LINEÁRNÍ PERSPEKTIVA

Lineární perspektiva je významnou aplikací středového promítání. V technické praxi se používá především k zobrazování objektů větších rozměrů, napodobuje tak lidské vidění. Ze středu promítání (oka) se objekty promítají do roviny (nahrazuje sítnici). Perspektivní obrazy jsou například fotografie. Abychom dostali názorný obraz odpovídající tomu, co vidí lidské oko, je třeba zavést na středové promítání jisté omezující podmínky.

1. Pozorovaný objekt leží uvnitř rotační kuželové plochy, která má vrchol ve středu promítání, osu kolmou k průmětně a vrcholový úhel v rozmezí 40° - 50°. Tato kuželová plocha se nazývá **zorné pole** (**zorná kuželová plocha**). Průmětnu protíná v **zorné kružnici** k_z o středu v hlavním bodě a její poloměr je maximálně $r = d$ **tg**$25°$ (přibližně $d/2$) a jelikož objekt leží v zorném poli, tak průmět objektu leží uvnitř zorné kružnice. Dále označíme-li n největší průčelný rozměr objektu a v vzdálenost objektu od střed promítání, pak $n<v<3n$. První nerovnost plyne z toho, že objekt leží v zorném poli. Kdyby neplatila druhá nerovnost, byl by pozorovatel od objektu příliš daleko a průmět by se blížil rovnoběžnému promítání.

2. Pozorovatel je od objektu vzdálen aspoň 21 cm (mez zřetelného vidění).

3. Je dána pevná vodorovná rovina π, na které leží pozorovaný předmět a většinou i pozorovatel.

Středové promítání, které splňuje podmínky 1, 2, 3 se nazývá **lineární perspektiva.**

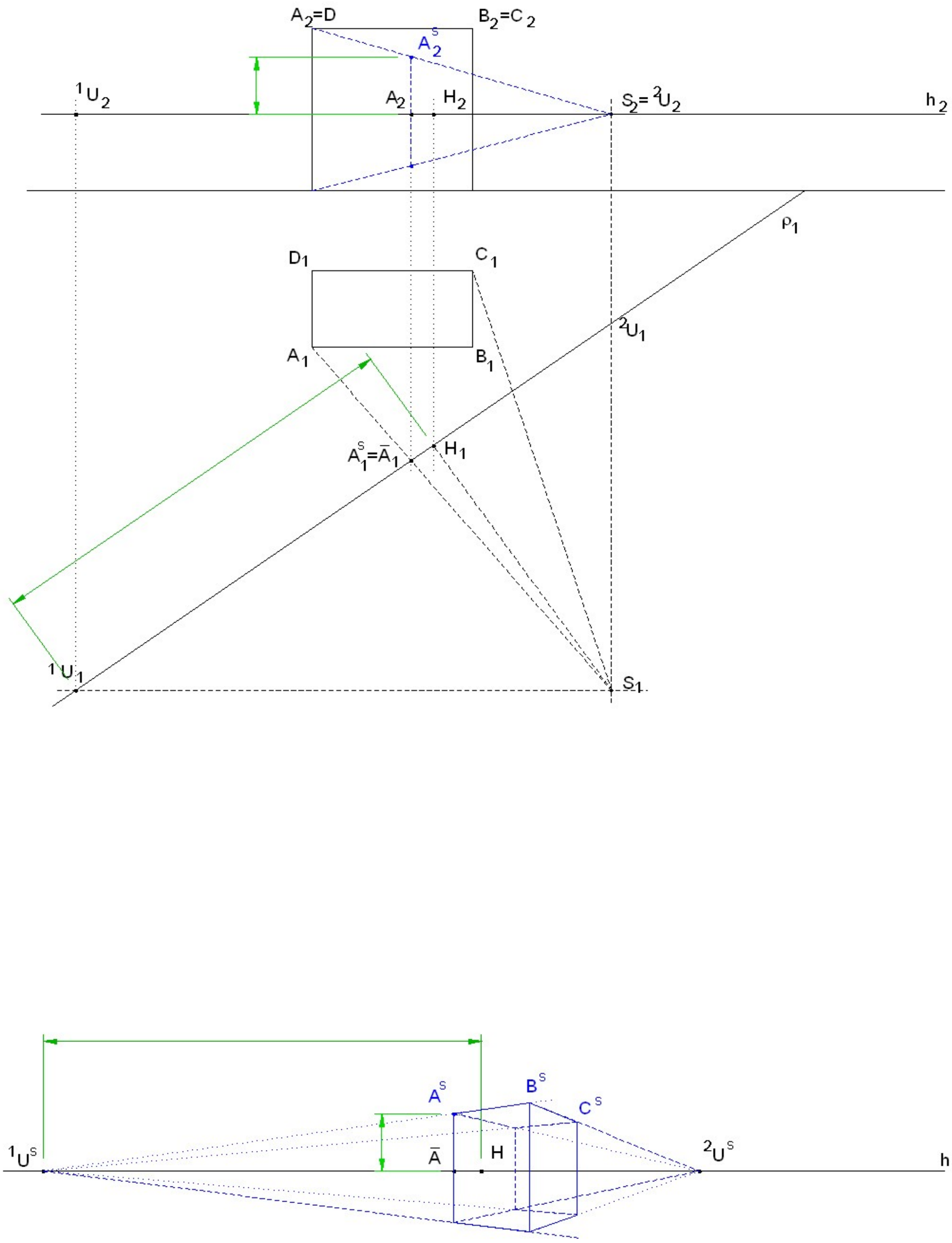
Zavedeme následující označení:

Průmětna ρ - většinou svislá, **oko** S - střed promítání, **hlavní bod** H - pravoúhlý průmět S do ρ, distance d - velikost úsečky SH, osa perspektivy s - přímka SH, základní rovina π - pomocná rovina z podmínky 3, základnice z - průsečnice ρ a π, stanoviště S_1 - pravoúhlý průmět S do π, obzorová rovina π' - směrová rovina roviny π, horizont h - průsečnice π' a ρ, hlavní vertikála v - přímka v ρ procházející H kolmo k z, základní bod Z - průsečík v a z, výška perspektivy - vzdálenost z od h, levý, pravý resp. horní, dolní distančník D^l, D^p, D^h, D^d - průsečíky distanční kružnice s h resp. v, hloubkové přímky - přímky kolmé k ρ, středový průmět bodu A do ρ označíme A^s a budeme ho nazývat perspektivou bodu A. Středový průmět bodu A_1 (pravoúhlý průmět A do π) označíme A_1^s a nazveme ho perspektiva půdorysu. (Nezaměňovat s půdorysem perspektivy!)

Daný objekt můžeme perspektivně zobrazit buď s využitím jiné zobrazovací metody, pak se lineární perspektiva nazývá **vázaná,** nebo jen s využitím metod středového promítání, pak se perspektiva nazývá **volná**.

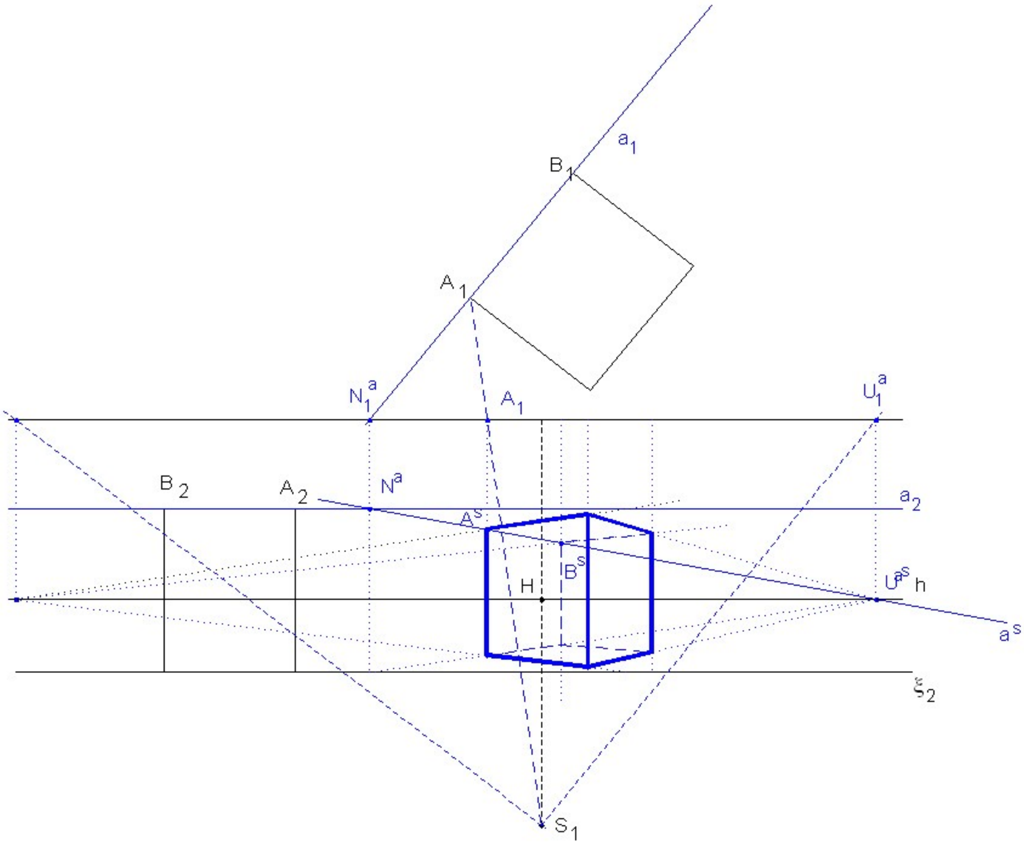
Vázaná perspektiva (nepřímé metody)

Historicky nejstarší nepřímou metodou je **průsečná metoda**. Objekt je zadán pomocí Mongeovy projekce a perspektiva objektu se sestrojuje rovněž využitím prostředků Mongeovy projekce. Daný objekt je postaven na π, perspektiva je dána průmětnou ρ, okem a základní rovinou, kterou je půdorysna. Průmětnu volíme podle toho, která část objektu má být viditelná. Oko S volíme tak, aby půdorys osy s ležel uvnitř ostrého úhlu daného styčnými přímkami vedenými z S_1 k půdorysu objektu. Výška perspektivy by měla odpovídat výšce pozorovatele a vzdálenost oka od objektu je větší než největší průčelný rozměr objektu. Perspektivní obraz objektu tvoří perspektivy všech jeho bodů, tj. středové průměty z S do ρ. Průmětnu ρ přemístíme (není rovnoběžná s π ani ν, proto žádný pravoúhlý průmět perspektivy nesplývá s perspektivou). V nákresně zvolíme horizont h a hlavní bod H na h, rovinu ρ pak přemístíme tak, aby horizont resp. hlavní bod přešel do zvolené přímky resp. bodu. Středový průmět bodu A z S do roviny ρ označíme A^s. Dále označme $\bar{A}$ průsečík první promítací přímky bodu A^s s horizontem h. Vzhledem k poloze první promítací přímky a horizontu vzhledem k průmětnám platí $|H_1A'_1|=|HA'|$, $|A'_2A^s_2|=|A'A^s|$. Odtud vyplývá i konstrukce perspektivy. Sestrojíme na h bod A' tak, aby platilo $|H_1A'_1|=|HA'|$ (zachováme orientaci) a na kolmici k h v bodě A' sestrojíme bod A^s tak, aby $|A'_2A^s_2|=|A'A^s|$. Další body sestrojíme stejně. Ke konstrukci můžeme také využít úběžníků přímek rovnoběžných s π. (Úběžníky přímek rovnoběžných s π leží na horizontu.) Sestrojíme například úběžníky ^1U, ^2U přímek ***AB, BC*** a při konstrukci perspektiv dalších bodů můžeme využít toho, že středové průměty navzájem rovnoběžných přímek mají společný úběžník.



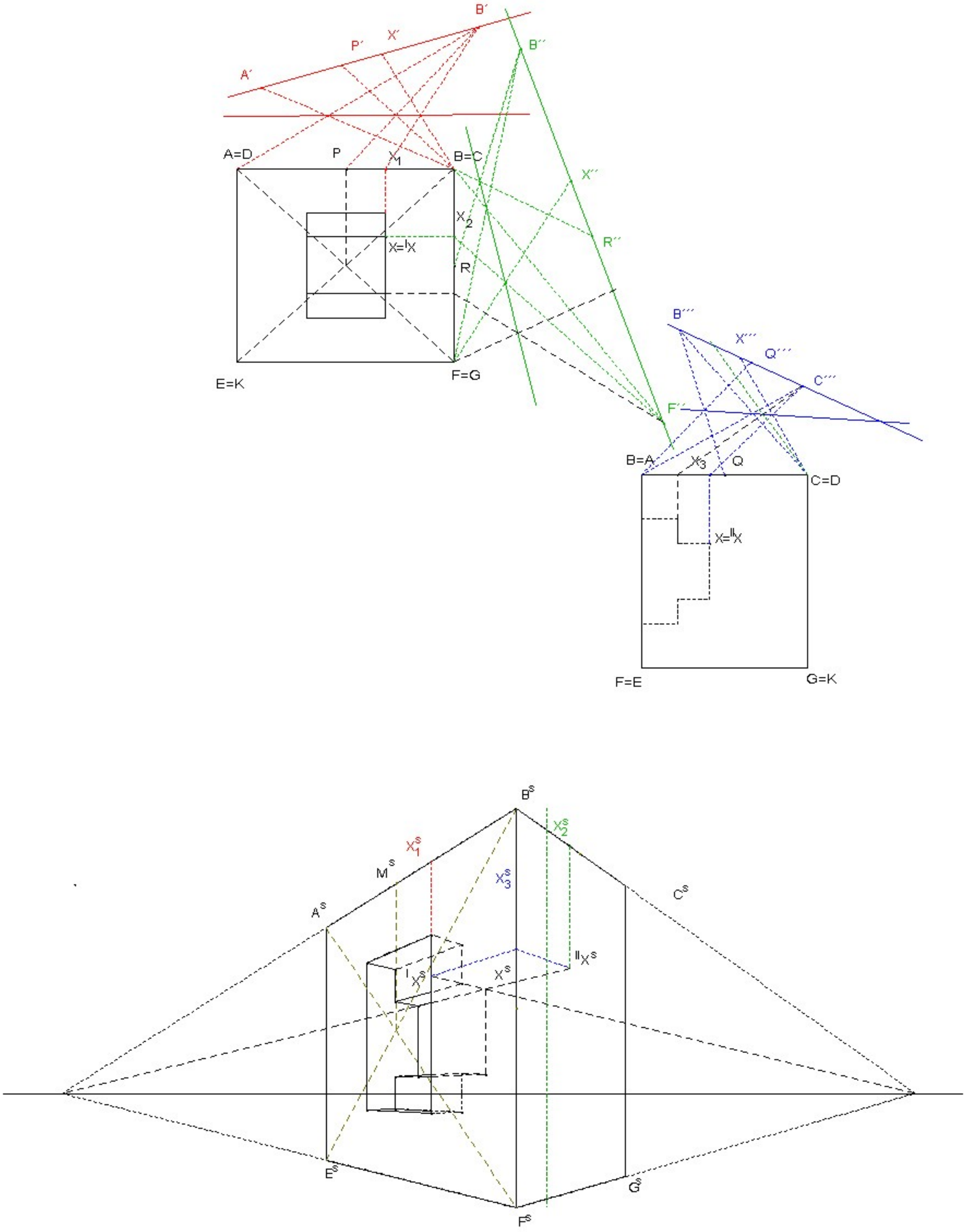
Obr.1 Průsečná metoda

Další nepřímou metodou je **stopníková metoda.** Opět vycházíme z Mongeovy projekce, ovšem tentokrát volíme objekt vzhledem k soustavě souřadnic tak, aby půdorys byl nad osou ***x*** a nárys pod osou ***x***. Objekt stojí na základní rovině (tentokrát ji označíme ξ) rovnoběžné s π. Průmětnu ρ ztotožníme s nárysnou, perspektiva tedy tentokrát splyne se svým nárysem. Dále zvolíme oko ***S*** a horizont ***h***, výška perspektivy by opět měla odpovídat výšce pozorovatele. Aby se nepřekrýval nárys objektu v Mongeově projekci s perspektivou, posuneme nárys ve směru osy ***x*** a otočíme do průčelné polohy. Nárys a půdorys si sice neodpovídají v Mongeově projekci, ale pro konstrukce má nárys jen pomocnou roli. Půdorys objektu umístíme tak, aby úběžník aspoň jednoho směru ležel v nákresně. (Například úběžník U^a přímky ***a= AB.***) Sestrojíme hlavní bod a úběžníky některých vodorovných přímek. Sestrojíme perspektivu bodu ***A***. Bod ***A*** leží na vodorovné přímce ***a***, její nárys je rovnoběžný s osou ***x***. Určíme nárysný stopník N^a přímky ***a***. N^a leží v ν (tedy i v ρ) a splývá se středovým průmětem. Perspektiva a^s přímky ***a*** je přímka U^{as} N^a. Na ní leží perspektiva bodu ***A***. Tu sestrojíme takto. Promítneme bod ***A*** z ***S*** do ρ, půdorys $A^s 1$ perspektivy A^s leží na ose ***x***, a protože nárys perspektivy splývá s perspektivou leží A^s na ordinále ***a*** na přímce a^s. Další body doplňujeme stejně, pokud máme na nákresně úběžníky dalších přímek, můžeme využít i jich.



Obr.2 Stopníková metoda

Pro konstrukci složitějších půdorysů můžeme využít další nepřímou metodu a to tzv. **incidenční měřítko.** Tato metoda využívá Pappovy věty (dvojpoměr se středovým promítáním zachovává). Objekt uzavřeme do kvádru a do jeho stěn pravoúhle objekt promítneme. Kvádr je dán nárysem a bokorysem libovolně v průmětně. Bod ***X*** objektu nejprve pravoúhle promítneme do bodu ^{I}X ležícího ve stěně **ABFE** a do bodu ^{II}X ležícího ve stěně ***BCGF***. Bod ^{I}X pravoúhle promítneme do bodu X_1 na přímce ***AB*** a do bodu X_2 na přímce ***BF***. Bod ^{II}X pravoúhle promítneme do bodu X_3 na přímce ***BC***. Sestrojíme perspektivu kvádru pomocí některé nám zatím známé metody. (V obrázku není znázorněno.) Sestrojíme vhodné přímky ***A´B´, B´´F´´, B´´´C´´´***, které jsou po řadě projektivní a ***AB, BF, BC,*** tak, aby platilo $|A´B´|=|A^sB^s|$ atd. Víme, že projektivita je dána třemi odpovídajícími si páry bodů, sestrojíme proto ještě perspektivy středů ***P, R, Q*** úseček ***AB, BF, BC***. (Například pomocí úhlopříček). Můžeme sestrojit bod ***X´*** odpovídající v dané projektivitě bodu X_1, bod ***X´´*** odpovídající bodu X_2 i bod ***X´´´*** odpovídající bodu X_3. (Projektivity v obrázku jsou doplňovány užitím direkční osy, průsečíky přímek ***AB´*** a ***A´B***, ***BP´*** a ***B´P*** atd. leží na direkční ose.) Protože platí Pappova věta, platí $|A^sX_1{}^s|=|A´X´|$ atd. a na perspektivě hran kvádru získáme perspektivy bodů X_i. Body X_i jsme získali pravoúhlým promítáním bodu ***X*** do stěn a hran kvádru a jelikož známe úběžníky hran můžeme sestrojit perspektivu bodu ***X.***

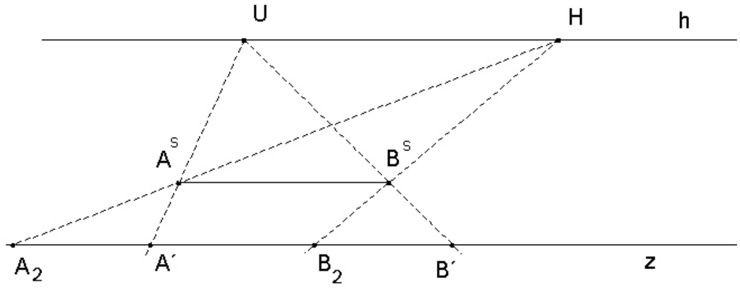


Obr.3 Incidenční měřítko

Nepřímé metody se používají především v případech, když známe sdružené průměty objektu. Neznáme-li je podrobně a chceme-li perspektivní obraz průběžně doplňovat, opravovat apod., používáme přímé metody.

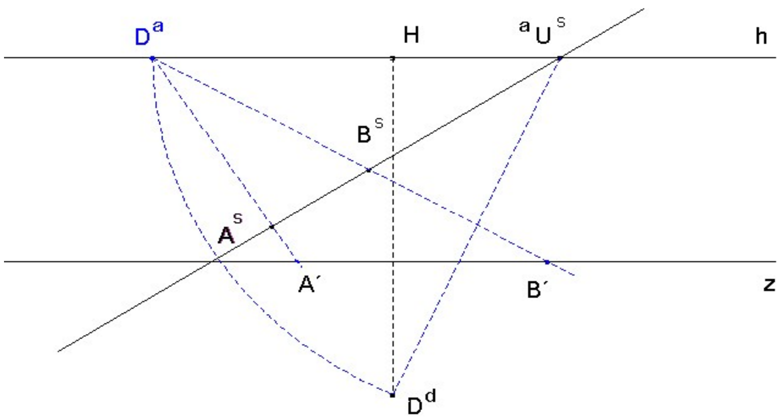
Volná perspektiva (přímé metody)

Volná perspektiva využívá středového promítání (přizpůsobenému podmínkám 1, 2, 3) a jeho vlastností ke konstrukcím perspektiv objektů. Některé konstrukce středového promítání jsou přizpůsobeny. Často je třeba nanést úsečku dané délky na danou přímku (většinou horizontální nebo vertikální). Ze středového promítání známe konstrukci pro určení skutečné velikosti úsečky, tuto konstrukci aplikujeme na lineární perspektivu. Nejprve určíme skutečnou velikost úsečky ležící v základní rovině π. Úběžníky všech přímek rovnoběžných s π leží na horizontu, stopníky na základnici. Mohou nastat dva případy. Přímka, na níž úsečka leží, je rovnoběžná se základnicí ***z*** a její úběžník a stopník je nevlastní, nebo úběžník přímky je vlastní. Nejprve určíme skutečnou velikost úsečky rovnoběžné se základnicí ***z***. Jestliže je úsečka rovnoběžná se ***z***, je rovnoběžná i s průmětnou ρ, proto velikost pravoúhlého průmětu úsečky ***AB*** do ρ je skutečnou velikostí úsečky ***AB***. Pravoúhle promítací přímky do ρ jsou hloubkové přímky, jejich úběžník je hlavní bod. Promítneme-li z ***H*** body A^s, B^s na základnici do bodů A_2, B_2, je úsečka A_2B_2 pravoúhlým průmětem ***AB*** do ρ. Nechť ***U*** je libovolný bod ležící na horizontu ***h***. Promítneme-li z ***U*** body A^s, B^s na ***z*** do bodů A', B' (v prostoru promítáme ***AB*** na ***z*** přímkami směru ***US***), je zřejmé, že $|A'B'|=|A_2B_2|=|AB|$. (viz obr.4)



Obr.4

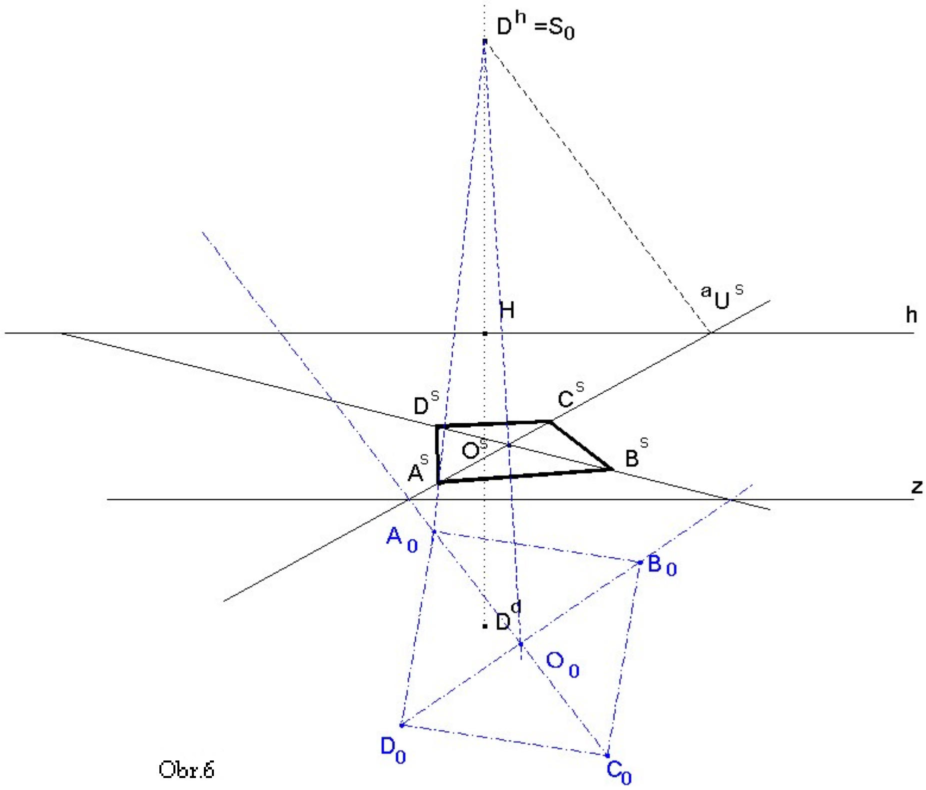
Jestliže není úsečka ***AB*** rovnoběžná se ***z***, je úběžník ^aU přímky ***a=AB*** vlastní a použijeme upravenou konstrukci pomocí dělicí kružnice. Perspektivu máme zadánu některým z distančníků, předpokládejme např. dolním distančníkem D^d. Středový průmět směrové přímky ***a´*** přímky ***a*** je horizont ***h***, sklopíme ***a´*** (známe-li D^d je $(a')={}^aUD^d$). Kružnice se středem U^a a poloměr $|{}^aUD^d|$ je dělicí kružnice. Na ní nebudeme vybírat libovolný bod, ale zvolíme jeden její průsečík s horizontem. Označíme jej D^a a nazýváme jej **dělicí bod** přímky ***a***. Spojnice bodu D^a a ***U*** je horizont, rovnoběžka vedená stopníkem je základnice. Promítneme-li z D^a body A^sB^s na základnicí do bodů $A'B'$ je tedy $|AB|=|A'B'|$. (viz obr.5)



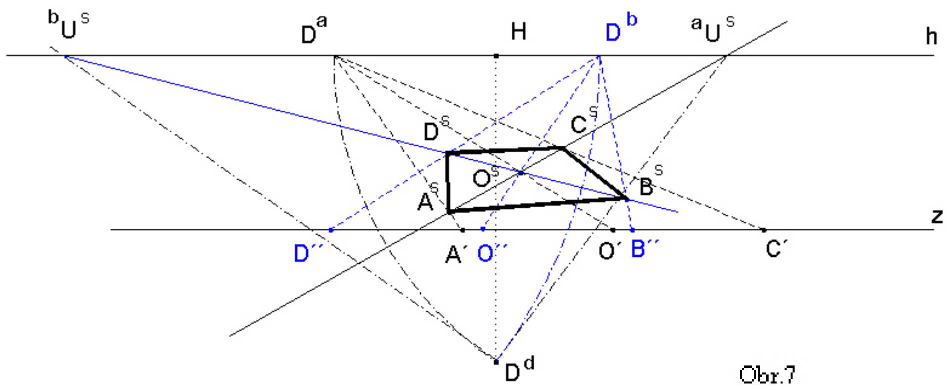
Obr.5

Sestrojíme čtverec v základní rovině π se středem ***O*** a vrcholem ***A***, perspektiva je dána horizontem, základnicí a dolním distančníkem. K sestrojení můžeme buď využít otočení π do průmětny (konstrukce pomocí kolineace, kterou známe ze středového promítání), nebo nanášení úseček dané délky podle předchozího. Pomocí otočení: Nejprve sestrojíme střed kolineace S_0 (otočením směrové roviny π'do průmětny). Stopa roviny π je základnice ***z***, úběžnice je horizont ***h***, kolineace je tedy dána středem S_0, osou ***z***, a úběžnicí ***h***. Sestrojíme body A_0, O_0 (obrazy A^s, O^s v dané kolineaci), doplníme na čtverec a určíme kolineární obrazy zbývajících bodů. (viz obr.6)

Jiná konstrukce: Přímka ***a=OA*** leží v π, její úběžník $\boldsymbol{U^a}$ je průsečík $\boldsymbol{a^s}$ s ***h***. Určíme dělicí bod přímky ***a***, z něj promítneme $\boldsymbol{A^s}$ a $\boldsymbol{O^s}$ do bodů ***A´*** a ***O´*** na základnici. Určili jsme velikost poloviny úhlopříčky, sestrojíme ***C´*** (souměrný podle ***O´*** s ***A´***), z $\boldsymbol{D^a}$ jej promítneme zpět na $\boldsymbol{a^s}$ do bodu $\boldsymbol{C^s}$. Přímka ***b=OB*** je kolmá na ***a***, její úběžník určíme sklopením směrové roviny $\pi´$ do průmětny (platí - ***(a´)*** je kolmá na ***(b´)*** a $\boldsymbol{a´=U^aD^d}$, $\boldsymbol{b´=U^bD^d}$.) Na přímce ***b*** sestrojíme(stejnou konstrukcí) body ***B, D*** tak, aby platilo ***|DO|=|BO|=|AO|=|CO|.*** (viz obr.7)



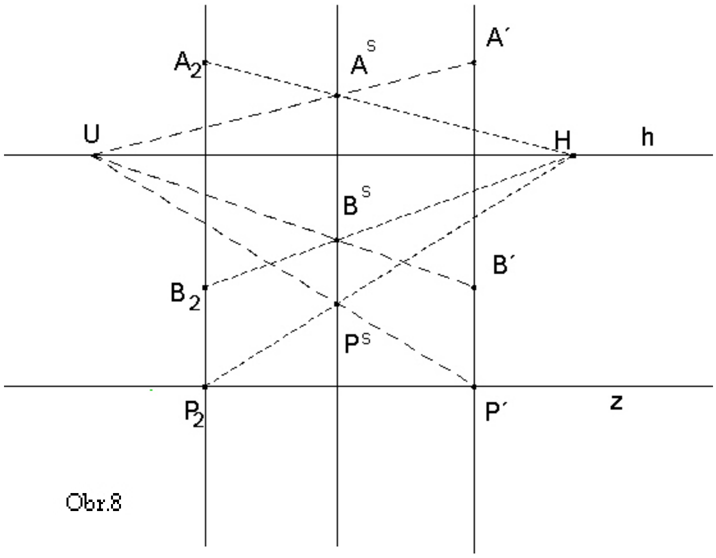
Obr.6



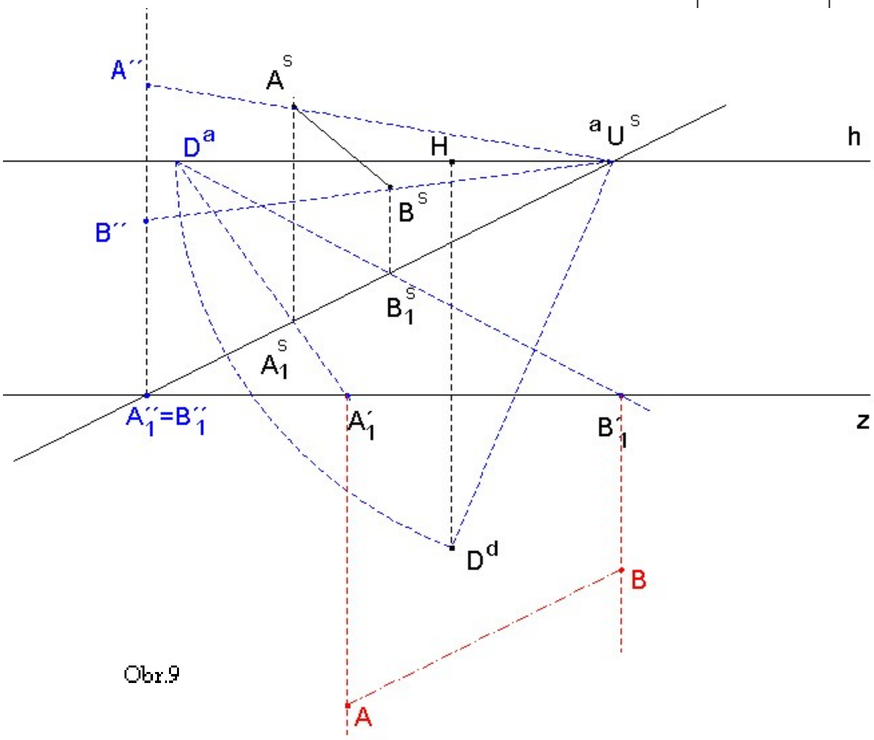
Obr.7

Leží-li úsečka na svislé přímce, je rovnoběžná s průmětnou a velikost úsečky je rovna velikosti pravoúhlého průmětu. Mějme dánu úsečku ***AB*** ležící na svislé přímce ***a***. Pravoúhlé a středové průměty bodů leží na ordinále. Předpokládejme, že známe (příp. sestrojíme) průsečík ***P*** přímky ***a*** se základní rovinou π. $\boldsymbol{P_2}$ pak leží na ***z*** a na ordinále (tj. na přímce $\boldsymbol{P^sH}$). Protože je ***a*** kolmá k π, je $\boldsymbol{a_2}$ rovnoběžná s $\boldsymbol{a^s}$. Určíme $\boldsymbol{A_2B_2}$ a získali jsme skutečnou velikost úsečky ***AB***. Je zřejmé, že pokud vybereme libovolný bod ***U*** na horizontu, z něj promítneme ***P*** do ***P´*** na základnici, sestrojíme přímku ***a´*** rovnoběžnou s $\boldsymbol{a^s}$ a na ni promítneme z ***U*** body ***A, B*** do bodů ***A´, B´***, pak platí $\boldsymbol{|AB|=|A_2B_2|=|A´B´|}$. (viz obr.8)

Pomocí předchozích konstrukcí určujeme skutečnou velikost úsečky ***AB*** ležící na obecné přímce ***a***. Máme dán perspektivní průmět a^s přímky ***a*** a perspektivu půdorysu a_1^s. a_1^s leží v π, pomocí dělicího bodu určíme skutečnou velikost úsečky A_1B_1 (pravoúhlý průmět ***AB*** do a_1.). Určíme velikost úseček AA_1, BB_1 (například promítnutím z bodu ${}^{a1}U$). Sestrojíme ve skutečné velikosti lichoběžník AA_1B_1B a máme skutečnou velikost úsečky ***AB***. (viz obr.9)



Obr.8

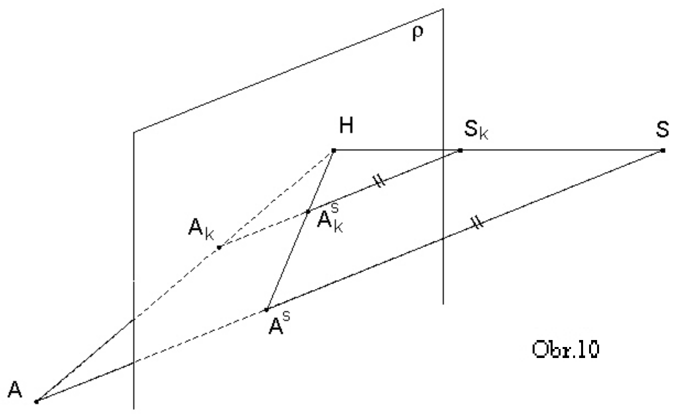


Obr.9

Redukce distance

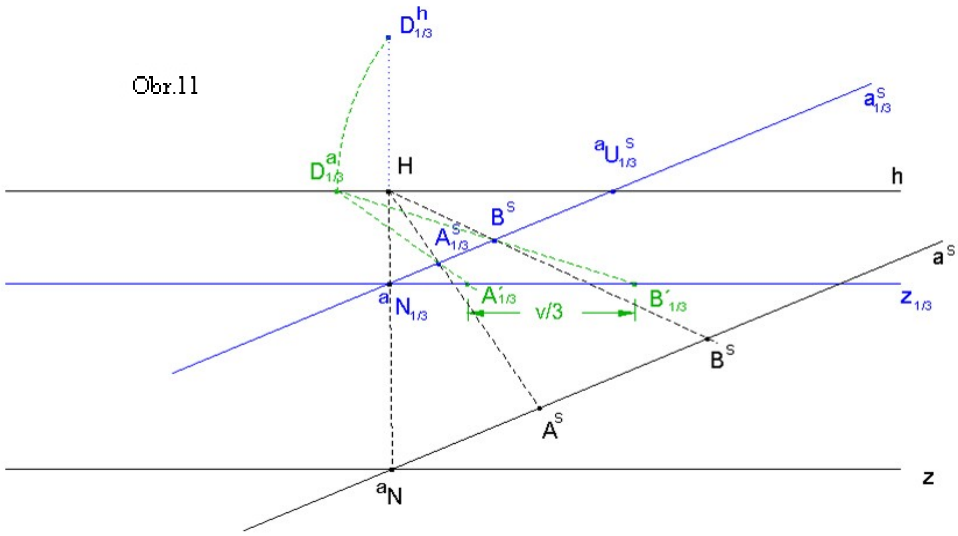
Abychom pro perspektivní obraz využili co největší část nákresny, je třeba volit větší distanci a pak vychází distančníky i dělicí body mimo nákresnu. Tento problém řešíme pomocí tzv. **redukce distance.** V prostoru uvažujeme stejnolehlost se středem ***H*** a koeficientem *k* (aby metoda měla požadovaný efekt je *k* větší než nula a menší než *1*). V této stejnolehlosti se střed promítání ***S*** zobrazí do bodu S_k, bod ***A*** do bodu A_k a středový průmět A^s bodu ***A*** se zobrazí do A^s_k. (viz obr.10)

Z vlastností stejnolehlosti je zřejmé, že A^s_kje také průmět bodu A_k do průmětny ρ z bodu S_k.



Obr.10

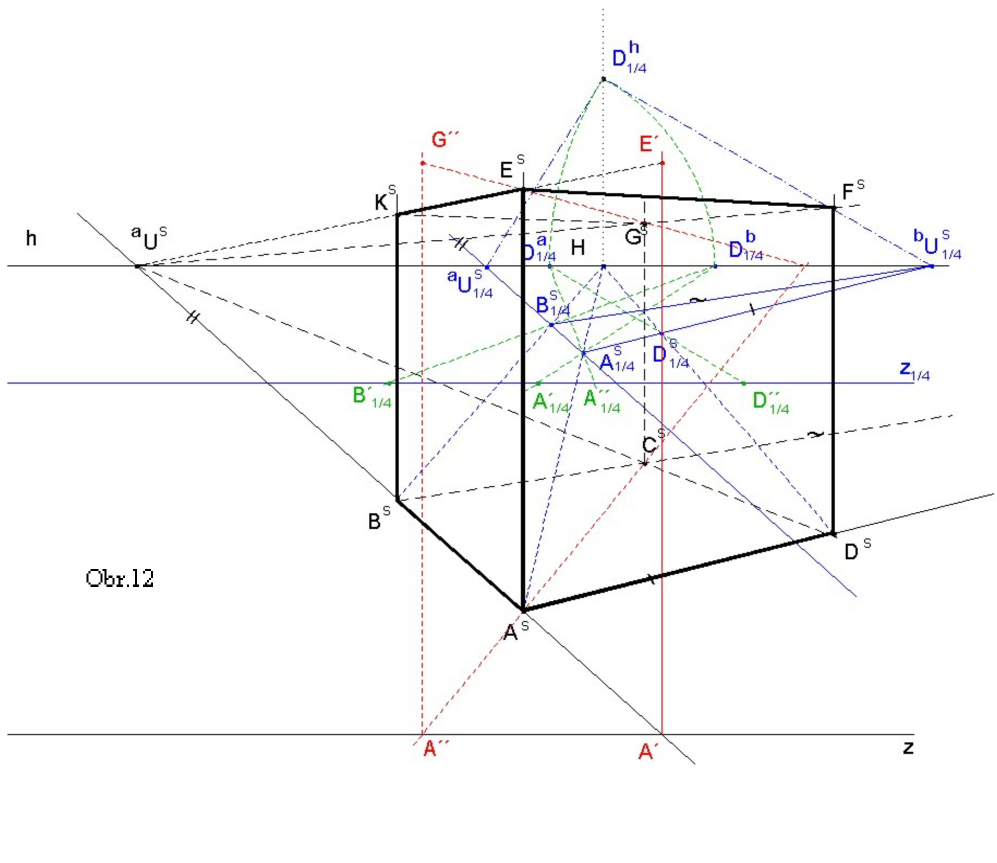
Této metody využíváme především pro konstrukci perspektiv půdorysů objektů. Řešíme například takovéto úlohy: Na přímku ***a*** ležící v π naneste od bodu ***A*** úsečku dané velikosti *v*, úběžník ${}^aU^s$ přímky a leží mimo nákresnu. Zvolíme vhodnou stejnolehlost, např. s koeficientem *1/3*, střed je ***H***. Sestrojíme obraz daných objektů v této stejnolehlosti (základnici $z_{1/3}$, přímku $a_{1/3}$). Pro přímku $a_{1/3}$ sestrojíme dělicí bod a naneseme pomocí něj na přímku $a_{1/3}$ od bodu $A_{1/3}$ úsečku délky $v_{1/3}$. Její druhý koncový bod **$B_{1/3}$** zobrazíme ve stejnolehlosti do bodu **B^s** na přímku **a^s**, úsečka **AB** má požadovanou délku *v*. (viz obr.11)



Obr.11

Metodu redukce distance užíváme většinou pro konstrukci dělicích bodů a pomocí nich pak konstrukci provádíme v původní perspektivě.

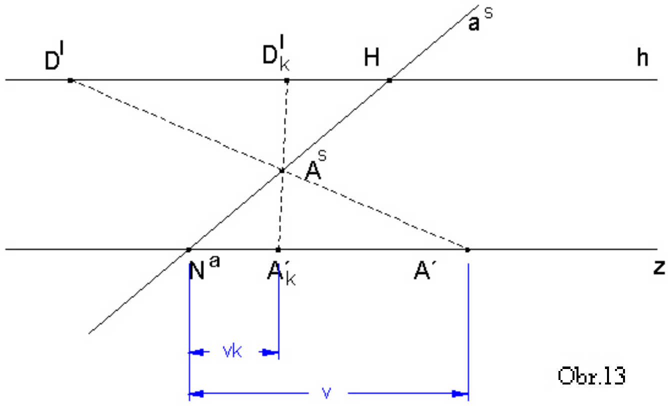
Například jako v této úloze: Sestrojte perspektivu krychle, jejíž stěna **$ABCD$** leží v π, jsou-li dány vrcholy ***A, B***, perspektiva je dána horizontem, základnicí a distancí. Užijeme například redukce s koeficientem *1/4* a určíme například horní distančník **$D^h_{1/4}$**. Pro přímku **$a=AB$** známe úběžník **^aU**, sestrojíme přímku **$a_{1/4}$**, její úběžník i dělicí bod a body **$A_{1/4}$**, **$B_{1/4}$**. Sklopením obzorové roviny π' určíme úběžník přímky **$b_{1/4}$**, která prochází bodem **$A_{1/4}$** a je kolmá na přímku **$a_{1/4}$**. Na ní určíme bod **$D_{1/4}$** (vrchol čtverce). Sestrojíme přímku **$^bU^sA^s$** (rovnoběžná s **$^bU^s_{1/4}A^s_{1/4}$**) a přímku **$^bU^sB^s$** (rovnoběžná s **$^bU^s_{1/4}B^s_{1/4}$**). Sestrojíme bod **D^s** na **a^s** (pomocí stejnolehlosti). Bod **C** je průsečíkem přímek **DC** a **BC**, **DC** je rovnoběžná s **AB** (mají společný úběžník). Užitím redukce distance jsme sestrojili stěnu krychle ležící v π, hrany kolmé k π sestrojíme už v původní perspektivě. Hranu **A^sE^s** promítneme například z bodu **$^aU^s$** do úsečky **$A'E'$** (platí **$|A'E'| = 4|A'_{1/4}B'_{1/4}|$**). Protože úběžník přímky **AD** je nedostupný, je třeba ještě nanést velikost hrany krychle na některou další svislou přímku (například procházející bodem **C**, na obrázku je sestrojen bod **G**, hrana **CG** se promítá z průsečíku **AC** s horizontem.) (viz obr.12)



Obr.12

Metoda hloubkových přímek

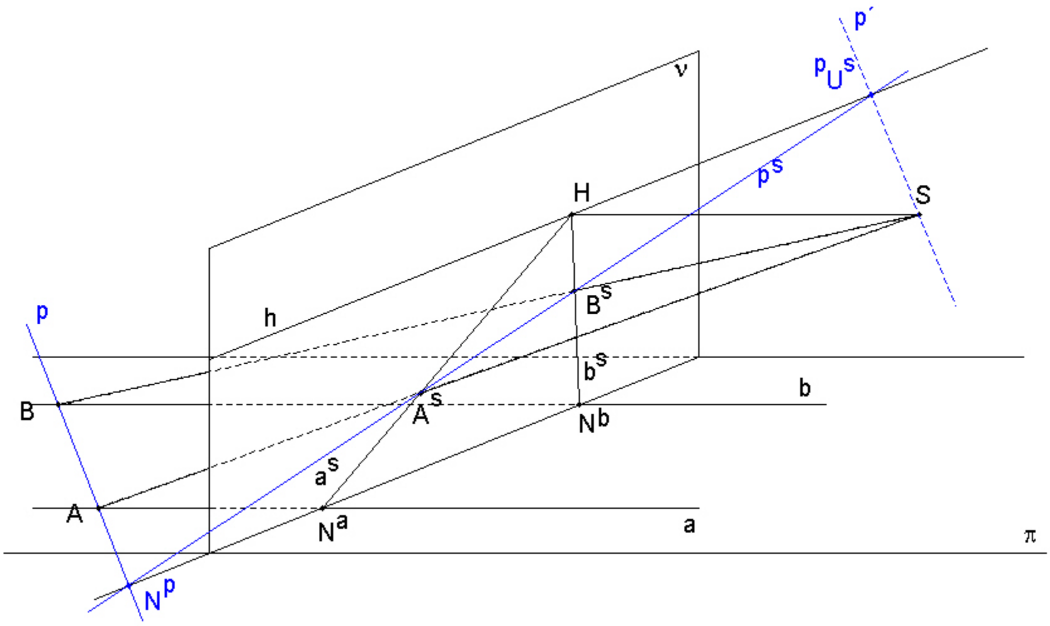
Aplikujeme-li metodu redukce distance na hloubkové přímky, konstrukce se zjednoduší. Předpokládejme, že $\boldsymbol{a}$ je hloubková přímka, $\boldsymbol{N^a}$ její stopník, $\boldsymbol{A}$ její další bod. Perspektiva je dána horizontem, základnicí a levým distančníkem. Zvolme stejnolehlost se středem $\boldsymbol{H}$ a koeficientem k. $\boldsymbol{D^l}$ se zobrazí do $\boldsymbol{D^l_k}$, $\boldsymbol{a^s}$ prochází středem, je slabě samodružná. Sestrojme přímku $\boldsymbol{D^l_k A^s}$ a označme $\boldsymbol{A'_k}$ její průsečík se $\boldsymbol{z}$. $\boldsymbol{A'}$ je průsečík $\boldsymbol{D^l A^s}$ se $\boldsymbol{z}$ (úsečka $\boldsymbol{N^a A'}$ určuje skutečnou velikost úsečky $\boldsymbol{N^a A}$). (viz obr.13)



Obr.13

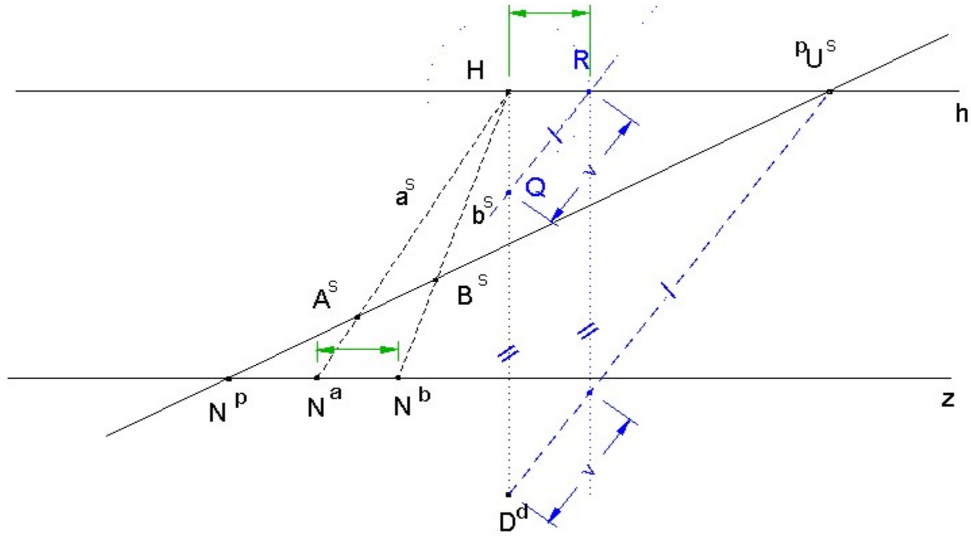
Trojúhelníky $\boldsymbol{N^a A'_k A^s}$ a $\boldsymbol{HD^l_k A^s}$ a trojúhelníky $\boldsymbol{N^a A' A^s}$ a $\boldsymbol{HD^l A^s}$ jsou podobné. Platí tedy $|HD^l|=k|HD^l_k|$ a proto také $|N^a A'|=k|N^a A'_k|$. Na hloubkovou přímku lze tedy úsečku dané délky nanášet z redukovaného distančníku. Chceme-li úsečku délky v, od daného bodu $\boldsymbol{B}$, promítneme $\boldsymbol{B^s}$ z redukovaného distančníku do $\boldsymbol{B'}$ na základnici, naneseme úsečku délky $v.k$ a koncový bod promítneme zpět.

Z uvedeného zjednodušení pro hloubkové přímky je pak uvedena další metoda pro nanášení úsečky dané délky na přímku ležící v π, tzv. metoda hloubkových přímek. Nechť $\boldsymbol{p}$ je přímka ležící v π, $\boldsymbol{A, B}$ dva její body. Body $\boldsymbol{A, B}$ vedeme hloubkové přímky $\boldsymbol{a, b}$ a sestrojíme perspektivy přímek i bodů. Označme $\boldsymbol{p'}$ směrovou přímku přímky $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{{}^pU}$ úběžník přímky $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{N^a, N^b}$ po řadě stopníky přímek $\boldsymbol{a, b}$. Trojúhelníky $\boldsymbol{N^p N^a A}$, $\boldsymbol{N^p N^b B}$, $\boldsymbol{{}^pU^s HS}$ jsou podobné. (viz obr.14)



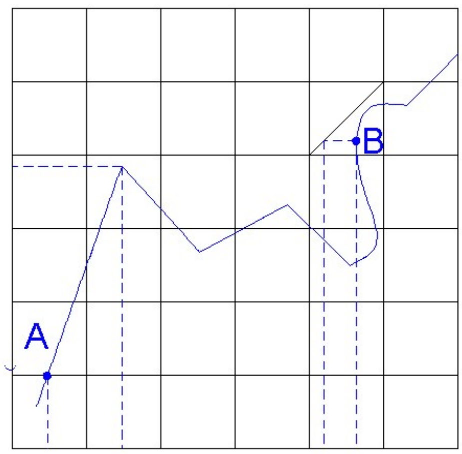
Obr.14

Perspektivu mějme dánu horizontem, základnicí a dolním distančníkem. Platí $|{}^pU^s S|=|{}^pU^s D^d|$, z podobnosti trojúhelníků máme $|AB|:|N^a N^b|=|{}^pU^s S|:|{}^pU^s H|$ a tedy také $|AB|:|N^a N^b|=|{}^pU^s D^d|:|{}^pU^s H|$. Sestrojíme trojúhelník $\boldsymbol{HRQ}$ podobný trojúhelníku $\boldsymbol{H\,{}^pU^s D^d}$ tak, aby platilo $|N^a N^b|=|HR|$. Pak také bude platí $|RQ|=|AB|$. (Známe-li body $\boldsymbol{A, B}$ a hledáme skutečnou velikost úsečky $\boldsymbol{AB}$ je konstrukce trojúhelníku $\boldsymbol{HRQ}$ triviální, nanášíme-li od bodu $\boldsymbol{A}$ úsečku dané délky v, musíme sestrojit pravoúhlý trojúhelník $\boldsymbol{HRQ}$, známe-li pravý úhel a velikost přepony.) (viz obr.15)



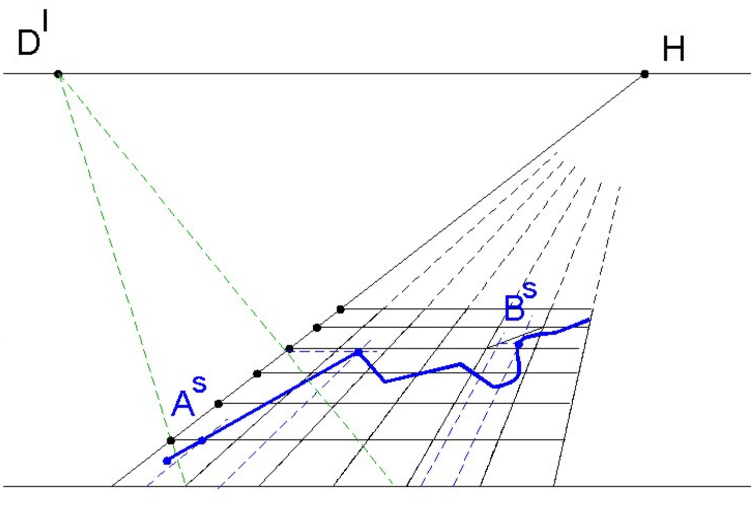
Obr.15

Perspektiva složitějších půdorysů



Pro složitější půdorysy jsou někdy uvedené metody příliš náročné, proto se používá tzv. **gratikoláže**. Půdorys pokryjeme dostatečně hustou čtvercovou sítí (viz obr.16) a sestrojí se perspektiva této sítě. Perspektiva půdorysu se pak určuje bodově. Body půdorysu pak můžeme promítat například hloubkovými přímkami na průčelné přímky sítě (bod ***A***), promítnutím průčelnou přímkou na hloubkovou přímku (případně na úhlopříčku a poté hloubkovou přímkou na průčelnou, bod ***B***), případně kombinací těchto metod. (viz obr.17)

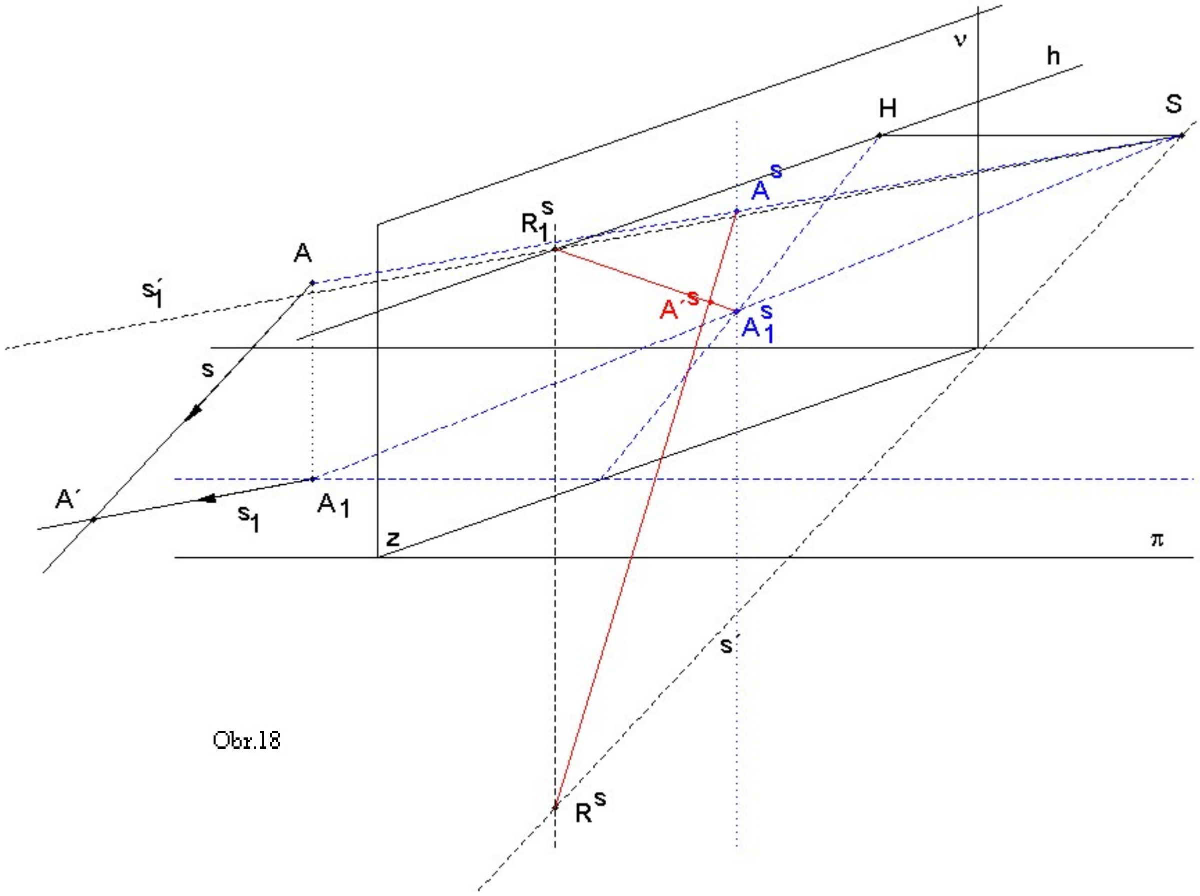
Obr.16



Obr.17

Osvětlení a zrcadlení v perspektivě

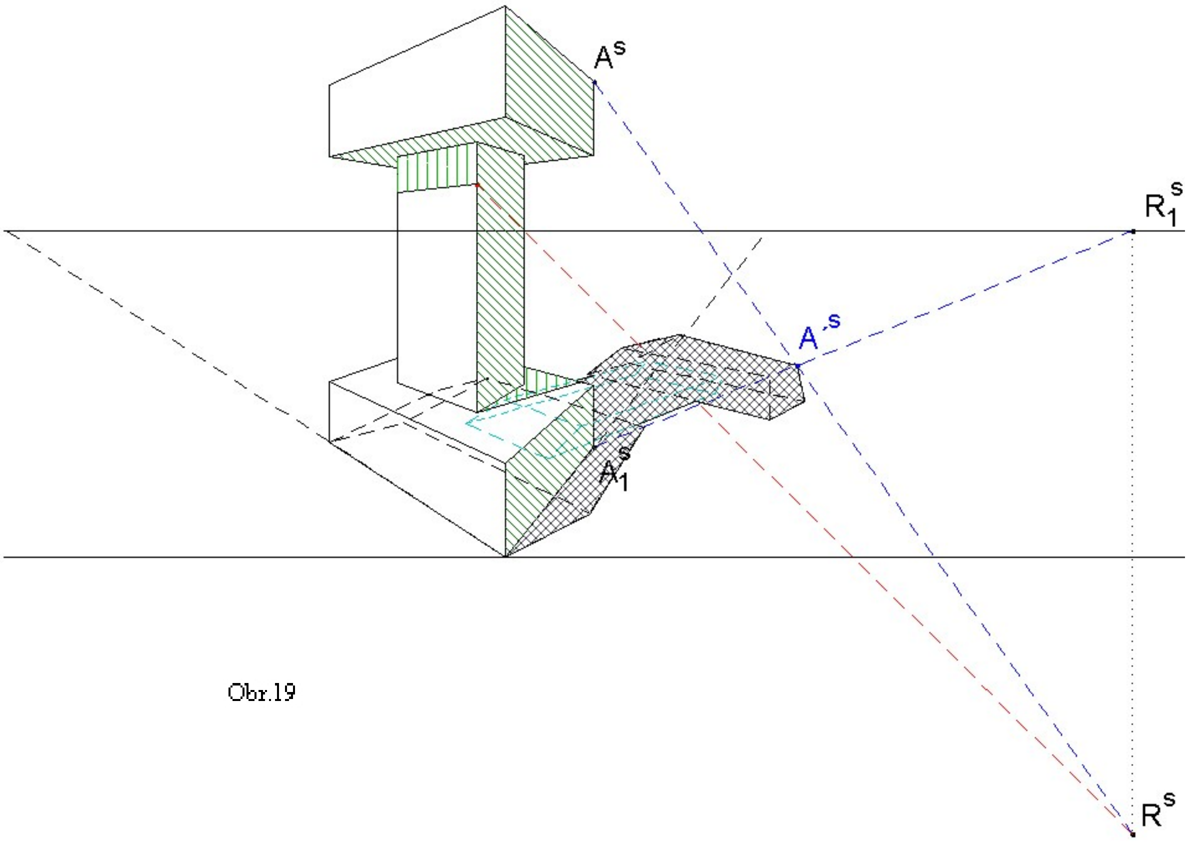
Pro zvětšení názornosti perspektivního obrazu používáme rovnoběžného osvětlení nebo zrcadlení. Rovnoběžné osvětlení je dáno směrem ***s***, uvažujme ještě pravoúhlý průmět $\boldsymbol{s_1}$ směru ***s*** do základní roviny π. Úběžníky přímek směrů ***s*** a $\boldsymbol{s_1}$ po řadě označíme $\boldsymbol{R^s}$ a $\boldsymbol{R_1^s}$. (Je zřejmé, že $\boldsymbol{R_1^s}$ leží na ***h*** a přímka $\boldsymbol{R^sR_1^s}$ je kolmá na ***h***.). sestrojujeme-li vržený stín ***A´*** bodu ***A*** do π, vedeme bodem ***A*** přímku směru ***s*** a určíme její průsečík s π, tzn., že ***A´*** je průsečík přímek směrů ***s*** a $\boldsymbol{s_1}$ vedených body ***A*** a $\boldsymbol{A_1}$. Pro perspektivní průměty je tedy $\boldsymbol{A'^s}$ průsečík přímek $\boldsymbol{A^sR^s}$ a $\boldsymbol{A_1^sR_1^s}$. (viz obr.18)



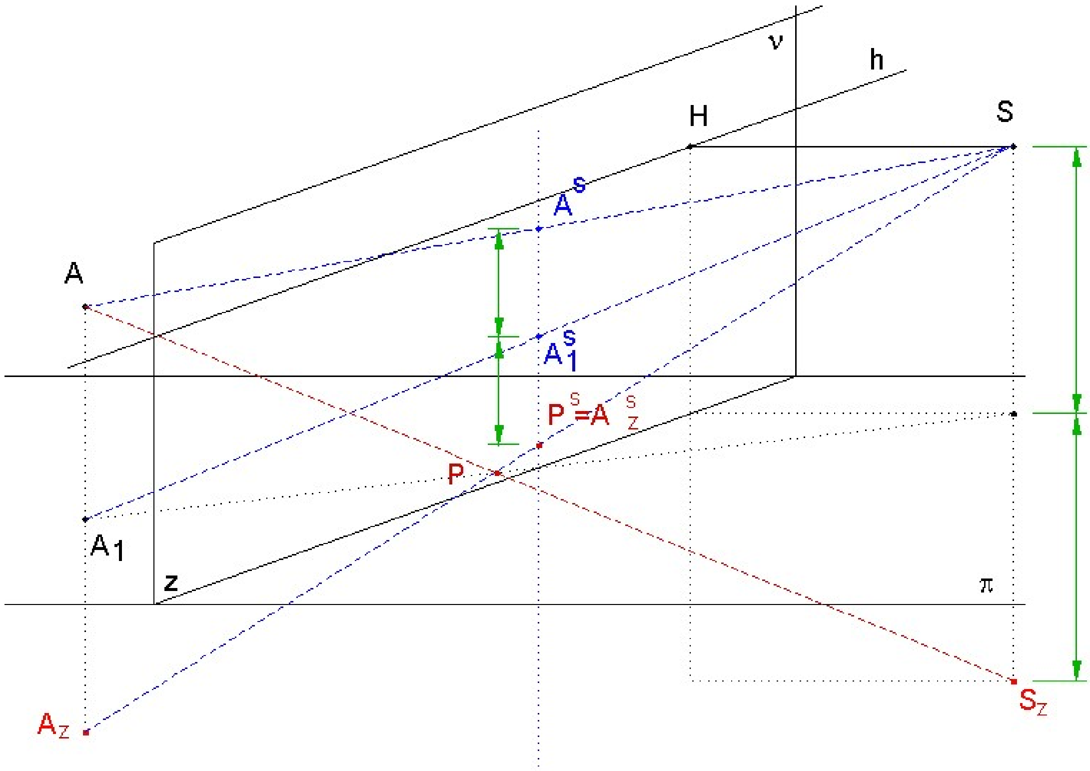
Obr.18

Na obrázku (obr.19) je sestrojeno osvětlení jednoduchého útvaru, stínu vržené na sebe se jako vždy určí pomocí zpětných paprsků. Konstrukce je obdobná jako u rovnoběžných projekcí, pouze navzájem rovnoběžné přímky prochází jedním úběžníkem.

Zrcadlení se používá nejčastěji podle vodorovné roviny (vodní hladina). Využíváme známé vlastnosti světelných paprsků, úhel dopadu paprsků jdoucích od předmětu do oka se rovná úhlu odrazu, tedy kromě bodu ***A*** vidíme z oka ***S*** také bod $\boldsymbol{A_z}$ souměrně sdružený s bodem ***A*** podle roviny zrcadla (nejčastěji π). Tj. platí $\boldsymbol{|AA_1|=|A_1A_z|}$, $\boldsymbol{|A^sA_1^s|=|A_1^sA_z^s|}$. Označíme-li $\boldsymbol{S_z}$ bod souměrně sdružený s okem ***S*** podle roviny zrcadla a ***P*** průsečík přímky $\boldsymbol{AS_z}$ s rovinou zrcadla, pak perspektivní průmět $\boldsymbol{P^s}$ bodu P splývá s perspektivním průmětem $\boldsymbol{A_z^s}$ zrcadleného bodu $\boldsymbol{A_z}$. (viz obr.20)

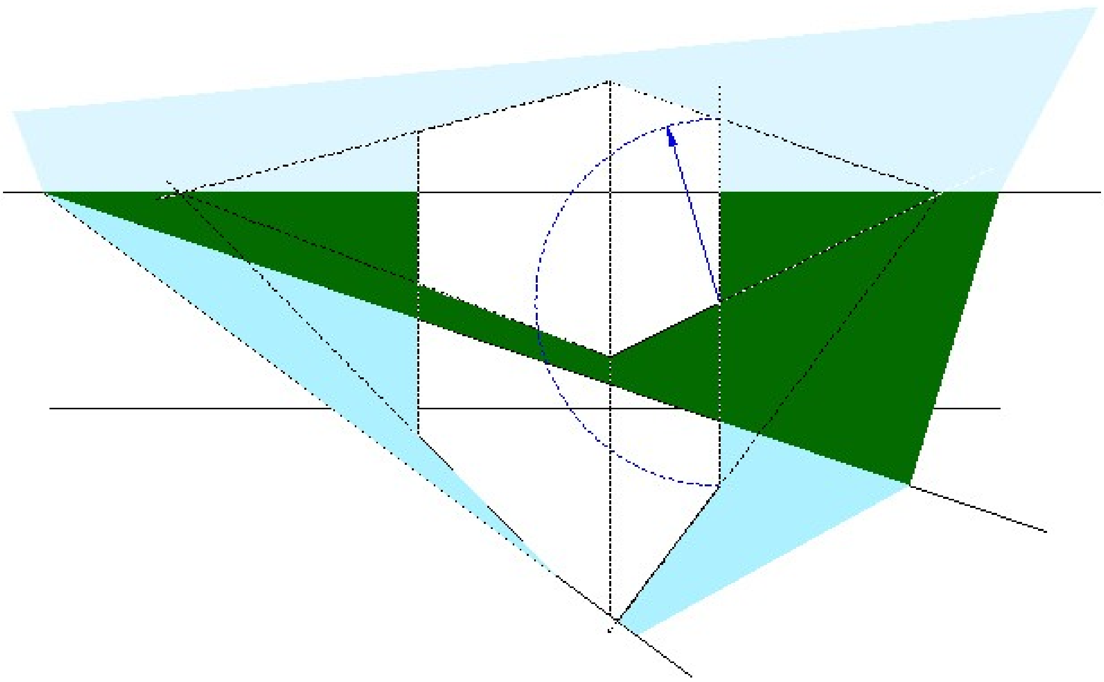


Obr.19



Obr.20

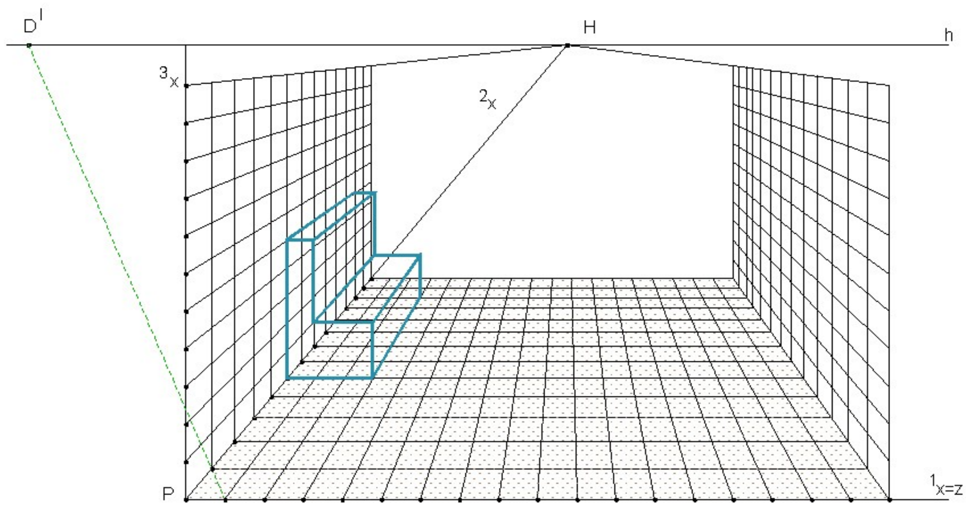
Na obrázku je zobrazen kvádr stojící na π a jeho zrcadlení ve vodní hladině (část roviny π). Zobrazujeme jen viditelné části.



Obr.21 Zrcadlení kvádru v lineární perspektivě

Průčelná (jednoúběžníková) perspektiva

Mějme dán objekt, jehož perspektivu chceme sestrojit a zvolme pravoúhlý souřadnicový systém s osami $^{1}\boldsymbol{x}$, $^{2}\boldsymbol{x}$, $^{3}\boldsymbol{x}$, které jsou rovnoběžné s hranami daného objektu. (Daný objekt můžeme také, podobně jako při použití incidenčního měřítka, obalit vhodným kvádrem, souřadnicové osy pak budou splývat s hranami kvádru.) Perspektiva je dána horizontem, základnicí a některým z distančníků. Osy označme tak, aby $^{1}\boldsymbol{x}$, $^{2}\boldsymbol{x}$ ležely v základní rovině. Takto zvolený souřadnicový systém nazýváme **přidružený** k danému objektu. Protože průmětna ρ je zatím volena tak,

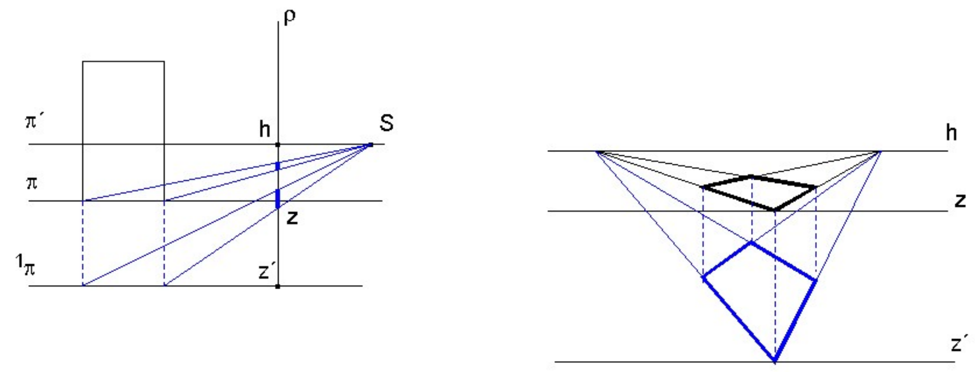


Obr.22 Jednoúběžníková perspektiva

aby byla kolmá k základní rovině π, je osa ***^3x*** rovnoběžná s ρ. Je-li s ρ rovnoběžná i další z os (např. ***^1x***), pak je objekt v průčelné poloze a zobrazujeme jej v tzv. **průčelné perspektivě.** Pouze osa ***^2x*** má vlastní úběžník (je hloubková přímka, úběžník je ***H***), proto je tato perspektiva také nazývána **jednoúběžníková.** Souřadný systém vytvoří čtvercové sítě, sestrojíme perspektivu některých těchto sítí. Průčelná perspektiva se používá nejčastěji pro zobrazování interiérů v bytové architektuře, sestrojujeme sítě ve třech vhodných rovinách (podlaha a dvě protější stěny kolmé k ρ.) Osu ***^1x*** ztotožníme se základnicí ***z*** (leží v ρ, jednotky na ni nanášíme ve skutečné velikosti), osu ***^3x*** vedeme libovolným vhodně zvoleným bodem ***P*** na ***z*** (leží rovněž v ρ, jednotky ve skutečné velikosti.) Osa ***^2x*** je hloubková přímka, její perspektiva je přímka ***PH***. (Jednotky na ni nanášíme pomocí levého nebo pravého distančníku.) Sestrojíme sítě (jednotkami na osách vedeme rovnoběžky se zbývajícími osami) a s využitím sítí zakreslíme inteiér.

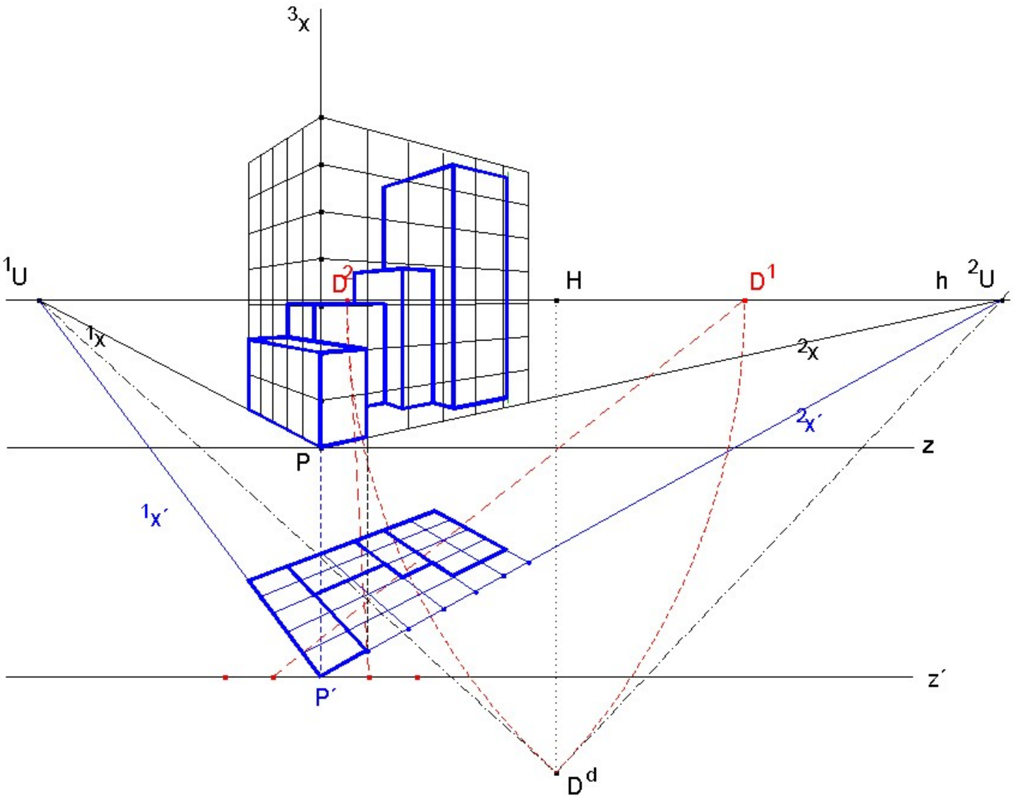
Nárožní (dvojúběžníková) perspektiva

Zobrazovanému objektu opět přiřadíme přidružený souřadnicový systém tak, aby osa ***^3x*** byla rovnoběžná s průmětnou ρ. Osy ***^1x*** a ***^2x*** leží v π, ovšem žádná není rovnoběžná s ρ. Objekt je v nárožní poloze a zobrazujeme jej v tzv. **nárožní perspektivě.** Protože osy ***^1x*** a ***^2x*** mají úběžníky ***^1U, ^2U*** nazýváme někdy tuto perspektivu **dvojúběžníková**. Zobrazujeme opět čtvercové sítě vhodných rovin a pomocí nich sestrojujeme perspektivu objektu. Nárožní perspektiva se používá především pro zobrazování budov, ulic, komunikací apod. (rozsáhlejší objekty). Protože pozorovatel a objekt stojí na základní rovině, půdorys objektu je vidět pod malým úhlem a tedy velmi zkresleně a při konstrukcích může docházet k větším nepřesnostem. Pro konstrukci čtvercové sítě v půdorysu (a tím i celého půdorysu) používáme tzv. **sníženého (sklepního) půdorysu.** Zvolíme pomocnou rovinu $^1\pi$ rovnoběžnou s π ("pod" rovinou π) a půdorys pravoúhle promítneme do $^1\pi´$. Je zřejmé, že perspektiva původního půdorysu a sníženého půdorysu si odpovídají v pravoúhlé afinitě s osou ***h***.



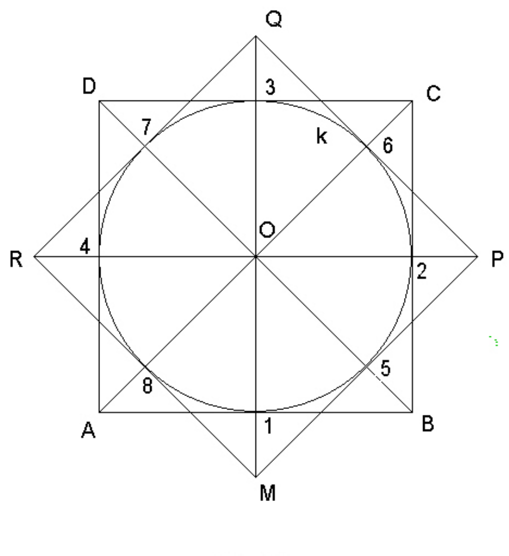
Obr.23 Snížený (sklepní) půdorys

Při konstrukci perspektivy objektu sestrojíme perspektivu sníženého půdorysu (čtvercovou síť) a dále čtvercové sítě dané např. rovinami ***($^1x^3x$)*** a ***($^2x^3x$)***. Zvolíme bod ***P*** na ***z*** a osu ***^3x*** procházející ***P***. (Jednotky na ní budou opět ve skutečné velikosti) Osy ***^1x*** a ***^2x*** budou procházet bodem ***P***, jejich perspektivy budou přímky ***P^{1}U***, ***P^{2}U***, kde ***^1U***, ***^2U*** jsou os ***^1x***, ***^2x***, jeden zvolíme, druhý sestrojíme pomocí sklopení obzorové roviny. Jednotky na osách ***^1x***, ***^2x*** sestrojujeme s pomocí jejich dělicích bodů ***D^1, D^2***. (Známe např. dolní distančník.) Čtvercovou síť sklepního půdorysu můžeme sestrojit buď tak, že sestrojíme na ose ***^1x*** jednotky (pomocí dělicího bodu ***D^1***, promítáním na ***z)*** a ty afinně zobrazíme na ***$^1x´$***, nebo lze z bodu ***D^1*** promítnout přímo na ***$^1x´$*** jednotky ze ***z´***. Z vlastností afinity je zřejmé, že dostáváme tytéž body. (viz obr.24)



Obr.24

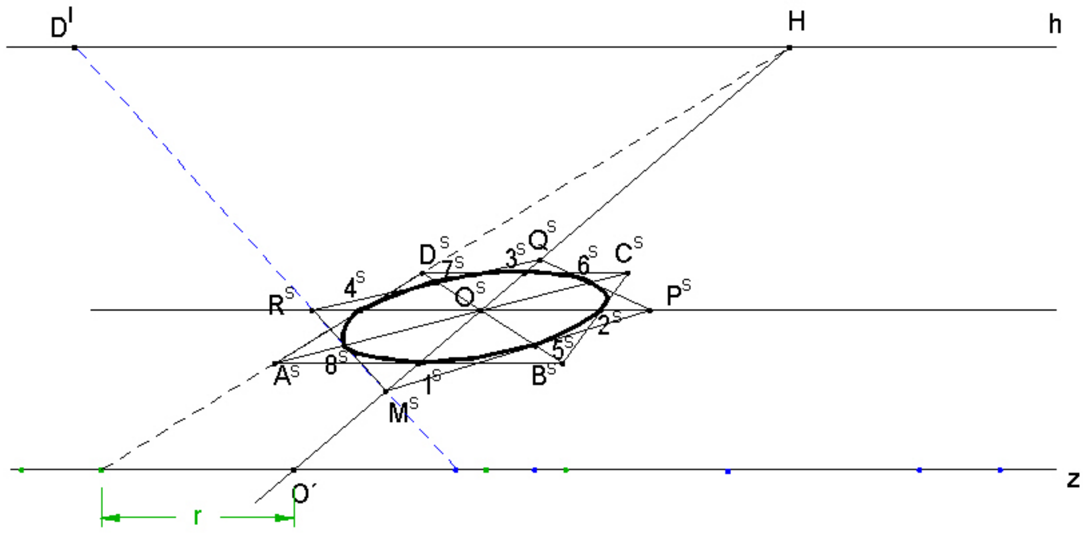
Perspektiva kružnice



Obr.25

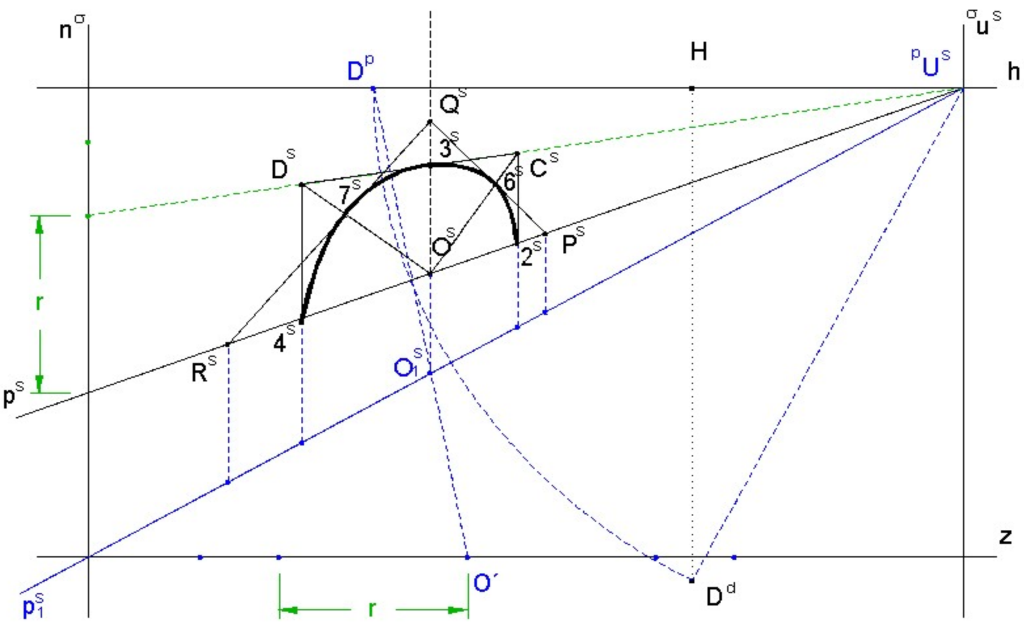
Ve středovém promítání se kružnice, která neleží ve středově promítací rovině rovině, zobrazí jako regulární kuželosečka. Středový průmět kružnice ***k*** je řez kužele s vrcholem ***S*** a řídící kružnicí k průmětnou. V lineární perspektivě požadujeme, aby zobrazované objekty ležely v zorném poli, tj. uvnitř zorného kužele. Promítací kužel kružnice k leží uvnitř zorného kužele a jeho řez rovinou ρ (průmětna) je elipsa, příp. kružnice. Kružnici v obecné poloze lze zobrazit stejně jako ve středovém promítání, otočením roviny kružnice do průmětny a užitím kolineace. V lineární perspektivě se nejčastěji zobrazují kružnice ve vodorovné nebo svislé poloze, pro tyto případy ukážeme konstrukci perspektivy kružnice. Kružnici k opíšeme dva čtverce ***ABCD*** a ***MPQR*** tak, aby jejich body dotyku (ozn. je ***1, 2, ..., 8***) tvořily pravidelný osmiúhelník. (viz obr.25)

Nejprve zobrazíme kružnici ve vodorovné rovině, např. v základní rovině π. Mějme dán střed ***O*** kružnice ***k*** a poloměr *r*. Perspektiva je opět zadána horizontem, základnicí a některým distančníkem. Opsané čtverce sestrojíme tak, aby strana ***AB*** byla rovnoběžná se ***z***. Sestrojíme perspektivy obou čtverců a do nich vepíšeme elipsu (Známe pro ni osm tečen s body dotyku.) Strany nebo úhlopříčky zvolených čtverců jsou buď průčelné nebo hloubkové přímky, úsečky dané délky od bodu ***O*** na ně nanášíme podle známých konstrukcí.



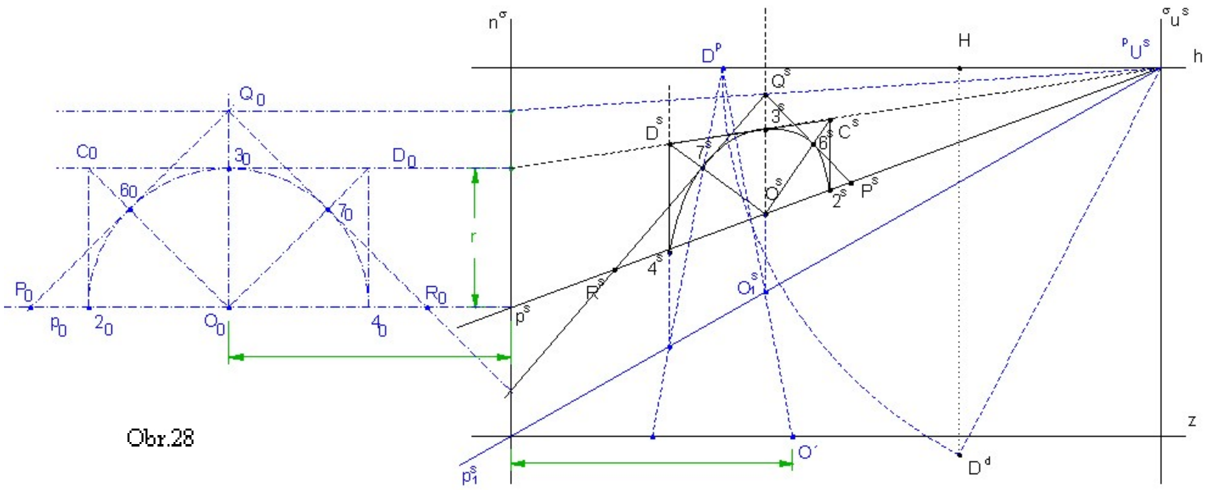
Obr.26 Perspektiva kružnice ležící v základní rovině

Ve svislé rovině se většinou nezobrazují celé kružnice, pouze jejich části (např. ozdobné štíty domů). Zobrazíme půlkružnici ve svislé rovině σ, která bude dána stopu a úběžnicí. Protože je σ kolmá k π, je stopa i úběžnice kolmá k ***h***. (Perspektiva je zadána stejně jako v předchozím příkladě.) Čtverce dané kružnici opíšeme tentokrát tak, aby strana ***CD*** byla rovnoběžná s π. Kružnice je dána středem ***O*** (neleží v π) a poloměrem. Přímka ***p=PR*** prochází ***O*** a je rovnoběžná s π. Promítneme ***p*** pravoúhle do roviny π, pravoúhlý průmět označíme $\boldsymbol{p_1}$. Úsečky dané délky nanášíme na přímku ležící v π, tedy na $\boldsymbol{p_1}$ a promítáme zpět na ***p***. Známými konstrukcemi sestrojíme perspektivy čtverců a vepíšeme elipsy.



Obr.27 Perspektiva kružnice ležící ve svislé rovině

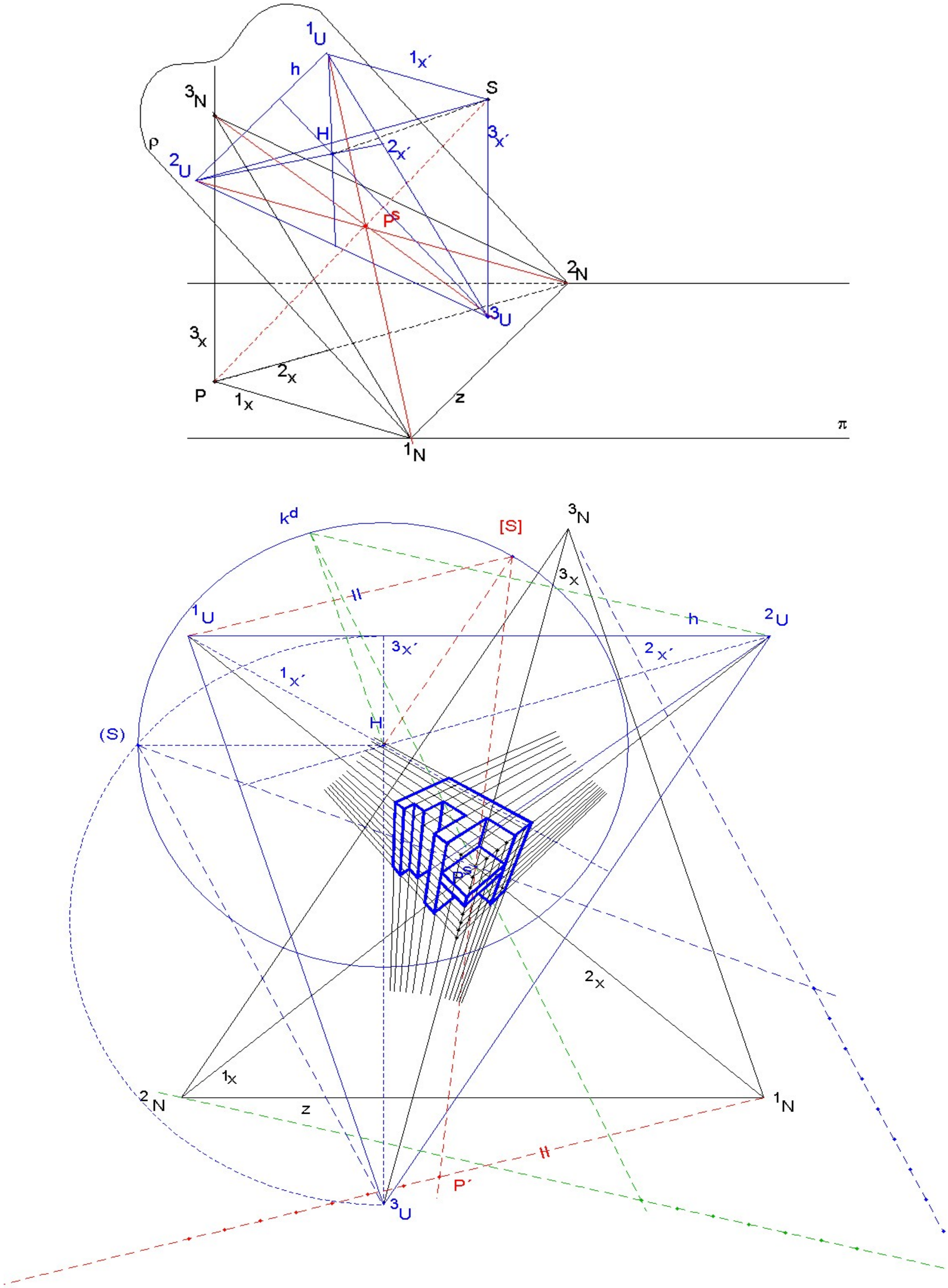
Kružnici lze sestrojit také užitím otočení roviny do ρ, některé konstrukce se zjednoduší díky tomu, že rovina σ je svislá. Otočené vodorovné přímky jsou rovnoběžné se $\boldsymbol{z}$, zjistíme vzdálenost bodu $\boldsymbol{O}$ od nárysné stopy (osa kolineace) a sestrojíme na $\boldsymbol{p_0}$ bod $\boldsymbol{O_0}$. Vzdálenost opět zjišťujeme na přímce $\boldsymbol{p_1}$. Sestrojíme otočenou půlkružnici a perspektivu některé další svislé přímky, např. procházející bodem $\boldsymbol{D}$. Na $\boldsymbol{p_1}$ naneseme vzdálenost této svislé přímky od nárysné stopy roviny σ. Perspektivy vodorovných přímek mají společný úběžník, můžeme sestrojit $\boldsymbol{D^sC^s}$, $\boldsymbol{7^s6^s}$, odpovídající si přímky se samozřejmě protínají na ose kolineace. Bod $\boldsymbol{D}$ leží na svislé přímce, jejíž vzdálenost od nárysné stopy určíme v otočení, sestrojíme perspektivu svislé přímky . Dále např. bod **3** je průsečík vodorovné přímky **CD** a svislé přímky jdoucí bodem **O**. Můžeme sestrojit např. bod **Q**, jako průsečík vodorovné a svislé přímky, známe průsečík přímky $\boldsymbol{Q_0R_0}$ s osou kolineace, sestrojíme perspektivu přímky **QR** atd. (viz obr.28)



Obr.28

Perspektivní axonometrie (trojúběžníková perspektiva)

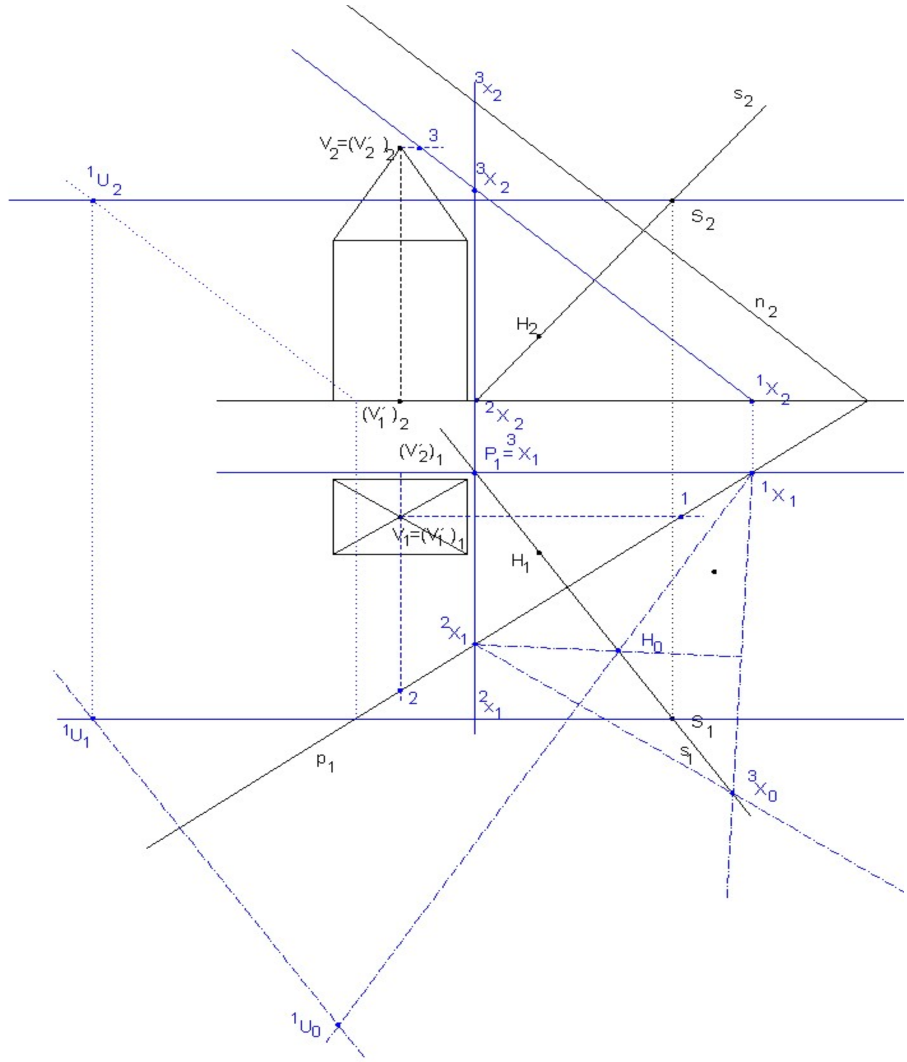
Při konstrukci perspektivy rozsáhlejších komplexů budov, náměstí, objektů s nádvořím apod., metodami dosud používanými, se jednotlivé části překrývají a výsledný obrázek není názorný, nevidíme vše, co potřebujeme. Abychom dostali názornější obrázky, zvolíme tentokrát průmětnu ρ šikmou. Objekt bude opět stát na základní rovině π a přiřadíme mu přidružený souřadnicový systém stejně jako v průčelné a nárožní perspektivě. Na obrázku je volen počátek **P** přidruženého souřadnicového systému v π, osy $\boldsymbol{{}^1x}$ a $\boldsymbol{{}^2x}$ leží rovněž v π a žádná z os není tentokrát rovnoběžná s průmětnou. Označme $\boldsymbol{{}^iN}$ stopníky os $\boldsymbol{{}^ix}$ a $\boldsymbol{{}^iU^s}$ úběžníky os $\boldsymbol{{}^ix}$. Vzhledem k tomu, že průmětna není svislá, neleží hlavní bod na horizontu, horizont je průsečík obzorové roviny s ρ, tj. $\boldsymbol{h={}^1U^{s2}U^s}$. Trojúhelník $\boldsymbol{{}^1N^2N^3N}$ nazýváme **stopníkový trojúhelník** a trojúhelník $\boldsymbol{{}^1U^{s2}U^{s3}U^s}$ se nazývá **úbežníkový trojúhelník**. Z ortogonální axonometrie víme, že trojúhelník $\boldsymbol{{}^1N^2N^3N}$ je ostroúhlý a průsečík výšek je pravoúhlý průmět počátku do průmětny, tj. $\boldsymbol{P_2}$. Směrové přímky os $\boldsymbol{{}^ix}$ protínají průmětnu v úběžnících, opět trojúhelník $\boldsymbol{{}^1U^{s2}U^{s3}U^s}$ je ostroúhlý a průsečík jeho výšek je pravoúhlý průmět průsečíky přímek $\boldsymbol{{}^ix'}$, tj. hlavní bod. Protože $\boldsymbol{{}^ix}$ je rovnoběžné a $\boldsymbol{{}^ix'}$ jsou odpovídající si strany stopníkového a úběžníkového trojúhelníku rovnoběžné, tzn., že si odpovídají v nějaké homotetii. Protože spojnice odpovídajících si bodů prochází středem homotetie je středový průmět $\boldsymbol{P^s}$ počátku **P** středem homotetie. (Střed homotetie může být i nevlastní, tak by si ovšem trojúhelníky odpovídaly v posunutí, středový průmět počátku by byl nevlastní, což by znamenalo, že leží v centrální rovině a tedy mimo zorný kužel. Pokud by **P=S**, pak by trojúhelníky splynuly, průmětem os by byly body a bod **P** by opět neležel uvnitř zorného kužele. Střed homotetie je tedy vlastní, což znamená, že trojúhelníky si odpovídají ve stejnolehlosti se středem $\boldsymbol{P^s}$.) Osy protínají průmětnu ve třech bodech, proto se tato perspektiva nazývá buď trojúběžníková **perspektiva** nebo také **perspektivní axonometrie.**



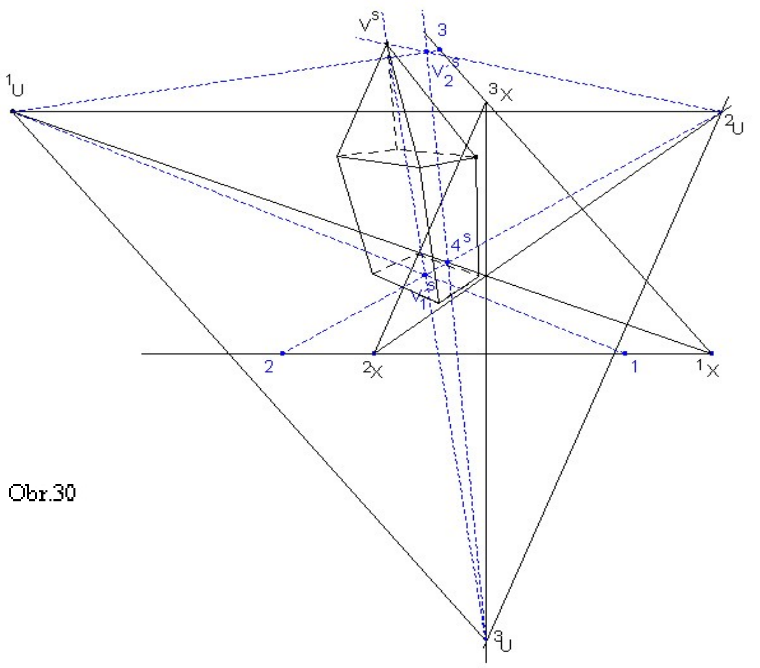
Obr.29 Trojúběžníková perspektiva

Sestrojíme perspektivu přidruženého souřadnicového systému. Zvolme si v nákresně (ztotožníme ji s průmětnou ρ) dva stejnolehlé trojúhelníky $^1N^2N^3N$, $^1U^{s2}U^{s3}U^s$. Průsečík výšek v úběžníkovém trojúhelníku je hlavní bod, jeho vzdálenost od průmětny je distance. Tu určíme stejně jako v ortogonální axonometrii, například sklopením pravoúhle promítací roviny přímky $^3x'$. Známe distanci, sestrojíme distanční kružnici k^d. Průsečík přímek $^1x=^1N^1U^{s2}$, $^2x=^2N^2U^{s2}$ a $^3x=^3N^3U^{s2}$(střed stejnolehlosti) je bod P^s. Naneseme jednotky na jednotlivé osy a sestrojíme čtvercovou siť. Jednotky nanášíme užitím dělicí kružnice. (Například pro osu ^1x, sklopíme její směrovou přímky $^1x'$ do průmětny a dělicí kružnice je kružnice se středem $^1U^s$ a poloměrem $^1U^s[S]$). Pomocí čtvercové sítě sestrojíme perspektivu podobně jako v průčelné či nárožní perspektivě. Ukázali jsme, že zadáním stopníkového a úběžníkového trojúhelníku je perspektivní axonometrie jednoznačně určena.

Je-li objekt zadán sdruženými obrazy v Mongeově projekci, lze sestrojit jeho obraz v perspektivní axonometrii také metodami vázáné perspektivy, průmětna ρ však není svislá. Mějme dán objekt sdruženými obrazy v Mongeově projekci stojící na π v průčelné poloze (je mu přiřazen přidružený souřadnicový systém) , průmětna ρ je určena stopami. Střed promítání se volí podobně jako v případě, že průmětna je svislá. (Objekt v zorném poli, ***S*** volíme podle toho, co má být vidět atd.) Zvolme pravoúhlý souřadnicový systém přidružený k danému objektu podle předchozího, jeho počátek položme do bodu ***P, P*** je půdorysný stopník osy ***s*** perspektivy. Průsečíky souřadnicových os ^1x, ^2x, ^3x s rovinou ρ tvoří stopníkový trojúhelník. Body ^1X, ^2X leží v půdorysně, tj. na půdorysné stopě roviny ρ, přímka $^1X^3X$ je rovnoběžná s nárysnou, tj. je to hlavní přímka druhé osnovy roviny ρ. Středem ***S*** promítání vedeme směrovou přímku $^1x'$ osy ^1x a určíme úběžník osy ^1x (průsečík $^1x'$ s ρ). Rovinu ρ otočíme kolem půdorysné stopy do π a určíme otočený stopníkový trojúhelník $^1X_0{}^2X_0{}^3X_0$ a otočený úběžník $^1U^s{}_0$ Průsečík H_0 jeho výšek je otočený hlavní bod ***H***. Perspektivní průmětnu přemístíme. Sestrojíme stopníkový trojúhelník, hlavní bod a úběžník osy ^1x, skutečné velikosti úseček zjistíme z otočení. P^s splývá s bodem ***H***, P^s je střed stejnolehlosti, sestrojíme úběžníkový trojúhelník stejnolehlý se stopníkovým trojúhelníkem. Sestrojíme perspektivu bodu ***V*** tělesa. Bod ***V*** pravoúhle promítneme do bodu V'_1 v souřadnicové rovině $^1x^2x$ a do bodu V'_2 v souřadnicové rovině $^1x^3x$. Bod V'_1 promítneme směrem rovnoběžným s ^1x do bodu ***1*** na přímku $^1X^2X$ a směrem rovnoběžným s ^2x do bodu ***2*** na přímku $^1X^2X$. Přímka $^1X^2X$ leží v perspektivní průmětně, úsečky jsou na této přímce ve skutečné velikosti, body ***1, 2*** přeneseme do perspektivního obrázku. Spojíme je s příslušnými úběžníky (sestrojíme perspektivy přímek rovnoběžných s ^1x, ^2x) a dostaneme perspektivu V'^s_1 bodu V'_1. Podobně promítneme bod V'_2 směrem rovnoběžným s ^1x do bodu ***3*** na přímku $^1X^2X$. Bod ***3*** můžeme přenést přímo, přímka $^1X^3X$ je rovnoběžná s nárysnou a leží v perspektivní průmětně. Promítneme také V'_2 směrem rovnoběžným s ^3x do osy ^1x, bod ***4*** leží na přímce $2V'_1$. Bod 4^s spojíme s úběžníkem ^3U (přímka směru ^3x), bod ***3*** spojíme s úběžníkem ^1U (přímka směru ^1x). V průsečíku těchto přímek je perspektiva V'^s_2 bodu V'_2. Bod ***V*** leží na přímce směru ^3x procházející V'_1 a na přímce směru ^2x procházející V'_2. Pro konstrukci zbývajících bodů užíváme uvedený postup v kombinaci s využitím úběžníků souřadnicových os. (viz obr.30)



3X2
s2
V2=(V2´)2
3
1U2
3X2
S2
H2
n2
1X2
(V1´)2
2X2
(V2´)1
P1=3X1
1
1X1
V1=(V1´)1
H1
2X1
H0
2
2X1
1U1
S1
s1
p1
3X0
1U0



Vs
3
V2s
1U
3X
2U
4s
V1s
2
2X
1
1X
3U

Obr.30