M5120 – cvičení

Náhodné vektory, číselné charakteristiky a jednoduché transformace

Ondřej Pokora (pokora@math.muni.cz)

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

(podzim 2015)

Náhodný vektor, číselné charakteristiky

Definice 1 (Náhodný vektor)

(Reálný) Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ je *měřitelná* vektorová funkce

$$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)' : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$$

na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$.

Složky náhodného vektoru jsou náhodné veličiny, $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$,

Definice 2 (Střední hodnota = expectation)

Střední hodnota náhodného vektoru je definována po složkách:

$$\mathsf{E}\,\boldsymbol{X} = \big(\mathsf{E}(X_1), \ldots, \mathsf{E}(X_n)\big)' \;.$$

Definice 3 (Kovarianční matice = variance-covariance matrix)

Kovarianční matice náhodného vektoru je definována po složkách:

$$\mathsf{D}\,\boldsymbol{X} = \operatorname{cov}\boldsymbol{X} = \big\{C_{i,j}\big\}_{i,j=1}^{n} \;, \quad \text{kde} \quad C_{i,j} = \mathsf{C}(X_i, X_j) \;.$$

Kovarianční matice, korelační matice

Definice 4 (Korelační matice = correlation matrix)

Korelační matice náhodného vektoru je definována po složkách:

$$\mathrm{R}\,\boldsymbol{X} = \mathrm{cor}\,\boldsymbol{X} = \left\{R_{i,j}\right\}_{i,j=1}^{n} \ , \ \text{kde} \ R_{i,j} = \mathrm{R}(X_i, X_j) \ .$$

Věta 5

- $\mathrm{D}\,\boldsymbol{X}, \mathrm{R}\,\boldsymbol{X}$ *jsou čtvercové řádu* n, *symetrické,*
- *hlavní diagonálu* $\mathrm{D}\,\boldsymbol{X}$ *tvoří rozptyly* $\mathrm{D}X_i$,
- $\mathrm{R}\,\boldsymbol{X}$ *má na hlavní diagonále jedničky,*
- $\mathrm{D}\,\boldsymbol{X}$ *je pozitivně semidefinitní (tzn.* $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{u}'\,\mathrm{D}\,\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{u} \geq 0$*).*
- *platí:*

$$\mathrm{R}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{D}^{-1}\,\mathrm{D}\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{D}^{-1}, \quad \mathrm{D}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{D}\,\mathrm{R}\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{D}, \qquad \textit{kde} \ \boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(\sqrt{\mathrm{D}X_1}, \ldots, \sqrt{\mathrm{D}X_n}).$$

Jednoduché transformace náhodných vektorů

Věta 6

Lineární transformace $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*:*

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{a} + B\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{a} + B\,\mathsf{E}\,\boldsymbol{X}$$
$$\mathsf{D}(\boldsymbol{a} + B\boldsymbol{X}) = B\,\mathsf{D}\,\boldsymbol{X}\,B'$$

Lineární forma $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*:*

$$\mathsf{E}(a + \boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}) = a + \boldsymbol{b}'\,\mathsf{E}\,\boldsymbol{X}$$
$$\mathsf{D}(a + \boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{b}'\,\mathsf{D}\,\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{b}$$

Kvadratická forma $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*:*

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{X}'\,A\,\boldsymbol{X}) = \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}'\,A\,\mathsf{E}\,\boldsymbol{X} + \mathrm{Tr}\,[A\,\mathsf{D}\,\boldsymbol{X}]$$

kde $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$; $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$; $a \in \mathbb{R}$; $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *pozitivně definitní.*

Stopa (Trace) matice: $\mathrm{Tr}(C) = \sum_{i=1}^{n}\{c_{i,i}\}$
Platí: $\mathrm{Tr}(A\,B\,C) = \mathrm{Tr}(B\,C\,A) = \mathrm{Tr}(C\,A\,B)$

Příklady

Příklad 1

Výpočty ověřte, že v maticovém zápisu lze vyjádřit:

- *i-tá složka náhodného vektoru*

$$X_i = \boldsymbol{e}_i' \boldsymbol{X}, \qquad \text{kde } \boldsymbol{e}_i = (0_1, \ldots, 0_{i-1}, 1_i, 0_{i+1}, \ldots, 0_n)' \text{ je jednotkový vektor}$$

- *výběrový průměr*

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n} (1, \cdots, 1) \boldsymbol{X} = \left(\tfrac{1}{n}, \cdots, \tfrac{1}{n} \right) \boldsymbol{X}$$

- *druhý výběrový moment*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \frac{1}{n} \boldsymbol{X}' I_n \boldsymbol{X}, \qquad \text{kde } I_n \text{ je jednotková matice řádu } n$$

- *čtverec výběrového průměru*

$$(\overline{X})^2 = \overline{X}'\overline{X} = \frac{1}{n^2} \boldsymbol{X}' J_n \boldsymbol{X}, \qquad \text{kde } J_n = \{1\}_{i,j=1}^{n} \text{ je matice jedniček}$$

Příklady

V následujících příkladech spočítejte $\mathsf{E}\boldsymbol{X}$, $\mathsf{D}\boldsymbol{X}$, $\mathsf{R}\boldsymbol{X}$ náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

Příklad 2

Znáte: $\mathsf{E}(X_i) = 10\,i$, $\mathsf{C}(X_i, X_j) = i\,j$, $(i, j = 1, 2)$.

Příklad 3

Znáte: $\mathsf{E}(X_i) = 10\,i$, $\mathsf{D}(X_i) = i^2$, $(i, j = 1, 2, 3)$; $\mathsf{R}(X_i, X_j) = 0{,}5$ *pro* $i \neq j$.

Příklad 4

$\boldsymbol{X}$ *je náhodný výběr rozsahu 4 z rozdělení* $\mathsf{N}(10, 4)$.

Příklad 5

$\boldsymbol{X}$ *je náhodný výběr rozsahu 5 z rozdělení* $\mathsf{Ex}(\lambda)$.

Příklad 6

Spočítejte $\mathsf{E}(\boldsymbol{Y})$ *a* $\mathsf{D}(\boldsymbol{Y})$ *transformovaného náhodného vektoru*

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}, \quad \textit{když}\ \mathsf{E}\,\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \mathsf{D}\,\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příklady

Příklad 7

Znáte: $\mathsf{E}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\30\\2\end{pmatrix}$, $\mathsf{D}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100&0&25\\?&9&?\\?&9&16\end{pmatrix}$. *Spočítejte střední hodnoty, rozptyly, kovariance, korelační koeficienty náhodných veličin* X_1, X_2, X_3. *S využitím vhodných transformací dále spočítejte:*

- $\mathsf{E}(10\,X_3)$
- $\mathsf{E}(2\,X_1 - 5\,X_3 - X_2)$
- $\mathsf{C}(10\,X_3, 2\,X_1 - 5\,X_3 - X_2)$
- $\mathsf{C}(X_1 + X_2, X_3 - X_2)$
- $\mathsf{D}(10\,X_3)$
- $\mathsf{D}(2\,X_1 - 5\,X_3 - X_2)$
- $\mathsf{R}(10\,X_3, 2\,X_1 - 5\,X_3 - X_2)$
- $\mathsf{R}(X_1 + X_2, X_3 - X_2)$

řešení

- $\mathsf{E}(10\,X_3) = 20$
- $\mathsf{E}(2\,X_1 - 5\,X_3 - X_2) = 0$
- $\mathsf{C}(10\,X_3, 2\,X_1 - 5\,X_3 - X_2) = -390$
- $\mathsf{C}(X_1 + X_2, X_3 - X_2) = 25$
- $\mathsf{D}(10\,X_3) = 1600$
- $\mathsf{D}(2\,X_1 - 5\,X_3 - X_2) = 399$
- $\mathsf{R}(10\,X_3, 2\,X_1 - 5\,X_3 - X_2) \approx -0{,}488$
- $\mathsf{R}(X_1 + X_2, X_3 - X_2) \approx 0{,}905$

Příklady

Příklad 8

Spočtěte střední hodnotu $m = \mathsf{E}\left(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2\right)$ *a kovarianční matici* $\mathsf{D}(\boldsymbol{Y})$, *kde* $Y_1 = X_1,\ Y_2 = X_1 + X_2,\ Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$ *jsou transformace vzájemně nezávislých náhodných veličin* X_1, X_2, X_3, $\mathsf{E}(X_1) = 10,\ \mathsf{E}(X_2) = 20,\ \mathsf{E}(X_3) = 30$, $\mathsf{D}(X_1) = 1,\ \mathsf{D}(X_2) = 4, \mathsf{D}(X_3) = 9$.

řešení

$$m = 4600 + 20 = 4620,\quad \mathsf{D}(\boldsymbol{Y}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

Příklad 9

Spočtěte střední hodnotu $m = \mathsf{E}\left(Y_1Y_2 + Y_2Y_3 + Y_3Y_1\right)$ *a kovarianční matici* $\mathsf{D}(\boldsymbol{Y})$, *kde* $Y_1 = X_2 + X_3,\ Y_2 = X_1 + X_3,\ Y_3 = X_1 + X_2$ *jsou transformace vzájemně nekorelovaných složek náhodného vektoru* $\boldsymbol{X}$, $\mathsf{E}\,\boldsymbol{X} = (10, 10, 10)'$, $\mathsf{D}(X_i) = i^2$.

řešení

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{Y}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix},\quad m = 3800 + 38 = 3838,\quad \mathsf{D}(\boldsymbol{Y}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

Příklady

Příklad 10

Spočtěte $\mathsf{E}(\boldsymbol{Y})$, $\mathsf{D}(\boldsymbol{Y})$ *a* $m = \mathsf{E}\left(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + 2Y_1Y_4\right)$,
kde X_1, X_2, X_3, X_4 *jsou náhodné veličiny,* $\mathsf{E}(X_i) = 10$, $\mathsf{C}(X_i, X_j) = 1$.
Známe transformační vztahy $X_1 = Y_1,\ X_2 = Y_2 - Y_1,\ X_3 = Y_3 - Y_2,\ X_4 = Y_4 - Y_3$.

řešení

$$m = 1200 + 14 = 1214,\quad \mathsf{D}(\boldsymbol{Y}) = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 4 \\ 9 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Příklad 11

Spočítejte střední hodnotu povrchu hranolu s podstavou tvaru čtverce. Délka hrany podstavy je náhodná veličina se střední hodnotou 10 a rozptylem 1, výška hranolu je náhodná veličina se střední hodnotou 20 a rozptylem 9 a její korelační koeficient s délkou hrany podstavy je 0,1.

řešení

Střední hodnota povrchu uvedeného hranolu je rovna $1000 + 3{,}2 = 1003{,}2$.

Příklady

Příklad 12

Ověřte, pro že výběrový průměr $\overline{X}$ *náhodného výběru rozsahu* n *z rozdělení se střední hodnotou* μ *a rozptylem* σ^2 *platí:* $\mathsf{E}\left(\overline{X}\right) = \mu$, $\mathsf{D}\left(\overline{X}\right) = \sigma^2/n$.

Příklad 13

Ověřte, že pro výběrový rozptyl S_X^2 *náhodného výběru rozsahu* n *z rozdělení* $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ *platí:* $\mathsf{E}\left(S_X^2\right) = \sigma^2$.
Obtížnější varianta: ověřte, že $\mathsf{D}\left(S_X^2\right) = 2\sigma^4/(n-1)$.

Příklad 14

Ověřte, pro že pro náhodný výběr rozsahu n *z rozdělení se střední hodnotou* μ *a rozptylem* σ^2 *platí vztah* $\mathsf{E}\left[3Q_1 - Q_2\right] = (n-3)\sigma^2$,
kde $Q_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ *a* $Q_2 = (X_n - X_1)^2 + \sum_{i=2}^{n-1}(X_i - X_{i-1})^2$.

řešení Příkladu 6

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{Y}) = \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{D}(\boldsymbol{Y}) = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 50 \\ 8 & 13 & 70 \\ 50 & 70 & 400 \end{pmatrix}$$