   $$[0, 0, -6, -7] + u(1, 1, 2, 1) + v(7, -2, 5, 7) = [2, 1, 1, 1] + r(1, 2, -1, 1) + s(-1, 2, 1, 2)$$

   $$u(1, 1, 2, 1) + v(7, -2, 5, 7) - r(1, 2, -1, 1) - s(-1, 2, 1, 2) = [2, 1, 7, 8]$$

   Rozepíšeme a dostaneme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých, kterou vyřešíme. Stačí přitom znát jen jednu z dvojic u, v a r, s, protože pak jsme již schopni hledaný podprostor z příslušného vyjádření vypočítat.

   $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & 8 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Protože nám vyšly konkrétní hodnoty parametrů, průnikem obou rovin bude konkrétní bod N. Dosadíme tedy např. do vyjádření roviny α za parametry r a s příslušné hodnoty a vypočítáme souřadnice bodu N.

$$N = [2,1,1,1] + (1,2,-1,1) - 2(-1,2,1,2) = [5,-1,-2,-2]$$

Nyní už můžeme vyjádřit přímku r – prochází bodem M a jako směrový vektor zvolíme $\overrightarrow{NM}$.

$$r : X = [7,-2,-1,0] + w(2,-1,1,2), w \in \mathrm{R}$$

2. *Analytický.* Pomocí parametru si vyjádříme rovnice všech přímek, které prochází bodem M a jsou s přímkou p různoběžné. Poté budeme zkoumat jejich polohu vůči rovině α a určíme, jestli a za jakých podmínek mohou tyto přímky protínat rovinu α.

   Pokud bod R leží na přímce p, musí jeho souřadnice vyhovovat parametrickému vyjádření této přímky – jinými slovy, $R = [t, t, -6+2t, -7+t]$. Každá přímka r', která prochází bodem M a je různoběžná s přímkou p (tedy existuje $R \in p$ takové, že $R \in r'$) má následující parametrické vyjádření:

$$r' : X = M + a\overrightarrow{MR} = [7,-2,-1,0] + a(t-7, t+2, 2t-5, t-7)$$

   Nyní způsobem známým ze cvičení prověřme polohu přímky r' a roviny α.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ t-7 & t+2 & 2t-5 & t-7 \\ \hline 5 & -3 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3t-12 & -12+\frac{3t}{4} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3\frac{t-1}{t-4} \end{array}\right)$$

   Aby se přímka r' a rovina α protľaly, musí řádek pod vodorovnou čarou obsahovat samé nuly, tedy musí být $t = 1$. (Během úprav bylo ještě třeba ověřit, zda by také nemohlo vyhovovat $t = 4$, což ale nebyla pravda.) Dosazením do vyjádření přímky r' dostaneme přímo hledanou rovnici přímky.

$$r : X = [7,-2,-1,0] + s(-6,3,-3,-6), s \in \mathrm{R}$$