10. Vytvořující funkce a jejich aplikace při analýze homogenních markovských řetězců

10.1. Motivace:

Při analýze homogenních markovských řetězců se často pracuje s mocninami přechodu, což je výpočetně náročné. Tomu se lze vyhnout, pokud použijeme vytvořující funkce. Postupujeme tak, že najdeme transformaci daného originálu, učiníme příslušnou operaci a provedeme zpětnou transformaci. Lze dokázat, že mezi originálem a jeho transformací existuje vzájemně jednoznačný vztah. Vytvořující funkce se též nazývají z-transformace a jsou diskrétní obdobou Laplaceovy transformace, která se často používá především v technických aplikacích.

10.2. Definice: Definice vytvořující funkce reálné posloupnosti

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže řada $G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konverguje v nějakém okolí 0, nazveme ji vytvořující funkcí posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. (Obecněji lze vytvořující funkci zavést i pro posloupnost komplexních čísel, ale tímto případem se zabývat nebudeme.)

10.3. Příklad:

Najděte vytvořující funkce k posloupnostem:

a) $a_n = 1$, $n = 0, 1, \ldots$

b) $a_n = n$, $n = 0, 1, \ldots$

c) $a_n = x^n$, $n = 0, 1, \ldots$

d) $a_n = nx^n$, $n = 0, 1, \ldots$

Řešení:

ad a) $G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, |z| < 1$

ad b) $G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n = z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}, |z| < 1$

ad c) $G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (xz)^n = \frac{1}{1-xz}, |z| < \frac{1}{|x|}$

ad d)
$$G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(xz)^n = |\text{substituce } t = xz| = t\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} = t\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty} t^n =$$
$$= t\frac{d}{dt}\frac{1}{1-t} = \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{xz}{(1-xz)^2}, |z| < \frac{1}{|x|}$$

Výsledky uspořádáme do přehledné tabulky:

a_n	$G_a(z)$
1	$1/(1-z)$
n	$z/(1-z)^2$
x^n	$1/(1-xz)$
nx^n	$xz/(1-xz)^2$

10.4. Věta:

Nechť $G_a(z)$ je vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Pak pro n = 0, 1, 2, ... platí: $a_n = \left.\frac{G_a^{(n)}(z)}{n!}\right|_{z=0}$.

Důkaz:

Řadu $G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ budeme derivovat člen po členu a vyjádříme hodnotu této derivace v bodě z = 0. Přitom užijeme konvenci $0^0 = 1$.

$n = 0$: $G_a(0) = a_0$

$n = 1$: $\frac{d}{dz}G_a(z) = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}, \frac{d}{dz}G_a(0) = a_1$

$n = 2$: $\frac{d^2}{dz^2}G_a(z) = \frac{d^2}{dz^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) z^{n-2}, \frac{d^2}{dz^2}G_a(0) = a_2 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow a_2 = \frac{G_a^{(2)}(0)}{2!}$

$n = 3$: $\frac{d^3}{dz^3}G_a(z) = \frac{d^3}{dz^3}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=3}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2) z^{n-3}, \frac{d^3}{dz^3}G_a(0) = a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow a_3 = \frac{G_a^{(3)}(0)}{3!}$

atd.

10.5. Příklad:

Je dána vytvořující funkce $G_a(z) = e^z$. Najděte odpovídající posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Řešení:

$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{1}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3!}, \ldots,$ tedy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n!}\right\}_{n=0}^{\infty}$.

10.6. Definice: Definice konvoluce a konvoluční mocniny

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti. Jejich konvolucí rozumíme posloupnost $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde

$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$.

Zkráceně píšeme $\{c\} = \{a\}*\{b\}$.

Konvoluci $\{a\}*\{a\}$ nazýváme druhou konvoluční mocninou posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a značíme ji $\{a\}^{2*}$.

Obecně k-tá konvoluční mocnina posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je $\{a\}^{k*} = \{a\}* \ldots *\{a\}$.

10.7. Věta: Věta o vytvořující funkci konvoluce

Jestliže posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ má vytvořující funkci $G_a(z)$ a posloupnost $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ má vytvořující funkci $G_b(z)$, pak posloupnost $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, která je konvolucí daných dvou posloupností, má vytvořující funkci $G_c(z) = G_a(z).G_b(z)$. k-tá konvoluční mocnina $\{a\}^{k*}$ posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ má vytvořující funkci $G_a(z)^k$.

Důkaz:

Součin $G_a(z).G_b(z)$ dostaneme vynásobením mocninných řad.

Koeficient u z^n je v tomto součinu roven $a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$.

10.8. Definice: Definice vytvořující funkce posloupnosti vektorů či posloupnosti matic

a) Nechť I je nejvýše spočetná indexová množina. Uvažme posloupnost vektorů $\mathbf{a}_0 = (a_{0i})_{i\in I}$, $\mathbf{a}_1 = (a_{1i})_{i\in I}$, ...

Vytvořující funkce posloupnosti vektorů $\{\mathbf{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definována vztahem: $G_{\mathbf{a}}(z) = (G_{ai}(z))_{i\in I}$, kde $G_{ai}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{ni} z^n$.

Zkráceně píšeme: $G_{\mathbf{a}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

b) Nechť I, J jsou nejvýše spočetná indexové množiny. Uvažme posloupnost matic $\mathbf{A}_0 = (a_{0ij})_{i\in I, j\in J}$, $\mathbf{A}_1 = (a_{1ij})_{i\in I, j\in J}$, ...

Vytvořující funkce posloupnosti matic $\{\mathbf{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$ je definována vztahem: $G_{\mathbf{A}}(z) = (G_{aij}(z))_{i\in I, j\in J}$, kde $G_{aij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nij} z^n$.

Zkráceně píšeme:

$G_{\mathbf{A}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n z^n$.

(Vytvořující funkce posloupnosti vektorů či posloupnosti matic vznikne tak, že získáme vytvořující funkce posloupnosti odpovídajících složek a vzniklé vytvořující funkce uspořádáme do vektoru či do matice.)

10.9. Věta: Věta o vytvořující funkci posloupnosti matic přechodu po n krocích

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu $\mathbf{P}$. Pak vytvořující funkce posloupnosti matic $\{\mathbf{P}^n\}_{n=0}^{\infty}$ má tvar: $G_{\mathbf{P}}(z) = (\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$.

Důkaz: $G_{\mathbf{P}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z\mathbf{P})^n = (\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$.

10.10. Věta: Věta o vytvořující funkci posloupnosti vektorů absolutních pravděpodobností po n krocích

Nechť homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ má matici přechodu $\mathbf{P}$ a vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0)$. Pak vytvořující funkce posloupnosti vektorů absolutních pravděpodobností $\{\mathbf{p}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ má tvar: $G_{\mathbf{p}}(z) = \mathbf{p}(0)(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$.

Důkaz: Podle definice vytvořující funkce posloupnosti vektorů platí: $G_{\mathbf{p}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n) z^n$. Ovšem $\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{p}(n).\mathbf{P}$, tedy vytvořující funkce posloupnosti vektorů $\{\mathbf{p}(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$ má tvar: $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n+1) z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n) z^n \right) \cdot \mathbf{P} = G_{\mathbf{p}}(z) \cdot \mathbf{P}$. Upravíme levou stranu:

$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n+1) z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n+1) z^{n+1} = |k = n+1| = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{p}(k) z^k = \frac{1}{z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{p}(k) z^k - \mathbf{p}(0) \right) = \frac{1}{z} \left(G_{\mathbf{p}}(z) - \mathbf{p}(0) \right)$ Odtud dostaneme porovnáním levé a pravé strany:

$\frac{1}{z} \left(G_{\mathbf{p}}(z) - \mathbf{p}(0) \right) = G_{\mathbf{p}}(z) \cdot \mathbf{P}$. Po úpravě: $G_{\mathbf{p}}(z) = \mathbf{p}(0)(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$.

(Z tohoto vztahu je zřejmé, že při výpočtu vektoru absolutních pravděpodobností se vyhneme umocňování matice $\mathbf{P}$, což znamená úsporu numerických výpočtů. Na druhou stranu však musíme počítat inverzní matici $(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$.)

10.11. Příklad: Nechť homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{1,2\}$ popisuje chování výrobní linky, která se v n-tém období nachází buď v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 2). Dlouhodobým sledováním byla zjištěna matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$. Pomocí vytvořujících funkcí najděte matici přechodu po n krocích $\mathbf{P}^n$ a vektor absolutních pravděpodobností po n krocích $\mathbf{p}(n)$.

Řešení: Z věty 10.9. plyne, že $G_{\mathbf{P}}(z) = (\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}, \mathbf{I} - z\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{z}{2} & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{4} & \frac{3z}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{z}{2} & -\frac{z}{2} \\ -\frac{z}{4} & 1-\frac{3z}{4} \end{pmatrix}$$

det(**I**-z**P**) $= \left(1-\frac{z}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{3z}{2}\right)-\frac{z^2}{8} = \ldots = (1-z)\cdot\left(1-\frac{z}{4}\right)$

$$(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} = \frac{1}{(1-z)\left(1-\frac{z}{4}\right)}\begin{pmatrix} 1-\frac{3z}{4} & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{4} & 1-\frac{z}{2} \end{pmatrix} = \cdots = \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \frac{1}{1-\frac{z}{4}}\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(Upozornění: Prvky matice $(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$ byly získány rozkladem na parciální zlomky.

Např. prvek $a_{11} = \dfrac{1-\frac{3z}{4}}{(1-z)\left(1-\frac{z}{4}\right)} = \dfrac{A}{1-z} + \dfrac{B}{1-\frac{z}{4}} = \ldots = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-z} + \dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{z}{4}}$. Podobně získáme další prvky.)

$\dfrac{1}{1-z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = 1$, n = 0, 1, 2, ...

$\dfrac{1}{1-\frac{z}{4}}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, n = 0, 1, 2, ...

Matici $\mathbf{P}^n$ lze tedy psát ve tvaru: $\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Interpretace: První matice je konstantní a nezávisí na počtu kroků. Lze snadno ověřit, že je to limitní matice přechodu **A**.

Druhá matice násobená koeficientem $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ představuje přechodnou složku daného homogenního markovského řetězce.

Pro vektor absolutních pravděpodobností platí:

$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0).\mathbf{P}^n = \mathbf{p}(0)\left[\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\right]$.

Druhý sčítanec v závorce pro n → ∞ konverguje k 0, tedy lze psát $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{cases} (1,0)\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ (0,1)\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{cases}$.

Pomocí vytvořujících funkcí jsme tedy dostali vektor limitních pravděpodobností $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

11. Markovské řetězce s oceněním přechodů

11.1. Definice: Definice markovského řetězce s oceněním přechodů

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů J, v němž jsou všechny stavy trvalé nenulové neperiodické (tj. ergodické). Předpokládáme, že každému přechodu ze stavu i do stavu j je přiřazeno ocenění r_{ij} (představuje výnos nebo ztrátu spojenou s přechodem z i do j). Tato ocenění uspořádáme do matice **R** = $(r_{ij})_{i,j\in J}$, která se nazývá matice výnosů. Řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ se pak nazývá markovský řetězec s oceněním přechodů.

11.2. Věta: Rekurentní vztah pro střední hodnotu celkového výnosu po n krocích

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec s oceněním přechodů, který má matici přechodu **P** a matici ocenění **R**. Označme $v_i(n)$ střední hodnotu celkového výnosu, který se získá po n krocích, když řetězec vychází ze stavu i. Dále označme $q_i = \sum_{j\in J} p_{ij} r_{ij}$ střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu i. Pak pro $\forall i \in J$ a n = 1, 2, 3, ... platí rekurentní vztah:

$$v_i(n) = q_i + \sum_{j\in J} p_{ij} v_j(n-1)$$, přičemž $v_i(0) = 0$.

V maticové formě: $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(n-1)$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

11.3. Příklad: Sledujeme provoz výrobní linky, která se může nacházet ve dvou stavech – v provozu (stav 0) nebo v opravě (stav 1). Dlouhodobým sledováním byla stanovena matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$. Jednotlivým přechodům jsou přiřazena určitá ocenění (tj. výnosy nebo ztráty) prostřednictvím matice výnosů $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$. Pro i = 0, 1 položíme $v_i(0) = 0$. Pro oba stavy vypočtěte střední hodnotu celkového výnosu, který se získá za n = 1, 2,…, 6 období.

Řešení: Nejprve vypočteme střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu 0 resp. 1. Přitom

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$.

$q_0 = \sum_{j=0}^{1} p_{0j} r_{0j} = p_{00} r_{00} + p_{01} r_{01} = 0,5 \cdot 10 + 0,5 \cdot 4 = 7$, $q_1 = \sum_{j=0}^{1} p_{1j} r_{1j} = p_{10} r_{10} + p_{11} r_{11} = 0,4 \cdot 5 + 0,6 \cdot (-5) = -1$, tj. $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Nyní počítáme $\mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1,2 \end{pmatrix}$ atd.

Tabulka středních hodnot celkových výnosů pro n = 1, 2, ..., 6:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	10	12,6	15,16	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1	1,2	3,72	6,272	8,8278	11,38272
$v_0(n+1)-v_0(n)$	x	3	2,6	2,56	2,556	2,5556
$v_1(n+1)-v_1(n)$	x	2,2	2,52	2,552	2,5558	2,55492
$v_0(n) - v_1(n)$	8	8,8	8,88	8,888	8,8888	8,88888

Vidíme, že s rostoucím n se rozdíl $v_0(n) - v_1(n)$ blíží konstantě $8,\overline{8}$. Znamená to, že když je na počátku sledování linka v provozu, tak se po dostatečně dlouhé době získá výnos vyšší o $8,\overline{8}$ jednotek než v případě, kdy je linka na počátku v opravě. Dále můžeme pozorovat, že s rostoucím n se rozdíl $v_i(n+1) - v_i(n)$ blíží konstantě $2,\overline{5}$. To souvisí s limitními vlastnostmi řetězce.

11.4. Poznámka: Je-li $\{X_n; n \in N_0\}$ homogenní markovský řetězec s množinou stavů $J = \{0,1,\dots,m\}$ s oceněním přechodů nerozložitelný, pak existuje jeho stacionární rozložení $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_m)$ a platí:

$$\lim_{n\to\infty}\left(v_i(n+1) - v_i(n)\right) = \sum_{j=0}^{m} a_j q_j = g.$$

Konstanta g se nazývá zisk řetězce. V př. 10.3. $\mathbf{a} = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right), \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, tedy $g = \frac{4}{9}7 - \frac{5}{9} = 2,\overline{5}$.

11.5. Věta: Věta o vytvořující funkci posloupnosti vektorů středních hodnot celkových výnosů po n krocích

Pro vytvořující funkci $G_{\mathbf{v}}(z)$ posloupnosti vektorů $\{\mathbf{v}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ platí: $G_{\mathbf{v}}(z) = \frac{z}{1-z}(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q}$.

Důkaz: Podle definice vytvořující funkce posloupnosti vektorů platí: $G_{\mathbf{v}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{v}(n) z^n$. Protože platí rekurentní vztah $\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(n)$, lze vytvořující funkci posloupnosti vektorů $\{\mathbf{v}(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$ psát ve tvaru:

$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{v}(n+1) z^n = \mathbf{q}\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \mathbf{P}\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{v}(n) z^n = \mathbf{q}\frac{1}{1-z} + G_{\mathbf{v}}(z)\cdot\mathbf{P}$. Upravíme levou stranu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{v}(n+1) z^n = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{v}(n+1) z^{n+1} = |k = n+1| = \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{v}(k) z^k = \frac{1}{z}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{v}(k) z^k - \mathbf{v}(0)\right) = \frac{1}{z} G_{\mathbf{v}}(z).$$

Odtud dostaneme porovnáním levé a pravé strany:

$\frac{1}{z} G_{\mathbf{v}}(z) = \frac{1}{1-z}\mathbf{q} + G_{\mathbf{v}}(z)\cdot\mathbf{P}$. Po úpravě: $G_{\mathbf{v}}(z) = \frac{z}{1-z}(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q}$.

11.6. Příklad: Pro zadání z příkladu 11.3. najděte vyjádření pro vektor **v**(n) pomocí vytvořujících funkcí.

Řešení: Z věty 11.5. plyne, že $G_v(z) = \frac{z}{1-z}(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q}$.

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}, \mathbf{I} - z\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z/2 & z/2 \\ 2z/5 & 3z/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z/2 & -z/2 \\ -2z/5 & 1-3z/5 \end{pmatrix}$, det(**I**-z**P**) = $\left(1-\frac{z}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{3z}{5}\right) - \frac{z^2}{5} = \ldots = (1-z)\cdot\left(1-\frac{z}{10}\right)$

$$(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} = \frac{1}{(1-z)\left(1-\frac{z}{10}\right)}\begin{pmatrix} 1-\frac{3z}{5} & \frac{z}{2} \\ \frac{2z}{5} & 1-\frac{z}{2} \end{pmatrix} = \cdots = \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{1}{1-\frac{z}{10}}\begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

$$G_v(z) = \frac{z}{1-z}(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q} = \left[\frac{z}{(1-z)^2}\begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{z}{(1-z)\left(1-\frac{z}{10}\right)}\begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\frac{z}{(1-z)^2}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = n$, n = 0, 1, 2, ...

$$\frac{z}{(1-z)\left(1-\frac{z}{10}\right)} = \ldots = \frac{\frac{10}{9}}{1-z} + \frac{-\frac{10}{9}}{1-\frac{z}{10}}$$

$\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{1-z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = \frac{10}{9}\cdot 1^n = \frac{10}{9}$, n = 0, 1, 2, ...

$-\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{10}}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = -\frac{10}{9}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n$, n = 0, 1, 2, ...

Celkem:

$$\mathbf{v}(n) = \left[n\begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{10}{9}\left(1-0{,}1^n\right)\begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23n}{9} \\ \frac{23n}{9} \end{pmatrix} + \left(1-0{,}1^n\right)\begin{pmatrix} \frac{400}{81} \\ -\frac{320}{81} \end{pmatrix}$$

Tedy $v_0(n) = \frac{23n}{9} + \frac{400}{81}\left(1-0{,}1^n\right)$, $v_1(n) = \frac{23n}{9} - \frac{320}{81}\left(1-0{,}1^n\right)$.

Pro dostatečně velká n se výraz $0{,}1^n$ bude blížit nule. Když ho zanedbáme, získáme přibližné vyjádření:
$v_0(n) \approx 2{,}5555\, n + 4{,}9383$, $v_1(n) \approx 2{,}5555\, n - 34{,}9506$.

11.7. Věta: Přibližné vyjádření vektoru středních hodnot celkových výnosů po n krocích pomocí limitní matice přechodu

Nechť **A** je limitní matice přechodu daného markovského řetězce s oceněním přechodů. Pak pro dostatečně velká n platí: $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

11.8. Příklad: Pro zadání z příkladu 11.3. najděte přibližné vyjádření pro vektor **v**(n).

Řešení: Použijeme vzorec $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{Aq} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$. Nejprve najdeme limitní matici **A**, jejíž všechny řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru matice **P**. Řešením systému $\mathbf{a} = \mathbf{aP}$, $a_1 + a_2 = 1$ získáme vektor $\mathbf{a} = (4/9 \;\; 5/9)$, tudíž

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}.$$

Dále $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \ldots = \begin{pmatrix} 1{,}0617 & -0{,}0617 \\ -0{,}0494 & 1{,}0494 \end{pmatrix}$, tedy

$$\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}0617 & -0{,}0617 \\ -0{,}0494 & 1{,}0494 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 2{,}\overline{5}n + 4{,}9383 \\ 2{,}\overline{5}n - 3{,}9506 \end{pmatrix}.$$

Tabulka:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7,4938	10,0494	12,609	15,1605	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1,3951	1,1605	3,716	6,2716	8,8272	11,3827

Pro porovnání uvedeme tabulku získanou pomocí rekurentního vzorce:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	10	12,6	15,16	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1	1,2	3,72	6,272	8,8278	11,38272

11.9. Poznámka: Vektor středních hodnot celkových výnosů po jednom až n obdobích lze získat pomocí funkce vynos.m:

```
function a = vynos(P,R,n);
% Autor: Stanislav Tvrz
% syntaxe: function a=vynos(P,R,n);
% funkce pocita:
%       vektory strednich hodnot celkovych vynosu po jednom az po n obdobich
%       znazorni prubehy vektoru strednich hodnot pro jednotlive stavy
%       v zavislosti na poctu obdobi
% vstupni parametry:
% P - matice prechodu, R -  matice vynosu, n - pocet obdobi
disp('kontrola - matice prechodu P')
P
disp(' ')
disp('kontrola - matice vynosu R')
R
disp(' ')

vel=size(P);
v=zeros(vel(1),n+1);
q=diag(P*R');
for i=2:n+1
    v(:,i)=q+P*v(:,i-1);
end
cas=0:n;
vysledek=[cas;v];
disp('sloupcove vektory strednich hodnot celkovych vynosu po n krocich')
disp(num2str(vysledek))
disp('pozn: na prvnim radku hodnoty n')

%generovani popisu stavu
max_ind=size(num2str(vel(1)),2);
```

```
legenda=zeros(vel(1),5+max_ind);
for i=1:vel(1)
    legenda(i,1:5+size(num2str(i),2))=[['stav '],num2str(i)];
end
legenda=char(legenda);
%graf celkovych vynosu
figure
plot([0:n],v);
legend(legenda)
end
```

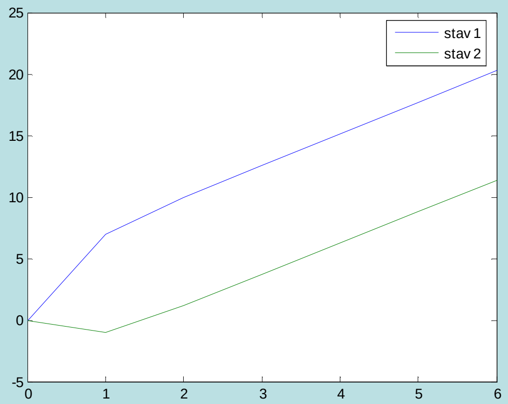
Použijeme-li tuto funkci pro řešení příkladu 10.3. pro jedno až 6 období, dostaneme výsledky:

sloupcove vektory strednich hodnot celkovych vynosu po n krocich

0	1	2	3	4	5	6
0	7	10	12.6	15.16	17.716	20.2716
0	-1	1.2	3.72	6.272	8.8272	11.3827

pozn: na prvnim radku hodnoty n

Graf celkových výnosů:



11.10. Definice: Definice markovského řetězce s diskontovaným oceněním přechodů

Nechť v homogenním markovském řetězci s oceněním přechodů je přechod ze stavu i v čase n do stavu j v čase n+1 oceněn číslem $\beta^n r_{ij}$, kde číslo β $(0 < \beta < 1)$ je tzv. diskontní faktor. Uvedený řetězec se pak nazývá markovský řetězec s diskontovaným oceněním přechodů.

Vysvětlení: Diskontní faktor snižuje hodnotu budoucího výnosu. Vystupuje v roli odúročitele, může být 1/(1+i), kde i je úročitel. Může také vyjadřovat pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat. Jeho užití bude účelné tam, kde se může očekávat, že proces skončí, ale neví se, kdy přesně k tomu dojde.

11.11. Věta: Rekurentní vztah pro vektor středních hodnot diskontovaných celkových výnosů po n krocích.

Pro vektor středních hodnot diskontovaných celkových výnosů platí rekurentní vztah:

$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta\mathbf{P}\mathbf{v}(n-1)$, přičemž $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$.

Limitní hodnota vektoru středních hodnot celkových výnosů je $\lim_{n\to\infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q}$

Důkaz: Nebudeme provádět.

11.12. Věta: Věta o vytvořující funkci posloupnosti vektorů středních hodnot celkových výnosů po n krocích

Pro vytvořující funkci posloupnosti vektorů $\{\mathrm{v}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ v markovském řetězci s diskontovaným oceněním přechodů platí:

$$G_v(z) = \frac{z}{1-z}\left(\mathbf{I} - \beta z\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{q}.$$

Důkaz: Podobně jako důkaz věty 11.5.

11.13. Příklad: V příkladu 11.3. předpokládejme, že diskontní faktor $\beta = 0{,}5$ značí pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat.

a) Pomocí rekurentního vztahu najděte vektor $\mathbf{v}(n)$ středních hodnot celkových výnosů pro n = 1, 2, …, 6 a stanovte limitní hodnotu tohoto vektoru.

b) Pomocí vytvořujících funkcí najděte vyjádření pro vektor $\mathbf{v}(n)$.

Řešení:

Ad a) $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, $\beta = 0{,}5$, $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta\mathbf{P}\mathbf{v}(n\text{-}1)$.

$$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + 0{,}5\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + 0{,}5\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}5 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} \text{ atd.}$$

Dále uvedeme tabulku středních hodnot celkových výnosů pro n = 1, 2, ..., 6.

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	8,5	9,15	9,47	9,6297	9,7096
$v_1(n)$	-1	0,1	0,73	0,1049	1,2087	1,2886
$v_0(n)- v_1(n)$	8	8,4	8,42	8,3651	8,4210	8,4210

Nyní vypočteme limitní hodnotu vektoru středních hodnot celkových výnosů podle vzorce: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q}$.

$$\mathbf{I}-\beta\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 0{,}5\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}, \ |\mathbf{I}-\beta\mathbf{P}| = \frac{3}{4}\cdot\frac{7}{10} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{19}{40},$$

$$(\mathbf{I}-\beta\mathbf{P})^{-1} = \frac{40}{19}\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{19} & \frac{10}{19} \\ \frac{8}{19} & \frac{30}{19} \end{pmatrix}, \ \lim_{n\to\infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I}-\beta\mathbf{P})^{-1} q == \begin{pmatrix} \frac{28}{19} & \frac{10}{19} \\ \frac{8}{19} & \frac{30}{19} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{186}{19} \\ \frac{26}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}7895 \\ 1{,}3684 \end{pmatrix}$$

Rozdíl složek limitního vektoru: 9,7895 – 1,3684 = 8,4219.

Znamená to, že když je na počátku sledování linka v provozu, tak se po dostatečně dlouhé době získá výnos vyšší o 8,4219 jednotek než v případě, kdy je linka na počátku v opravě.

Ad b) Z věty 11.12. plyne, že $G_v(z) = \frac{z}{1-z}(\mathbf{I}-\beta z\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q}$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}, \mathbf{I} - \frac{1}{2} z\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z/4 & z/4 \\ z/5 & 3z/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z/4 & -z/4 \\ -z/5 & 1-3z/10 \end{pmatrix}, \det(\mathbf{I} - \frac{1}{2} z\mathbf{P}) = \left(1-\frac{z}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{3z}{10}\right) - \frac{z^2}{20} = \ldots = \left(1-\frac{z}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{z}{20}\right)$$

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} z\mathbf{P}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{z}{2}\right)\left(1-\frac{z}{20}\right)}\begin{pmatrix} 1-\frac{3z}{10} & \frac{z}{4} \\ \frac{z}{5} & 1-\frac{z}{4} \end{pmatrix} = \cdots = \frac{1}{1-\frac{z}{2}}\begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{1}{1-\frac{z}{20}}\begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

$$G_v(z)=\frac{z}{1-z}\left(\mathbf{I}-\frac{1}{2}z\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{q}=\left[\frac{z}{(1-z)\left(1-\frac{z}{2}\right)}\begin{pmatrix}4/9 & 5/9\\ 4/9 & 5/9\end{pmatrix}+\frac{z}{(1-z)\left(1-\frac{z}{20}\right)}\begin{pmatrix}5/9 & -5/9\\ -4/9 & 4/9\end{pmatrix}\right]$$

$$\frac{z}{(1-z)\left(1-\frac{z}{2}\right)}=\ldots=\frac{2}{1-z}+\frac{-2}{1-\frac{z}{2}}$$

$2\cdot\frac{1}{1-z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = 2$, n = 0, 1, 2, ...

$-2\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = -2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$, n = 0, 1, 2, ...

$$\frac{z}{(1-z)\left(1-\frac{z}{20}\right)}=\ldots=\frac{\frac{20}{19}}{1-z}+\frac{-\frac{20}{19}}{1-\frac{z}{20}}$$

$\frac{20}{19}\cdot\frac{1}{1-z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = \frac{20}{19}\cdot 1^n=\frac{20}{19}$, n = 0, 1, 2, ...

$-\frac{20}{19}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{20}}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = -\frac{20}{19}\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^n$, n = 0, 1, 2, ...

Celkem:

$$\mathbf{v}(n)=\left[2\begin{pmatrix}4/9 & 5/9\\ 4/9 & 5/9\end{pmatrix}+\frac{20}{19}\left(1-0{,}05^n\right)\begin{pmatrix}5/9 & -5/9\\ -4/9 & 4/9\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}7\\ -1\end{pmatrix}=\ldots=\begin{pmatrix}\frac{186}{19}\\ \frac{26}{19}\end{pmatrix}+0{,}5^n\begin{pmatrix}-\frac{46}{9}\\ -\frac{46}{9}\end{pmatrix}+0{,}05^n\begin{pmatrix}-\frac{800}{171}\\ \frac{640}{171}\end{pmatrix}$$

Tedy $v_0(n)=9{,}7895-0{,}5^n\cdot 5{,}\bar{1}-0{,}05^n\cdot 4{,}6784$, $v_1(n)=1{,}3684-0{,}5^n\cdot 5{,}\bar{1}+0{,}05^n\cdot 3{,}7427$.

11. 14. Poznámka: Vektor středních hodnot diskontovaných výnosů po jednom až n obdobích a limitní hodnotu tohoto vektoru lze získat pomocí funkce diskont.m:

```
function a=diskont(P,R,beta,n);
% Autor: Stanislav Tvrz
% function a=diskont(P,R,beta,n);
% funkce pocita:
%       vektory strednich hodnot diskontovanych vynosu po jednom az po n obdobich
%       limitni vektor strednich hodnot diskontovanych vynosu
%       znazorni prubehy vektoru strednich hodnot pro jednotlive stavy
%       v zavislosti na poctu obdobi
% vstupni parametry:
% P - matice prechodu
% R -  matice vynosu
% beta - diskontni faktor
% n - pocet obdobi
%clc;

disp('kontrola - matice prechodu P')
P
disp(' ')
disp('kontrola - matice vynosu R')
R
disp(' ')

vel=size(P);
v=zeros(vel(1),n+1);
```

```
q=diag(P*R');
for i=2:n+1
    v(:,i)=q+beta*P*v(:,i-1);
end
cas=0:n;
vysledek=[cas;v];
disp('sloupcove vektory strednich hodnot diskontovanych vynosu po n krocich')
disp(num2str(vysledek))
disp(['pri hodnote diskontniho faktoru beta = ',num2str(beta)])
disp('pozn: na prvnim radku hodnoty n')
disp(' ')
disp('limitni vektor v(n)')
v_n=inv(eye(vel(1))-beta*P)*q;
disp(num2str(v_n))

%generovani popisu stavu
max_ind=size(num2str(vel(1)),2);
legenda=zeros(vel(1),5+max_ind);
for i=1:vel(1)
    legenda(i,1:5+size(num2str(i),2))=[['stav '],num2str(i)];
end
legenda=char(legenda);

%graf diskontovanych vynosu
figure
plot([0:n],v);
legend(legenda)
end
```

Použijeme-li tuto funkci pro řešení příkladu 11.13. a) pro jedno až 6 období, dostaneme tyto výsledky:

sloupcove vektory strednich hodnot diskontovanych vynosu po n krocich

0	1	2	3	4	5	6
0	7	8.5	9.15	9.47	9.6297	9.7096
0	-1	0.1	0.73	1.049	1.2087	1.2886

pri hodnote diskontniho faktoru beta = 0.5
pozn: na prvnim radku hodnoty n

limitni vektor v(n)
9.7895
1.3684

Graf diskontovaných výnosů: