

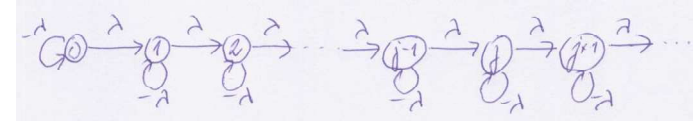
## 16. Poissonův proces

### 16.1. Definice: Definice Poissonova procesu

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů  $J = \{0, 1, 2, \dots\}$ , vektor počátečních pravděpodobností  $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots)$  a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda > 0 \text{ je konstanta, nazývá se } \textit{intenzita}.$$

Přechodový diagram:



Tento HMŘ se nazývá **Poissonův proces** (s parametrem  $\lambda$ ). (Vidíme, že v Poissonově procesu je možné jen setrvání v dosavadním stavu nebo přechod do nejbližšího vyššího stavu.)

Poissonův proces je pojmenován po Siméonu Denisi Poissonovi (1781 – 1840), což byl francouzský teoretický fyzik, matematik, geometr a astronom. Je mezi 72 slavnými Francouzi, jejichž jména jsou na Eiffelově věži, a je po něm pojmenován kráter na Měsíci.



**Vysvětlení:** Uvažujeme události téhož typu, které nastávají náhodně v čase. Pro  $t > 0$  označme  $X_t$  počet událostí, které nastanou v intervalu  $(0, t)$ . Necht' jsou splněny tyto podmínky:

- v krátkém časovém intervalu  $(t, t + h)$  nastane událost s pravděpodobností  $\lambda h + o(h)$  nezávisle na  $t$  a nezávisle na počtu událostí, které nastaly v intervalu  $(0, t)$ ,
- víc než jedna událost nastane s pravděpodobností  $o(h)$ ,
- počty událostí, které se vyskytnou v disjunktních časových intervalech, jsou nezávislé.,
- necht'  $X_0 = 0$ ,
- střední hodnota počtu událostí, které nastanou za časovou jednotku, je konstanta  $\lambda > 0$ .

Pak pro  $\forall t \geq 0$  platí:  $P(X_{t+h} = j / X_t = i) = p_{ij}(h) = \begin{cases} \lambda h + o(h) & \text{pro } j = i + 1 \\ 1 - \lambda h + o(h) & \text{pro } j = i \\ o(h) & \text{pro } j > i + 1 \\ 0 & \text{pro } j < i \end{cases}$ ,  $p_0(0) = 1$ ,  $p_j(0) = 0$  pro  $j \neq 0$ .

Odtud dostáváme, že intenzity přechodu jsou:  $q_{i,i+1} = \lambda$ ,  $q_{ii} = -\lambda$ ,  $q_{ij} = 0$  pro  $j \neq i, j \neq i+1$ , tedy

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Příklady uvažovaných událostí:

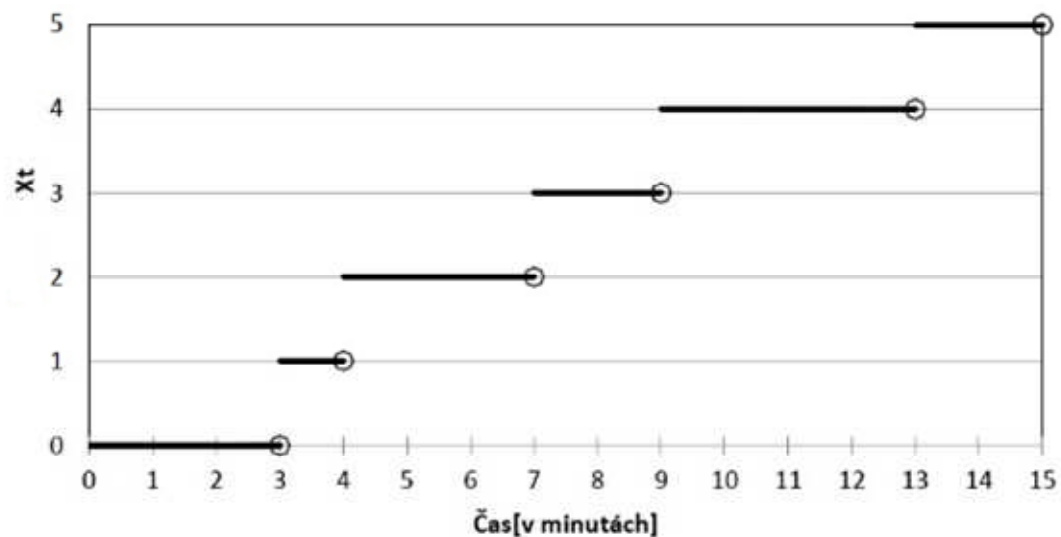
- dopady částic kosmického záření zaznamenávané čítačem částic
- rozpady radioaktivního prvku
- výzvy přicházející do telefonní ústředny
- dopravní nehody registrované na nějakém silničním úseku
- poruchy automatického stroje
- příchody zákazníků do nějakého systému obsluhy apod.

Upozornění: U těchto praktických příkladů není splněn předpoklad, že intenzita výskytu událostí  $\lambda$  je nezávislá na čase.

Provoz v telefonní ústředně je jistě živější dopoledne než večer; silniční provoz záleží jak na denní době tak na dnu v týdnu; množství radioaktivní látky časem ubývá a tedy ubývá i intenzita rozpadu jejích atomů; poruchovost stroje se může zvyšovat s jeho opotřebením apod. Často se ale sleduje výskyt těchto událostí jen po nějakou omezenou dobu, během níž lze předpokládat neměnnost intenzity  $\lambda$ .

## Grafické znázornění realizací Poissonova procesu

Předpokládejme, že během 15 minut zaznamenáváme příchozí hovory do informačního střediska. První zákazník volal 3 minuty po zahájení sledování, další zákazníci pak 4, 7, 9 a 13 minut po zahájení sledování. Během sledovaných 15 minut tedy nastalo 5 příchozích hovorů.



## 16.2. Věta: Věta o pravděpodobnostním rozložení složek Poissonova procesu

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je Poissonův proces s parametrem  $\lambda$ . Pak platí:  $\forall t \in T \forall j \in J: p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$ .

**Důkaz:** Sestavíme systém evolučních diferenciálních rovnic  $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$  s počáteční podmínkou  $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots)$ .

$$(\mathbf{p}'_0(t), \mathbf{p}'_1(t), \mathbf{p}'_2(t), \dots) = (\mathbf{p}_0(t), \mathbf{p}_1(t), \mathbf{p}_2(t), \dots) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \begin{matrix} \mathbf{p}'_0(t) = -\lambda \mathbf{p}_0(t) \\ \mathbf{p}'_1(t) = \lambda \mathbf{p}_0(t) - \lambda \mathbf{p}_1(t) \\ \mathbf{p}'_2(t) = \lambda \mathbf{p}_{01}(t) - \lambda \mathbf{p}_2(t) \\ \vdots \end{matrix}$$

Obecně:  $\mathbf{p}'_j(t) = \lambda \mathbf{p}_{j-1}(t) - \lambda \mathbf{p}_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots$  s počáteční podmínkou  $\mathbf{p}_0(0) = 1$ ,  $\mathbf{p}_j(0) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$

Při řešení těchto rovnic použijeme LT.

Obraz 1. rovnice:  $zP_0(z) - p_0(0) = 1 = -\lambda P_0(z) \Rightarrow P_0(z) = \frac{1}{z + \lambda} \Rightarrow p_0(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{z + \lambda}\right) = e^{-\lambda t}$

Obraz 2. rovnice:  $zP_1(z) - p_1(0) = 0 = \lambda P_0(z) - \lambda P_1(z) \Rightarrow P_1(z) = \frac{\lambda}{(z + \lambda)^2} \Rightarrow p_1(t) = L^{-1}\left(\frac{\lambda}{(z + \lambda)^2}\right) = \lambda t e^{-\lambda t}$

Obraz 3. rovnice:  $zP_2(z) - p_2(0) = 0 = \lambda P_1(z) - \lambda P_2(z) \Rightarrow P_2(z) = \frac{\lambda^2}{(z + \lambda)^3} \Rightarrow p_2(t) = L^{-1}\left(\frac{\lambda^2}{(z + \lambda)^3}\right) = \frac{1}{2!} (\lambda t)^2 e^{-\lambda t}$

Obecně:  $p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$

**Vysvětlení:** Náhodná veličina  $X_t$ , která udává např. počet zákazníků, kteří přijdou do fronty v intervalu  $(0, t)$ , se řídí rozložením  $Po(\lambda t)$ . Střední hodnota počtu událostí, které nastanou v intervalu  $(0, t)$ , je rovna číslu  $\lambda t$ , tedy konstanta  $\lambda$  představuje střední hodnotu počtu událostí, které nastanou za jednotkový časový interval. Proto se  $\lambda$  nazývá intenzita procesu.

Čísla  $p_j(t)$  udávají pravděpodobnosti, že v intervalu  $(0, t)$  nastalo právě  $j$  událostí.

Číslo  $p_0(t) = e^{-\lambda t}$  udává pravděpodobnost, že v intervalu  $(0, t)$  nenastala žádná událost.

Označíme-li  $S$  dobu čekání na změnu mezi stavy (tj. dobu čekání na příchod události resp. dobu setrvání ve stavu),

pak  $P(S > t) = e^{-\lambda t}$ , tedy  $P(S \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ . To znamená, že je-li rozložení počtu událostí, které nastaly v intervalu  $(0, t)$

Poissonovo, je rozložení doby čekání na změnu resp. doby setrvání ve stavu exponenciální.

**Upozornění:** Pro Poissonův proces neexistuje limitní rozložení, protože

$$\forall j \in J : \lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^j}{j!} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{\lambda t}} = 0$$

**16.3. Příklad:** Majitel obchodu s potravinami zjistil, že v ranní špičce přichází do obchodu průměrně 20 zákazníků za 5 minut. Majitelova manželka se domnívá, že v průběhu 10 minut může očekávat v průměru 30 zákazníků, zatímco optimističtější majitel v průběhu 10 minut očekává 40 zákazníků. Který odhad je pravděpodobnější?

**Řešení:**

Příchody zákazníků do obchodu lze modelovat Poissonovým procesem  $\{X_t; t \in T\}$ , kde  $X_t = j$ , když za časový interval  $(0, t)$  přijde do obchodu právě  $j$  zákazníků,  $j = 0, 1, 2, \dots$

Parametr procesu (intenzita procesu):  $\lambda = \frac{20}{5} = 4$  zákazníci za 1 minutu .

Podle předpokladu:  $X_t \sim \text{Po}(4t)$ , tedy  $P(X_t = j) = \frac{(4t)^j}{j!} e^{-4t}$

Odhad manželky:  $P(X_{10} = 30) = \frac{(4 \cdot 10)^{30}}{30!} e^{-4 \cdot 10} = p_{30}(10) = 0,01847$

V MATLABu: `poisspdf(30,40)`

Odhad manžela:  $P(X_{10} = 40) = \frac{(4 \cdot 10)^{40}}{40!} e^{-4 \cdot 10} = p_{40}(10) = 0,06297$

V MATLABu: `poisspdf(40,40)`

Optimistický odhad majitele je pravděpodobnější než opatrný odhad jeho manželky.

#### 16.4. Věta: Věta o pravděpodobnostech přechodu v Poissonově procesu

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je Poissonův proces s parametrem  $\lambda$ . Pak platí:  $\forall t \in T \forall i, j \in J: p_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} & \text{pro } j \geq i \\ 0 & \text{pro } j < i \end{cases}$ .

**Důkaz:** Z matice intenzit přechodu plyne, že jediný přechod s nenulovou pravděpodobností je přechod do stavu o 1 vyššího.

Přitom počáteční stav je nulový, tedy  $p_j(t) = p_{0j}(t)$ . V důsledku homogenity:  $p_{ij}(t) = p_{0,j-i}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} & \text{pro } j \geq i \\ 0 & \text{pro } j < i \end{cases}$ .

#### 16.5. Věta: Věta o střední hodnotě a rozptylu Poissonova procesu

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je Poissonův proces s parametrem  $\lambda$ . Pak  $E(X_t) = \lambda t$ ,  $D(X_t) = \lambda t$ .

**Důkaz:** Plyne z vlastností Poissonova rozložení, protože  $X_t \sim \text{Po}(\lambda t)$ .



### 16.6. Věta: Věta o koeficientu korelace dvou složek Poissonova procesu

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je Poissonův proces s parametrem  $\lambda$ . Pak platí:  $\forall t, h \in T, h > 0: R(X_t, X_{t+h}) = \sqrt{\frac{t}{t+h}}$ .

**Důkaz:**  $R(X_t, X_{t+h}) = \frac{C(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{D(X_t)D(X_{t+h})}} = \frac{E(X_t X_{t+h}) - E(X_t)E(X_{t+h})}{\sqrt{D(X_t)D(X_{t+h})}}$ . Ve větě 16.5. bylo ukázáno, že  $E(X_t) = \lambda t$ ,  $D(X_t) = \lambda t$ . Stačí tedy spočítat  $E(X_t X_{t+h})$ .

$$E(X_t X_{t+h}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} ij P(X_t = i \wedge X_{t+h} = j) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} ij P(X_t = i) P(X_{t+h} = j / X_t = i) =$$

$$|P(X_t = i) = p_i(t), P(X_{t+h} = j / X_t = i) = p_{ij}(t, t+h) = p_{j-i}(h) \text{ pro } j \geq i \text{ podle 16.4.}| = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} ij p_i(t) p_{j-i}(h) = |k = j - i| =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} i(k+i) p_i(t) p_k(h) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} i(k+i) \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda h)^k}{k!} e^{-\lambda h} = e^{-\lambda(t+h)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} ik \frac{(\lambda t)^i}{i!} \frac{(\lambda h)^k}{k!} + e^{-\lambda(t+h)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} i^2 \frac{(\lambda t)^i}{i!} \frac{(\lambda h)^k}{k!} =$$

$$= |i^2 = i(i-1) + i| = e^{-\lambda(t+h)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{(i-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda h)^k}{(k-1)!} + e^{-\lambda(t+h)} \sum_{i=1}^{\infty} [(i(i-1) + i)] \frac{(\lambda t)^i}{i!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda(t+h)} \lambda t e^{\lambda t} \lambda h e^{\lambda h} + e^{-\lambda(t+h)} \left[ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{(i-2)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{(i-1)!} \right] e^{\lambda h} = \lambda^2 t h + e^{-\lambda t} (\lambda^2 t^2 e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}) = \lambda^2 t h + \lambda^2 t^2 + \lambda t$$

Po dosazení:  $R(X_t, X_{t+h}) = \frac{\lambda^2 t h + \lambda^2 t^2 + \lambda t - \lambda t \lambda (t+h)}{\sqrt{\lambda t \lambda (t+h)}} = \frac{\lambda t}{\sqrt{\lambda^2 t (t+h)}} = \frac{t}{\sqrt{t(t+h)}} = \sqrt{\frac{t}{t+h}}$ .

**16.7. Věta:** Věta o rozložení doby setrvání řetězce v daném stavu

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je Poissonův proces s parametrem  $\lambda$ . Označme  $S_j$  dobu, kterou řetězec setrvá ve stavu  $j-1$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Pak  $S_j \sim \text{Ex}(\lambda)$  a střední hodnota doby setrvání řetězce ve stavu  $j-1$  je  $\frac{1}{\lambda}$ .

**Důkaz:** Plyne z věty 14.9.

**16.8. Věta:** Věta o nezávislosti dob setrvání řetězce v daných stavech

Náhodné veličiny  $S_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  jsou stochasticky nezávislé.

**Důkaz:** Nebudeme provádět.

**16.9. Příklad:** Na autobusovou zastávku přijíždějí autobusy linek č. 1 a č. 2. Předpokládáme, že příjezdy autobusů obou linek tvoří události Poissonových procesů s parametry  $\lambda_1, \lambda_2$ , přičemž tyto procesy probíhají nezávisle na sobě. Vypočítejte pravděpodobnost, že za časový interval délky  $t$  přijede na zastávku právě  $k$  autobusů.

**Řešení:**

Označme  $X_t$  počty příjezdů linky č. 1 v intervalu  $(0, t)$ ,  $X_t \sim \text{Po}(\lambda_1 t)$ ,  $P(X_t = j) = \frac{(\lambda_1 t)^j}{j!} e^{-\lambda_1 t}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$

Označme  $Y_t$  počty příjezdů linky č. 2 v intervalu  $(0, t)$ ,  $Y_t \sim \text{Po}(\lambda_2 t)$ ,  $P(Y_t = j) = \frac{(\lambda_2 t)^j}{j!} e^{-\lambda_2 t}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$

Dále označme  $Z_t$  počty příjezdů autobusů obou linek v intervalu  $(0, t)$ ,  $Z_t = X_t + Y_t$ . Máme počítat  $P(Z_t = k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Podle věty o rozložení součtu dvou stochasticky nezávislých náhodných veličin dostáváme:

$$P(Z_t = k) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X_t = j)P(Y_t = k - j) = \sum_{j=0}^k \frac{(\lambda_1 t)^j}{j!} e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_2 t)^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda_2 t} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\lambda_1 t)^j (\lambda_2 t)^{k-j} = \frac{[(\lambda_1 + \lambda_2)t]^k}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

Znamená to, že  $Z_t \sim \text{Po}((\lambda_1 + \lambda_2)t)$ .

**16.10. Věta:** Věta o bodovém a intervalovém odhadu parametru  $\lambda$  Poissonova procesu

Nechť v intervalu  $\langle 0, T \rangle$  byl sledován Poissonův proces s neznámým parametrem  $\lambda$  a bylo pozorováno  $n$  událostí.

a) Bodový odhad parametru  $\lambda$  je dán vzorcem:  $\hat{\lambda} = \frac{n}{T}$ , přičemž  $E(\hat{\lambda}) = \lambda$  (tj.  $\hat{\lambda}$  je nestranný odhad) a  $D(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{T}$ .

b)  $100(1-\alpha)\%$  empirický interval spolehlivosti pro  $\lambda$  má meze:  $d = \frac{1}{2T} \chi^2_{\alpha/2}(2n)$ ,  $h = \frac{1}{2T} \chi^2_{1-\alpha/2}(2n+2)$ .

**16.11. Příklad:** Na určitém zařízení byly po dobu 580 h sledovány poruchy. Za tuto dobu jich nastalo 22. Za předpokladu, že poruchy tvoří události Poissonova procesu s parametrem  $\lambda$ , odhadněte tento parametr a najděte pro něj 95% empirický interval spolehlivosti.

**Řešení:**

$$T = 580, n = 22, \text{ tedy } \hat{\lambda} = \frac{n}{T} = \frac{22}{580} = 0,0379$$

$$d = \frac{1}{2T} \chi^2_{\alpha/2}(2n) = \frac{1}{2 \cdot 580} \chi^2_{0,025}(44) = \frac{1}{1160} 27,57 = 0,0238$$

$$h = \frac{1}{2T} \chi^2_{1-\alpha/2}(2n+2) = \frac{1}{2 \cdot 580} \chi^2_{0,975}(46) = \frac{1}{1160} 66,62 = 0,0574$$

$0,0238 < \lambda < 0,0574$  s pravděpodobností aspoň 0,95.

**16.12. Poznámka:** Poissonův proces lze v MATLABu simulovat pomocí funkce Poisson.m:

```
function [v,absctet,relcet,p, tabulka1, tabulka2]=Poisson(CPS,lambda,t)
```

```
% vstupni parametry
```

```
%CPS ... celkovy pocet simulovanych prichodu zakazniku
```

```
%lambda ... intenzita vstupniho proudu zakazniku
```

```
%t ... casovy krok
```

```
% vystupni parametry
```

```
%v ... vektor variant poctu zakazniku
```

```
%absctet ... abs. cetnosti jednotlivych variant
```

```
%relcet ... relativni cetnosti jednotlivych variant
```

```
%p ... pravdepodobnosti jednotlivych variant
```

```
%tabulka1 ... empiricke a teoreticke charakteristiky simulovaneho poctu
```

```
%zakazniku
```

```
%tabulka2 ... empiricke a teoreticke charakteristiky doby simulace
```

Tuto funkci použijeme při řešení následujícího příkladu.

**16.13. Příklad:** V sobotu v době od 8 do 20 h sledujeme provoz v klidné ulici ve vilové čtvrti města. V tomto období vjíždějí auta do této ulice v průměru každých 8 minut. Předpokládejme, že intervaly mezi příjezdy aut se řídí exponenciálním rozložením. Pomocí MATLABu simulujte vjezd 20 aut do této ulice.

**Řešení:** V tomto případě jsou vstupní parametry tyto: CPS = 20, lambda = 1/8, časový krok zvolíme např. t = 8. Teoretická celková doba simulace by měla být  $20 \cdot 8 = 160$  min, průměr = 8 min, směrodatná odchylka = 8 min.)  
`[v,abscet,relcet,p, tabulka1, tabulka2]=Poisson(CPS,lambda,t)`

Počet aut, která vjíždějí vždy během 8 minut	Abs. četnost	Rel. četnost	pravděpodobnost
0	15	0,5357	0,3679
1	6	0,2143	0,3679
2	6	0,2143	0,1839
4	1	0,0357	0,0153

Průměrný počet aut za časový krok: 0,7857  
 Střední hodnota počtu aut za časový krok: 1  
 Pozorovaná směr. odch. počtu aut za časový krok: 1,0313  
 Směrodatná odchylka počtu aut za časový krok: 1  
 Celková doba simulace: 214,7869  
 Teoretická celková doba simulace:  $20 \cdot 8 = 160$   
 Průměrná doba mezi vjezdy aut: 10,7393  
 Střední hodnota doby mezi vjezdy aut: 8  
 Pozorovaná směr. odch. doby mezi vjezdy aut: 14,8255  
 Směrodatná odchylka doby mezi vjezdy aut: 8

Realizace Poissonova procesu:

