Domácí úkol z 26. 10. 2015

Příklad 5. ***Skripta, příklad 60 na straně 128.*** *V $\mathcal{A}_3$ nalezněte parametrické vyjádření příčky v mimoběžek p, q, která je rovnoběžná s rovinami ϱ a σ. Přitom:*

- $p : X = [-5, 2, 2] + t(2, 0, 1)$;
- $q : z - 2 = 0, 5x - 8y + 9z + 100 = 0$;
- $\varrho : X = [3, 0, 0] + r(3, 2, 0) + s(1, 0, 2)$;
- $\sigma : x - 4y - 3z + 12 = 0$.

Řešení. Úlohu převedeme na hledání příčky mimoběžek p, q zadané směrem. Tento směr bude přitom zřejmě totožný se směrem průsečnice rovin ϱ a σ – nejprve tedy najdeme jejich průsečnici.

Převedeme vyjádření roviny ϱ na obecný tvar. Protože $(3, 2, 0) \times (1, 0, 2) = (4, -6, -2)$ a $[3, 0, 0] \in \varrho$, obecná rovnice roviny ϱ je $2x - 3y - z - 6 = 0$. Nyní můžeme vyřešit soustavu dvou rovnic (vyjádření rovin ϱ a σ) o třech neznámých.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 6 \\ 1 & -4 & -3 & -12 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{l} x = 6 + u \\ y = u \\ z = 6 - u \end{array}$$

Hledaný směr příčky mimoběžek p, q je tedy vektor $(1, 1, -1)$. Způsobem popsaným na cvičení dále zjistíme její parametrické vyjádření.

Směr $(1, 1, -1)$ a přímka p zadávají rovinu α, která protíná přímku q v jistém bodě Q – ten bude průsečíkem hledané příčky s přímkou q. Parametrické vyjádření roviny α je tedy zřejmě $\alpha : X = [-5, 2, 2] + t_1(2, 0, 1) + t_2(1, 1, -1)$ – protože je přímka q vyjádřena neparametricky, bude vhodné i vyjádření roviny α převést na obecné. Protože $(2, 0, 1) \times (1, 1, -1) = (-1, 3, 2)$ a $[-5, 2, 2] \in \alpha$, obecná rovnice roviny α je $x - 3y - 2z + 15 = 0$. Nyní můžeme vyřešit soustavu tří rovnic (vyjádření roviny α a přímky q) o třech neznámých.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -15 \\ 5 & -8 & 9 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow Q = [-38, -9, 2]$$

Hledané parametrické vyjádření příčky v je tedy $v : X = [-38, -9, 2] + a(1, 1, -1)$.