5. Stacionární a limitní rozložení homogenních markovských řetězců

5.1. Definice: Definice stacionárního vektoru

Nechť **a** je stochastický vektor a **P** stochastická matice odpovídající dimenze. Jestliže platí **a** = **aP**, pak vektor **a** se nazývá stacionární vektor matice **P**.

5.2. Příklad: Najděte stacionární vektor stochastické matice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Řešení: **a** = **aP**, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, tj. $(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$$a_1 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3}$$
$$a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{6} + \frac{a_3}{3}$$
$$a_3 = \frac{a_2}{2} + \frac{2a_3}{3}$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

$$6a_1 = 3a_1 + 2a_2$$
$$6a_2 = 3a_1 + a_2 + 2a_3$$
$$6a_3 = 3a_2 + 4a_3$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

$$\mathbf{a} = \left(\frac{4}{19}, \frac{6}{19}, \frac{9}{19}\right) = (0{,}211;\ 0{,}316;\ 0{,}474)$$

5.3. Poznámka: Stacionární vektor lze v MATLABu získat pomocí funkce sv.m:

```
function [a]=sv(P)
%funkce pro vypocet stacionarniho vektoru
%syntaxe: a=sv(P)
%vstupni parametr ... stochasticka matice P
%vystupni parametr ... stacionarni vektor a
%zjistime rad matice P:
n=size(P,1);
%vytvorime pomocnou jednotkovou matici:
I=eye(n);
%sestavime matici soustavy:
A=[[I-P]';ones(1,n)];
%vytvorime vektor pravých stran:
f=[zeros(n,1);1];
%vypocteme stacionární vektor
a=(A\f)';
```

5.4. Definice: Definice stacionárního rozložení homogenního markovského řetězce

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu **P**. Stochastický vektor **a**, který je stacionárním vektorem matice **P**, se nazývá stacionární rozložení daného řetězce.

Vysvětlení: Stacionární rozložení popisuje chování HMŘ po dostatečně dlouhé době sledování, kdy již odezněl vliv počátečních podmínek. Složka a_j stacionárního rozložení udává podíl celkové doby, kterou řetězec stráví ve stavu j.

5.5. Věta: Věta o existenci limity vektoru absolutních pravděpodobností

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu **P**. Jestliže pro $\forall i, j \in J$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = a_j$, pak existuje též $\lim\limits_{n\to\infty} p_j(n) = a_j$.

Důkaz: Ze zákona evoluce plyne: $\lim\limits_{n\to\infty} p_j(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i\in J} p_i(0) p_{ij}(n) = \sum\limits_{i\in J} p_i(0) \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \sum\limits_{i\in J} p_i(0) a_j = a_j \sum\limits_{i\in J} p_i(0) = a_j$.

5.6. Příklad:

Máme černou a bílou urnu a pět koulí. Na počátku pokusu jsou všechny koule v černé urně. V každém kroku pokusu náhodně vybereme jednu kouli, přičemž výběr každé koule je stejně pravděpodobný a přemístíme ji do druhé urny. Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1, ..., 5}, kde $X_n = j$, když po n-tém kroku bude v černé urně právě j koulí.

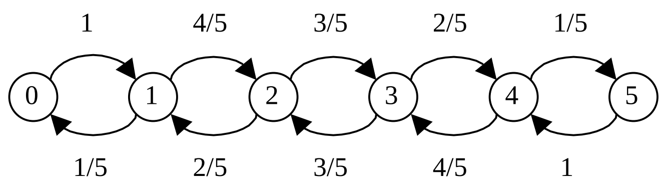
a) Najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.

b) Najděte stacionární rozložení tohoto řetězce.

c) Vypočtěte střední hodnotu počtu koulí v černé urně po stabilizaci pokusu.

Řešení:

ad a) $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



ad b) $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$a_0 = \frac{1}{5}a_1,\ a_1 = a_0 + \frac{2}{5}a_2,\ a_2 = \frac{4}{5}a_1 + \frac{3}{5}a_3,\ a_3 = \frac{3}{5}a_2 + \frac{4}{5}a_4,\ a_4 = \frac{2}{5}a_3 + a_5,\ a_5 = \frac{1}{5}a_4$

$a_1 = 5a_0$, $a_2 = 10a_0$, $a_3 = 10a_0$, $a_4 = 5a_0$, $a_5 = a_0$

Protože $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$, dostáváme $a_0 + 5a_0 + 10a_0 + 10a_0 + 5a_0 + a_0 = 1 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{32}$

Stacionární rozložení: $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{32}, \frac{5}{32}, \frac{10}{32}, \frac{10}{32}, \frac{5}{32}, \frac{1}{32}\right)$

ad c) $E(X) = 0\cdot\frac{1}{32} + 1\cdot\frac{5}{32} + 2\cdot\frac{10}{32} + 3\cdot\frac{10}{32} + 4\cdot\frac{5}{32} + 5\cdot\frac{1}{32} = \frac{80}{32} = 2{,}5$

Výsledek je ve shodě s očekáváním, že po dostatečně velkém počtu pokusů bude v obou urnách v průměru stejný počet koulí.

5.7. Poznámka: Pro daný homogenní markovský řetězec příslušné stacionární rozložení nemusí existovat.

5.8. Definice: Definice limitního rozložení a ergodického řetězce

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0). Jestliže existuje $\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n) = \overline{\mathbf{p}}$, pak vektor $\overline{\mathbf{p}}$ se nazývá limitní rozložení daného řetězce. Jestliže vektor $\overline{\mathrm{p}}$ nezávisí na vektoru počátečních pravděpodobností **p**(0), pak řekneme, že daný řetězec je ergodický (regulární).

5.9. Poznámka: Interpretace ergodického řetězce

Ergodický řetězec lze interpretovat takto: podíl případů, kdy je řetězec ve stavu j, se blíží číslu a_j bez ohledu na to, jak proces začal.

5.10. Věta: Věta o vztahu mezi limitním a stacionárním rozložením u ergodického řetězce

Jestliže $\{X_n; n \in N_0\}$ je ergodický homogenní markovský řetězec a existuje jeho stacionární rozložení **a**, pak limitní rozložení $\overline{\mathbf{p}}$ je rovno stacionárnímu rozložení **a**.

Důkaz: $\overline{\mathbf{p}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n-1)\mathbf{P} = \overline{\mathbf{p}}\mathbf{P}$, tedy $\overline{\mathbf{p}}$ je stacionární vektor matice **P** a ten značíme **a**.

5.11. Věta: Markovova věta

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu **P**. Jestliže existuje takové číslo $n \in N_0$, že matice $\mathbf{P}^n$ má všechny prvky kladné (říkáme, že je regulární) , pak

a) existuje stacionární rozložení daného řetězce a je jediné

b) řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ je ergodický

c) matice $\mathbf{P}^n$ konverguje k limitní matici **A**, jejíž řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru **a**.

Důkaz: Nebudeme provádět.

5.12. Poznámka:

Matice **P** je regulární, jestliže není rozložitelná na tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \text{ nebo } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P_1} \\ \mathbf{P_2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Znamená to, že z každého stavu lze po konečném počtu kroků přejít do všech ostatních stavů.

5.13. Příklad: Uvažme provoz výrobní linky, která se může nacházet ve dvou stavech: v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 2). Dlouhodobým sledováním provozu výrobní linky se dospělo k následujícím závěrům: pokud se výrobní linka v jednom období nacházela v provozu, tak v následujícím období v 50% případů zůstala v provozu a v 50% případů se nacházela v opravě. Pokud se výrobní linka nacházela v jednom období v opravě, pak v dalším období zůstala v 75% případů v opravě a v 25% případů se vrátila do provozu.

a) Modelujte tuto situaci pomocí homogenního markovského řetězce.

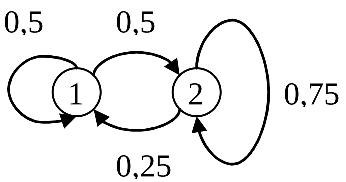
b) Najděte matici přechodu **P** a nakreslete přechodový diagram.

c) Najděte limitní rozložení daného homogenního řetězce a interpretujte ho.

Řešení:

ad a) $\{X_n; n \in N_0\}$, X_n = j, když v n-tém období je linka ve stavu j, j = 1, 2.

ad b) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$



ad c) $(a_1, a_2) = (a_1, a_2)\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$, $a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{3}, a_1 = \frac{1}{3}$, tedy $a = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Znamená to, že po dostatečně dlouhé době bude linka v provozu s pravděpodobností 1/3 a v opravě s pravděpodobností 2/3.

5.14. Příklad: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$,

kde p + q = 1. (Tento HMŘ se nazývá náhodná procházka s částečně odrážející stěnou.) Určete stacionární rozložení tohoto HMŘ.

Řešení: $(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \sum_{j=0}^{\infty} a_j = 1$

$$a_0 = qa_0 + qa_1 \Rightarrow a_1 = \frac{1-q}{q} a_0 = \frac{p}{q} a_0$$

$$a_1 = pa_0 + qa_2 \Rightarrow a_2 = \frac{\frac{p}{q} a_0 - pa_0}{q} = \frac{p(1-q)}{q^2} a_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 a_0$$

Obecně: $a_j = \left(\frac{p}{q}\right)^j a_0, j = 1, 2, \ldots$

a) Nechť $p < q$. Pak $1 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^j a_0 = \frac{a_0}{1-\frac{p}{q}} \Rightarrow a_0 = 1 - \frac{p}{q}$. Stacionární rozložení existuje a má tvar:

$a_j = \left(\frac{p}{q}\right)^j \left(1 - \frac{p}{q}\right)$, $j = 0,1,2,\ldots$ Jedná se o geometrické rozložení s parametrem $\vartheta = 1 - \frac{p}{q}$.

(Připomenutí geometrického rozložení:

Náhodná veličina X udává počet neúspěchů v posloupnosti opakovaných nezávislých pokusů předcházejících prvnímu úspěchu, přičemž pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu ϑ. Píšeme $X \sim \mathrm{Ge}(\vartheta)$. Pravděpodobnostní funkce:

$\pi(x) = \begin{cases} (1-\vartheta)^x \vartheta \text{ pro } x = 0, 1, \ldots \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$)

b) Nechť $p \geq q$. Pak $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \infty$ a stacionární rozložení neexistuje.

5.15. Příklad: Na malém městě jsou dva obchody, označme je A a B. Zajímáme se o nákupy zákazníků v těchto obchodech. Uvažujeme přitom týdenní období a sledujeme, kde zákazníci v jednotlivých týdnech nakupovali a jak tyto obchody střídali. Pro jednoduchost předpokládejme, že v průběhu jednoho týdne navštěvovali buď pouze obchod A nebo obchod B. Jako součást marketingového výzkumu byla shromážděna data od 1000 zákazníku v časovém horizontu 10 týdnů. Na základě tohoto výzkumu bylo zjištěno, že 90% zákazníků nakupujících v obchodě A tam bude nakupovat i v následujícím týdnu a 10% přejde do obchodu B. Dále 80% zákazníků nakupujících v obchodě B tam bude nakupovat i v následujícím týdnu a 20% přejde do obchodu A.

a) Modelujte tuto situaci pomocí HMŘ a najděte matici přechodu.

b) Jestliže na začátku nakupovalo 1000 zákazníků v obchodě A, kolik jich bude po šesti týdnech?

c) Jestliže na začátku nakupovalo 1000 zákazníků v obchodě B, kolik jich bude po šesti týdnech?

d) Jak velký je tržní podíl těchto dvou obchodů za předpokladu dostatečně velkého počtu období?

e) Obchod B provede reklamní kampaň, aby přilákal zákazníky nakupující v obchodě A. Došlo k určitému přesunu zájmu nakupovat v obchodě B. Dle nového průzkumu byla stanovena matice přechodu $\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}80 \end{pmatrix}$. Jak se nyní změnil tržní podíl obchodů A a B za předpokladu dostatečně velkého počtu období?

Řešení:

Ad a) Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {1, 2}, přičemž X_n = 1, když zákazník v n-tém týdnu nakupuje v obchodě A a X_n = 2, když zákazník v n-tém týdnu nakupuje v obchodě B.

Podle textu úlohy sestavíme matici přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Ad b) Vektor počátečních pravděpodobností je $\mathbf{p}(0) = (1{,}0)$, vektor absolutních pravděpodobností po 6 týdnech bude $\mathbf{p}(6) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^6 = (0{,}7059; 0{,}2941)$, tedy v obchodě A bude nakupovat 706 zákazníků.

Ad c) Vektor počátečních pravděpodobností je $\mathbf{p}(0) = (0{,}1)$, vektor absolutních pravděpodobností po 6 týdnech bude $\mathbf{p}(6) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^6 = (0{,}5882; 0{,}4118)$, tedy v obchodě B bude nakupovat 412 zákazníků.

Ad d) Hledáme stacionární rozložení daného HMŘ. Toto rozložení bude existovat, protože již matice **P** má všechny prvky kladné. Řešíme systém rovnic

$(a_0, a_1) = (a_0, a_1)\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}, a_0 + a_1 = 1$. Dostaneme složky stacionárního vektoru: $a_0 = \frac{2}{3}, a_1 = \frac{1}{3}$. Tržní podíl obchodu A tedy činí 66,7%, obchodu B 33,3%.

Ad e) V tomto případě hledáme stacionární rozložení pro HMŘ s maticí přechodu $\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}80 \end{pmatrix}$.

Získáme vektor **a** = (0,5714; 0,4286), tedy tržní podíl obchodu A činí 57,1%, obchodu B 42,9%.

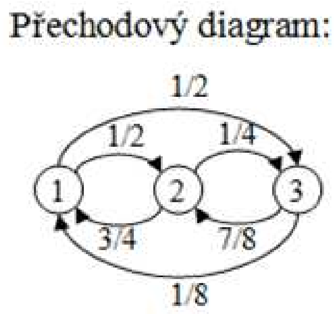
5.16. Příklad: Profesor má tři oblíbené otázky, z nichž jedna se objeví v každém testu, který profesor zadá. Studenti znají jeho zvyklosti dobře. Profesor nikdy nepoužívá téže otázky dvakrát po sobě. Když naposled užil otázky 1, hodí mincí a v případě, že padne líc, užije otázky 2. Jestliže užil otázky 2, hází dvěma mincemi a přejde k otázce 3, když na obou mincích padne líc. Jestliže užil otázky 3, hází třemi mincemi a přejde k otázce 1, když na všech třech padl líc.

a) Popište situaci pomocí homogenního markovského řetězce, najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
b) Za předpokladu, že uplynulo již dosti dlouhé období, zjistěte, kterou otázku použil profesor nejčastěji a v kolika procentech případů ji užil.

Řešení:

Ad a) Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{1,2,3\}$, přičemž $X_n = j$, když v okamžiku n zadá profesor otázku číslo j, j = 1,2,3.

Matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix}$



Ad b) Hledáme stacionární vektor daného HMŘ.

$(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 7/8 & 1/8 & 0 \end{pmatrix}$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$. Řešením získáme stacionární vektor **a** = (5/15, 6/15, 4/15), tedy profesor zadává nejčastěji otázku číslo 2 a užil ji ve 40% případů.

5.17. Příklad: V příkladu 4.11. „Model havarijního pojištění“ jsme zjistili, že matice přechodu má tvar

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1-e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1-e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

a) Odvoďte stacionární rozložení daného HMŘ.

b) Za předpokladu, že základní výše pojistného je w Kč, vypočtěte střední hodnotu výše pojistného, kterou pojištěnec zaplatí v dlouhodobém časovém horizontu.

Řešení:

Ad a) Pro zjednodušení zavedeme označení $c_0 = e^{-\lambda}$, $c_1 = \lambda\, e^{-\lambda}$. Matice **P** má pak tvar: $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1-c_0 & c_0 & 0 \\ 1-c_0 & 0 & c_0 \\ 1-c_0-c_1 & c_1 & c_0 \end{pmatrix}$. Stacionární rozložení existuje, protože již matice $\mathbf{P}^2$ má všechny prvky kladné. Řešíme systém rovnic

$$(a_0,a_1,a_2)=(a_0,a_1,a_2)\begin{pmatrix} 1-c_0 & c_0 & 0 \\ 1-c_0 & 0 & c_0 \\ 1-c_0-c_1 & c_1 & c_0 \end{pmatrix},\ a_0+a_1+a_2=1.$$ Dostaneme složky stacionárního vektoru:

$$a_0=\frac{1-c_0-c_0c_1}{1-c_0c_1}=\frac{1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-2\lambda}}{1-\lambda e^{-2\lambda}},\ a_1=\frac{c_0(1-c_0)}{1-c_0c_1}=\frac{e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda})}{1-\lambda e^{-2\lambda}},\ a_2=\frac{c_0{}^2}{1-c_0c_1}=\frac{e^{-2\lambda}}{1-\lambda e^{-2\lambda}}$$

Ad b) Připomeneme, že stavy 0, 1, 2 znamenají, že 0 je základní pojistné, 1 je pojistné s bonusem 30%, 2 je pojistné s bonusem 50%.

Střední hodnota výše pojistného tedy bude $w(a_0+0{,}7a_1+0{,}5a_2)=w\left[\frac{1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-2\lambda}}{1-\lambda e^{-2\lambda}}+0{,}7\frac{e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda})}{1-\lambda e^{-2\lambda}}+0{,}5\frac{e^{-2\lambda}}{1-\lambda e^{-2\lambda}}\right]$.