9. Absorpční homogenní markovské řetězce

9.1. Definice: Definice absorpčního stavu

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J.

Řekneme, že stav $j \in J$ je absorpční stav, jestliže $p_{jj} = 1$ (tzn., že ze stavu j není dosažitelný žádný jiný stav). Když řetězec vstoupí do absorpčního stavu, pak řekneme, že je absorbován.

9.2. Věta: Věta o vztahu mezi absorpčním stavem a trvalým stavem

Každý absorpční stav je trvalým stavem.

Důkaz: Plyne přímo z definice trvalého stavu.

9.3. Definice: Definice absorpčního homogenního markovského řetězce

Homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů se nazývá absorpční, jestliže každý jeho trvalý stav je absorpční.

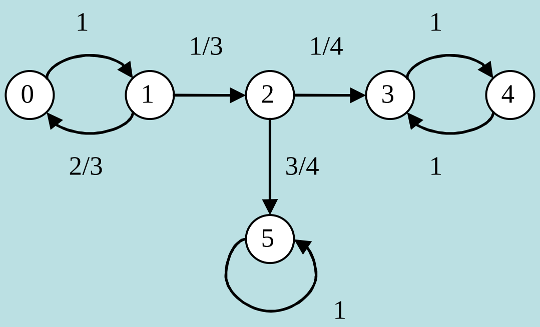
9.4. Příklad: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {0,1, ..., 5} a maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. Zjistěte, zda jde o absorpční řetězec.

Řešení:

Přechodový diagram



$J_T = \{3,4\} \cup \{5\}$, $J_P = \{0, 1, 2\}$.

Stavy 3 a 4 jsou trvalé, ale nejsou absorpční. Řetězec tedy není absorpční.

9.5. Definice: Definice fundamentální matice absorpčního řetězce

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je absorpční řetězec s konečnou množinou stavů, který má r absorpčních a s neabsorpčních stavů. Stavy přečíslujeme tak, aby po množině J_A r absorpčních stavů následovala množina J_N s neabsorpčních stavů. Matici přechodu **P** přepíšeme do kanonického tvaru $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$, kde

I je jednotková matice řádu r,

0 je nulová matice typu r x s,

R je matice typu s x r obsahující pravděpodobnosti přechodu z neabsorpčních do absorpčních stavů a

Q je čtvercová matice řádu s obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi neabsorpčními stavy.

Matice $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$ (kde **I** je jednotková matice řádu s) se nazývá fundamentální matice absorpčního řetězce. Inverzní matice existuje, pokud $\mathbf{Q}^n$ konverguje k **0**.

Vysvětlení: Prvek m_{ij} matice **M** udává střední hodnotu počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčním stavu j před přechodem do absorpčního stavu, pokud vyšel z neabsorpčního stavu i. Matici **M** se též říká matice středních dob přechodu. Přesnost výpočtu střední doby m_{ij} můžeme posoudit pomocí rozptylu s_{ij}^2 střední doby přechodu. Matici **S** tvořenou rozptyly s_{ij}^2 vypočítáme podle vzorce $\mathbf{S} = \mathbf{M}(2\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{I}) - \mathbf{M}kv$, kde matice **M**kv obsahuje m_{ij}^2.

9.6. Poznámka: Význam součtu prvků v i-tém řádku fundamentální matice **M**

Střední hodnotu počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčních stavech, když vychází z neabsorpčního stavu i a skončí v absorpčním stavu, vypočítáme jako součet prvků v i-tém řádku fundamentální matice **M**. Maticový zápis: $\mathbf{t} = \mathbf{Me}$, kde $\mathbf{e}$ je sloupcový vektor typu s x 1 ze samých jedniček.

Přesnost vypočtené střední hodnoty doby do absorpce posoudíme pomocí rozptylu. Vektor rozptylů se počítá podle vzorce: $\mathbf{rt} = (2\mathbf{M} - \mathbf{I})\mathbf{t} - \mathbf{t}\mathrm{kv}$, kde vektor $\mathbf{t}\mathrm{kv}$ obsahuje druhé mocniny prvků vektoru $\mathbf{t}$.

9.7. Příklad: Dva hráči A a B dali dohromady do hry vklad 4 Kč. Hráč A hází mincí. Když padne líc, vyhrává 1 Kč, když rub, prohrává 1 Kč. Hra trvá tak dlouho, až je jeden z hráčů zruinován.

a) Popište situaci pomocí homogenního markovského řetězce. Najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.

b) Ukažte, že řetězec je absorpční.

c) Najděte fundamentální matici a interpretujte její prvky.

b) Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčních stavech.

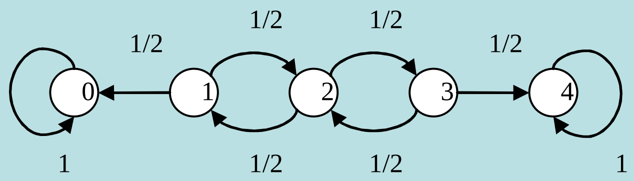
Řešení:

ad a) Zavedeme homogenní markovský řetězce $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1, 2, 3, 4}, přičemž $X_n = j$, když v n-tém kroku hry má hráč A právě j Kč.

Matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Přechodový diagram:



ad b) $J_T = \{0\} \cup \{4\}$, $J_P = \{1, 2, 3\}$. Trvalé stavy 0 a 4 jsou absorpční, řetězec je tedy absorpční.

ad c) Matici přechodu v kanonickém tvaru získáme tak, že nejprve zapíšeme pravděpodobnosti přechodu vztahující se k absorpčním stavům 0 a 4 a poté pravděpodobnosti přechodu vztahující se k neabsorpčním stavům 1, 2, 3.

Původní matice přechodu: Matice přechodu v kanonickém tvaru:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro výpočet fundamentální matice **M** potřebujeme matici **Q** obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi neabsorpčními stavy:

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{I}-\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{M}=(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Interpretace: Podívejme se např. na druhý řádek matice **M**. Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak lze očekávat, že před skončením hry bude mít v průměru jedenkrát 1 Kč, dvakrát 2 Kč a jedenkrát 3 Kč.

ad d) Podle poznámky 9.6. dostáváme:

$$\mathbf{t} = \mathbf{Me} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Interpretace: Má-li hráč A v daném okamžiku buď 1 Kč nebo 3 Kč, tak v průměru po třech krocích hra skončí. Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak v průměru po čtyřech krocích hra skončí.

$$\mathbf{rt} = (\mathbf{2M} - \mathbf{I})\mathbf{t} - \mathbf{t}\mathrm{kv} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že všechny střední hodnoty dob do absorpce jsou vypočteny se stejnou přesností.

9.8. Věta: Věta o pravděpodobnostech přechodu do absorpčních stavů

Označme b_{ij} pravděpodobnost, že řetězec vycházející z neabsorpčního stavu i bude absorbován ve stavu j.

Sestavíme matici **B** = $\left(b_{ij}\right)_{i \in J_N, j \in J_A}$.

Pak **B** = **MR**, kde **M** je fundamentální matice absorpčního řetězce a **R** je matice v levém dolním rohu matice přechodu **P** v kanonickém tvaru.

Důkaz: Nechť i je neabsorpční a j absorpční stav. Stavu j může být dosaženo 1. krokem s pravděpodobností p_{ij} nebo přechodem do neabsorpčního stavu k s pravděpodobností p_{ik} a odtud přechodem do absorpčního stavu j s pravděpodobností b_{kj}. Tedy $b_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in J_N} p_{ik} b_{kj}$. Maticově: **B** = **R** + **QB**, **B** – **QB** = **R**, (**I** – **Q**)**B** = **R**, **B** = (**I** – **Q**)$^{-1}$**R** = **MR**.

9.9. Definice: Definice matice přechodu do absorpčních stavů daného absorpčního řetězce

Matice **B** se nazývá matice přechodu do absorpčních stavů daného absorpčního řetězce.

9.10. Příklad: Pro zadání z příkladu 9.7. vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky. Pro připomenutí: Dva hráči A a B dali dohromady do hry vklad 4 Kč. Hráč A hází mincí. Když padne líc, vyhrává 1 Kč, když rub, prohrává 1 Kč. Hra trvá tak dlouho, až je jeden z hráčů zruinován.

Řešení:

Matice přechodu v kanonickém tvaru: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, tedy $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Již jsme vypočetli, že

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$, tedy $\mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

Interpretace: Má-li hráč A v daném okamžiku 1 Kč, pak bude s pravděpodobností 3/4 zruinován on a s pravděpodobností 1/4 bude zruinován hráč B. Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak bude s pravděpodobností 1/2 zruinován on a s pravděpodobností 1/2 bude zruinován hráč B. Má-li hráč A v daném okamžiku 3 Kč, pak bude s pravděpodobností 1/4 zruinován on a s pravděpodobností 3/4 bude zruinován hráč B.

9.11. Poznámka: Charakteristiky absorpčního řetězce můžeme v MATLABu vypočítat pomocí funkce absorb.m:

```
function [P0,M,B,t,rt]=absorb(P)
% Funkce pro vypocet zakladnich charakteristik absorpcniho  retezce
% Autor: Hana Tužilová
% function [P0,M,B,t]=absorb(P)
% vstupni parametr: matice prechodu P
% vystupni parametry: P0 ... matice prechodu v kanonickem tvaru
%                     M ... fundamentalni matice
%                     B ... matice prechodu do absorpcnich stavu
%                     t ... vektor strednich hodnot poctu kroku pred
%                     absorpci
%                     rt ... vektor rozptyu poctu kroku pred
%                     absorpci

D=diag(P); % identifikace absorpcnich stavu
j=find(D==1);
n=length(P);
T=1:n;
T(j)=[];
T=[j',T];

A=zeros(n); % sestaveni kanonickeho tvaru matice P
T=(0:n:(n^2-n))+T;
A(T)=1;
P0=A'*P*A;

m=length(j); % vypocet ostatnich charakteristik
Q=P0((m+1):n,(m+1):n);
M=eye(n-m)/(eye(n-m)-Q);
R=P0((m+1):n,1:m);
B=M*R;
t=M*ones(n-m,1);
tkv=t.*t;
rt=(2*M-eye(n-m))*t-tkv;
```

Použijeme-li tuto funkci na řešení příkladu 9.10., dostaneme výsledky:

$$
Pk = \begin{matrix}
1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\
0.5000 & 0 & 0 & 0.5000 & 0 \\
0 & 0 & 0.5000 & 0 & 0.5000 \\
0 & 0.5000 & 0 & 0.5000 & 0
\end{matrix}
\qquad
M = \begin{matrix}
1.5000 & 1.0000 & 0.5000 \\
1.0000 & 2.0000 & 1.0000 \\
0.5000 & 1.0000 & 1.5000
\end{matrix}
$$

$$
B = \begin{matrix}
0.7500 & 0.2500 \\
0.5000 & 0.5000 \\
0.2500 & 0.7500
\end{matrix}
\qquad
t = \begin{matrix}
3.0000 \\
4.0000 \\
3.0000
\end{matrix}
\qquad
rt = \begin{matrix}
8.0000 \\
8.0000 \\
8.0000
\end{matrix}
$$

9.12. Příklad: Jistá firma třídí svoje pohledávky po termínu splatnosti do 30 denních intervalů. Pohledávky, které jsou nad 90 dnů po době splatnosti, jsou považovány za nedobytné. K popisu situace zavedeme homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {1, 2, 3, 4, 5}, kde

stav 1 znamená pohledávky 0 – 30 dní po době splatnosti,

stav 2 pohledávky 31 – 60 dní po době splatnosti,

stav 3 pohledávky 61 – 90 dní po době splatnosti,

stav 4 splacené pohledávky a

stav 5 nedobytné pohledávky.

Dlouhodobou analýzou doby splatnosti jednotlivých pohledávek bylo zjištěno, že pravděpodobnosti přechodu jsou:

$p_{12} = 0{,}77$, $p_{14} = 0{,}23$, $p_{23} = 0{,}34$, $p_{24} = 0{,}66$, $p_{34} = 0{,}73$ a $p_{35} = 0{,}27$.

Úkoly:

a) Sestavte matici přechodu.

b) Klasifikujte stavy na absorpční a neabsorpční a najděte kanonický tvar matice přechodu.

c) Vypočtěte fundamentální matici a interpretujte její prvky.

d) Vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky.

e) Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.

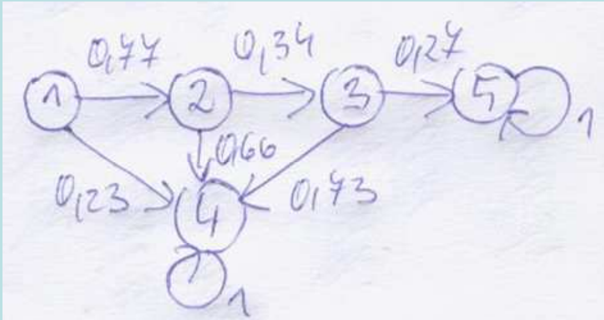
f) Předpokládejme, že objem pohledávek po termínu splatnosti v jednotlivých 30 denních intervalech je (4 030 000 Kč, 9 097 000 Kč, 3 377 000 Kč). Jaká je průměrná hodnota splacených a nedobytných pohledávek?

Řešení:

ad a)

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0{,}77 & 0 & 0{,}23 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}34 & 0{,}66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}73 & 0{,}27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Přechodový diagram:



ad b) Řetězec má tři přechodné stavy, a to 1, 2, 3 a dva trvalé stavy, a to 4 a 5. Oba jsou absorpční, tedy řetězec je absorpční.

Kanonický tvar matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}23 & 0 & 0 & 0{,}77 & 0 \\ 0{,}66 & 0 & 0 & 0 & 0{,}34 \\ 0{,}73 & 0{,}27 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0{,}23 & 0 \\ 0{,}66 & 0 \\ 0{,}73 & 0{,}27 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}77 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}34 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ad c) Vypočteme fundamentální matici absorpčního řetězce:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0{,}77 & 0{,}26 \\ 0 & 1 & 0{,}34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Interpretace 1. řádku: pohledávka zařazená do stavu 1 v něm v průměru stráví 1 x 30 = 30 dnů než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky. Pohledávka zařazená do stavu 1 stráví v průměru 0,77 x 30 = 23,1 dne ve stavu 2 než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky. Pohledávka zařazená do stavu 1 stráví v průměru 0,26 x 30 = 7,8 dne ve stavu 3 než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

ad d) Vypočteme matici přechodu do absorpčních stavů:

$$\mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}77 & 0{,}26 \\ 0 & 1 & 0{,}34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}23 & 0 \\ 0{,}66 & 0 \\ 0{,}73 & 0{,}27 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0{,}9293 & 0{,}0707 \\ 0{,}9082 & 0{,}0918 \\ 0{,}73 & 0{,}27 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Interpretace 1. řádku: pohledávka zařazená do stavu 1 bude s pravděpodobností 0,9293 splacena a s pravděpodobností 0,0707 se stane nedobytnou.

ad e) Vypočteme vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí:

$$\mathbf{t} = \mathbf{Me} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}77 & 0{,}26 \\ 0 & 1 & 0{,}34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2{,}03 \\ 1{,}34 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Interpretace:

2,03 x 30 = 60,9 – pohledávce zařazené do stavu 1 bude v průměru trvat 60,9 dne než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

1,34 x 30 = 40,2 – pohledávce zařazené do stavu 2 bude v průměru trvat 40,2 dne než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

1 x 30 = 30 – pohledávce zařazené do stavu 3 bude v průměru trvat 30 dnů než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

ad f) Připomínáme, že objem pohledávek po termínu splatnosti v jednotlivých 30 denních intervalech je (4 030 000 Kč, 9 097 000 Kč, 3 377 000 Kč). Průměrná hodnota splacených a nedobytných pohledávek:

$$\begin{pmatrix} 4030000 & 9097000 & 3377000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}9293 & 0{,}0707 \\ 0{,}9082 & 0{,}0918 \\ 0{,}73 & 0{,}27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14472184 & 2031816 \end{pmatrix}$$

Průměrná hodnota splacených pohledávek je tedy 14 472 184 Kč a nedobytných pohledávek je 2 031 816 Kč.

9.13. Využití markovských řetězců v genetice

Výskyt sledované vlastnosti u jedinců určitého typu je dán dvojicí alel A, a. Každý jedinec může mít dvojici alel AA (dominantní homozygot), aa (recesivní homozygot), aA=Aa (hybridní jedinec). Základním předpokladem genetiky je, že při křížení dostává potomek jednu alelu od každého z rodičů, přičemž tyto alely se vybírají náhodně a nezávisle na sobě. Pomocí homogenních markovských řetězců budeme modelovat rozmnožovací cyklus diploidních rostlin.

Situace 1 – křížení diploidní cizosprašné rostliny

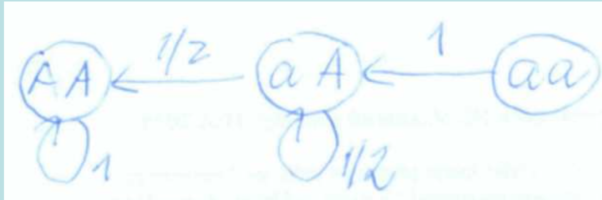
Z populace diploidní cizosprašné rostliny náhodně vybereme jedince, zkřížíme ho
a) s dominantním homozygotem,
b) s recesivním homozygotem,
c) s hybridem.
V příštím kroku pokusu náhodně vybereme jedince z populace jeho potomků, opět ho zkřížíme
a) s dominantním homozygotem,
b) s recesivním homozygotem,
c) s hybridem atd.
Všechny tři možnosti budeme modelovat pomocí HMŘ, vždy najdeme matici přechodu a stacionární rozložení. V případě, že se bude jednat o absorpční řetězec, najdeme jeho fundamentální matici a matici přechodu do absorpčních stavů.
Zavedeme HMŘ $\{X_n; n \in N\}$ s množinou stavů $J = \{1,2,3\}$, přičemž $X_n = 1$, když v n-tém kroku pokusu získáme dominantního jedince, $X_n = 2$, když v n-tém kroku pokusu získáme recesivního jedince a $X_n = 3$, když v n-tém kroku pokusu získáme hybridního jedince.

a) Křížení s dominantním homozygotem

Stanovení matice přechodu:

AA x AA $\Rightarrow$ AA, AA, AA, AA
aa x AA $\Rightarrow$ aA, aA, aA, aA
aA x AA $\Rightarrow$ aA, AA, aA, AA

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$



Řetězec má jediný trvalý stav (stav 1 = AA), který je absorpční, jde tedy o absorpční řetězec.

Výpočet stacionárního rozložení:

$\mathbf{aP} = \mathbf{a}$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$a_1 + \frac{1}{2} a_3 = a_1 \Rightarrow a_3 = 0$$

$$a_2 + \frac{1}{2} a_3 = a_3 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} a_3 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$$

$\mathbf{a} = (1, 0 ,0)$

Znamená to, že při křížení diploidní cizosprašné rostliny s dominantním homozygotem získáme po dostatečně velkém počtu kroků vždy dominantního homozygota.

Výpočet fundamentální matice:

Matice přechodu **P** je zadána přímo v kanonickém tvaru $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Fundamentální matice $\mathbf{M} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$.

Interpretace 1. řádku matice **M**: Pokud se řetězec v daném okamžiku nachází ve stavu 2 (tj. aa – recesivní homozygot), tak v průměru se před absorpcí ve stavu dominantního homozygota ocitne 1x ve stavu recesivního homozygota a 2x ve stavu hybrida.
Interpretace 2. řádku matice **M**: Pokud se řetězec v daném okamžiku nachází ve stavu 3 (tj. aA - hybrid), tak v průměru se před absorpcí ve stavu dominantního homozygota ocitne 2x ve stavu hybrida.

Výpočet matice přechodu do absorpčních stavů:

$$\mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

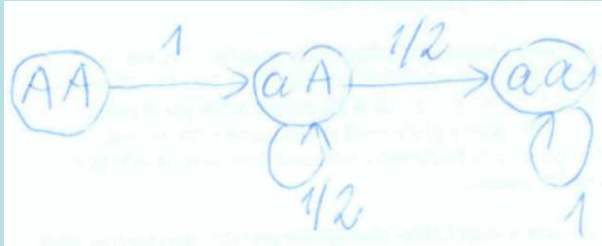
Je-li řetězec v daném okamžiku ve stavu 2 (tj. recesivní homozygot) nebo ve stavu 3 (tj. hybrid), tak s pravděpodobností 1 bude absorbován ve stavu dominantního homozygota.

b) Křížení s recesivním homozygotem

Stanovení matice přechodu:

AA x aa $\Rightarrow$ aA, aA, aA, aA
aa x aa $\Rightarrow$ aa, aa, aa, aa
aA x aa $\Rightarrow$ aa, aA, aa, aA

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$



Řetězec má jediný trvalý stav (stav 2 = aa), který je absorpční, jde tedy o absorpční řetězec.

Výpočet stacionárního rozložení:

$\mathbf{aP} = \mathbf{a}$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$a_2 + \frac{1}{2} a_3 = a_2 \Rightarrow a_3 = 0$$

$$a_1 + \frac{1}{2} a_3 = a_3 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 \Rightarrow a_2 = 1$$

$\mathbf{a} = (0, 1 ,0)$

Znamená to, že při křížení diploidní cizosprašné rostliny s recesivním homozygotem získáme po dostatečně velkém počtu kroků vždy recesivního homozygota.

Výpočet fundamentální matice:

Kanonický tvar matice **P**: $\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$, tedy $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Fundamentální matice $\mathbf{M} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$.

Interpretace 1. řádku matice **M**: Pokud se řetězec v daném okamžiku nachází ve stavu 1 (tj. AA – dominantní homozygot), tak v průměru se před absorpcí ve stavu recesivního homozygota ocitne 1x ve stavu dominantního homozygota a 2x ve stavu hybrida.
Interpretace 2. řádku matice **M**: Pokud se řetězec v daném okamžiku nachází ve stavu 3 (tj. aA - hybrid), tak v průměru se před absorpcí ve stavu recesivního homozygota ocitne 2x ve stavu hybrida.

Výpočet matice přechodu do absorpčních stavů:

$$\mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

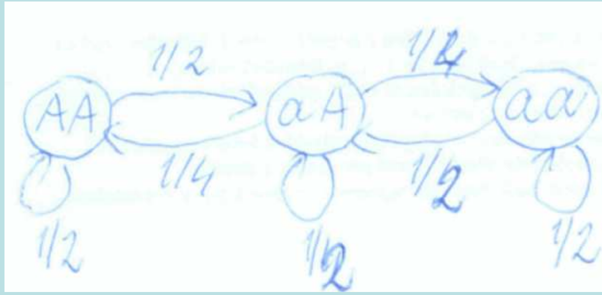
Je-li řetězec v daném okamžiku ve stavu 1 (tj. dominantní homozygot) nebo ve stavu 3 (tj. hybrid), tak s pravděpodobností 1 bude absorbován ve stavu recesivního homozygota.

c) Křížení s hybridním jedincem

Stanovení matice přechodu:

AA x aA $\Rightarrow$ aA, aA, AA, AA
aa x aA $\Rightarrow$ aa, aa, aA, aA
aA x aA $\Rightarrow$ aa, aA, aA, AA

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$



Všechny stavy řetězce jsou trvalé, ale žádný není absorpční, řetězec tedy není absorpční.

Výpočet stacionárního rozložení:

$\mathbf{aP} = \mathbf{a}$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_3 = a_1 \Rightarrow 2a_1 = a_3$$

$$\frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_3 = a_2 \Rightarrow 2a_2 = a_3$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2}a_3 + a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}, a_1 = a_2 = \frac{1}{4}$$

$\mathbf{a} = (0{,}25,\ 0{,}25,\ 0{,}5)$

Znamená to, že při křížení diploidní cizosprašné rostliny s hybridním jedincem získáme po dostatečně velkém počtu kroků s pravděpodobností 0,25 dominantního jedince, s pravděpodobností 0,25 recesivního jedince a s pravděpodobností 0,5 hybridního jedince.

Výpočet středních hodnot dob prvních vstupů:

$\mathbf{M} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{Z} + \mathbf{E}\widehat{\mathbf{Z}}\right)\widehat{\mathbf{M}}$, kde $\mathbf{E}$ je matice ze samých jedniček, matice $\widehat{\mathbf{Z}}$ obsahuje jen diagonální prvky matice $\mathbf{Z} = \left(\mathbf{I} - \left(\mathbf{P} - \mathbf{A}\right)\right)^{-1}$ (**A** je limitní matice přechodu) a matice $\widehat{\mathbf{M}}$ obsahuje jen diagonální prvky matice **M**. Přitom diagonální prvky matice **M** jsou převrácené hodnoty složek stacionárního vektoru.

Výpočtem zjistíme, že $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 8 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

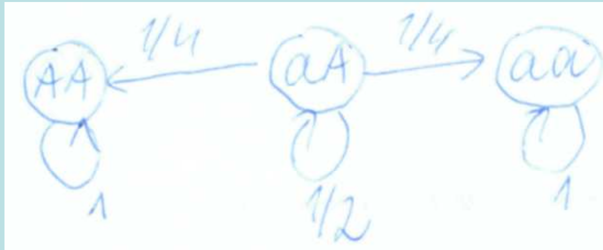
Interpretace 1. řádku matice **M**: Když řetězec vychází ze stavu dominantního homozygota, tak v průměru bude trvat 4 kroky, než se do něj vrátí. V průměru bude trvat 8 kroků, než se dostane do stavu recesivního homozygota a v průměru bude trvat 2 kroky, než se dostane do stavu hybrida.

Situace 2 – křížení diploidní samosprašné rostliny
Z populace diploidní samosprašné rostliny náhodně vybereme jedince, samosprášíme ho, z populace jeho potomků náhodně vybereme jedince, opět ho samosprášíme atd.

Stanovení matice přechodu:

AA x AA $\Rightarrow$ AA, AA, AA, AA
aa x aa $\Rightarrow$ aa, aa, aa, aa
aA x aA $\Rightarrow$ aa, aA, aA, AA

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$



Řetězec má dva trvalé stavy (stav 1 = AA, stav 2 = aa), které jsou absorpční, řetězec je tedy absorpční.

Výpočet stacionárního rozložení:

$\mathbf{aP} = \mathbf{a}$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$a_1 + \frac{1}{4} a_3 = a_1 \Rightarrow a_3 = 0$$

$$a_2 + \frac{1}{4} a_3 = a_2 \Rightarrow a_3 = 0$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 + a_2 = 1$$

Vidíme, že stacionární rozložení neexistuje.

Výpočet fundamentální matice:

Kanonický tvar matice **P**: $$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$, tedy $\mathbf{Q} = \left(1/2\right)$, $\mathbf{R} = \left(1/4 \quad 1/4\right)$.

Fundamentální matice $\mathbf{M} = \left(1 - 1/2\right)^{-1} = 2$.

Znamená to, že když je řetězec v daném okamžiku ve stavu 3 (tj. ve stavu hybrida), , tak v něm v průměru setrvá dva kroky, než bude absorbován ve stavu dominantního či recesivního homozygota.

Výpočet matice přechodu do absorpčních stavů:

$$\mathbf{B} = \mathbf{MR} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Je-li řetězec v daném okamžiku ve stavu 3 (tj. hybrid), tak s pravděpodobností 1/2 bude absorbován ve stavu dominantního homozygota či recesivního homozygota.