Obsah

Následující text má sloužit jako pomůcka k první části cvičení z předmětu M5858 Spojité deterministické modely I. Je věnován explicitním (elementárním) metodám řešení obyčejných diferenciálních rovnic; někdy se také mluví o integraci diferenciálních rovnic nebo o řešení diferenciálních rovnic v kvadraturách. Jedná se o klasickou problematiku, která byla již mnohokrát zpracována. Při kompilaci textu jsem zejména vykrádal následující knihy a skripta.

1. E. Kamke: *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Band I, Gewöhliche Differentialgleichungen.* Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1951.
   Ruský překlad: Э. Камке: *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* Наука, Moskva 1965.
   Důkladná příručka všech rovnic řešitelných elementárními metodami.

2. J. Kaucký: *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.* Nakladatelství ČSAV, Praha 1952.
   Popis základních metod integrace obyčejných diferenciálních rovnic.

3. R. Rychnovský: *Obyčejné diferenciální rovnice a jejich řešení.* SNTL, Praha 1963.
   Základní explicitní metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic doplněné jednoduchými metodami přibližnými.

4. J. Nagy: *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.* SNTL, Praha 1978.
   Metody výpočtu řešení obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu a popis metod výpočtu řešení lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu.

5. J. Nagy: *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic.* SNTL, Praha 1980.
   Metody výpočtu řešení soustavy lineárních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty. Doplněno o analýzu chování trajektorií autonomních systémů v okolí rovnovážných bodů.

6. M. Ráb: *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.* Skripta PřF MU, Brno 1998, 96 stran (druhé přepracované vydání).
   Popis základních elementárních metod řešení explicitních i implicitních obyčejných diferenciálních rovnic.

7. M. Ráb: *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic II.* Skripta PřF UJEP v Brně, SPN Praha 1989, 61 stran.
   Systémy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

8. R. Plch: *Příklady z matematické analýzy. Diferenciální rovnice.* Skripta PřF MU, Brno 1995, 29 stran.
   Sbírka úloh z elementárních metod řešení explicitních i implicitních obyčejných diferenciálních rovnic. Je doplněna stručným popisem potřebných metod.

Tato verze textu není zdaleka definitivní. Text bude (doufám) v průběhu semestru doplňován a upravován. Budu vděčný za všechny připomínky k němu a za upozornění na chyby, překlepy, nedůslednosti, nejasnosti ...

Zdeněk Pospíšil
září 2015

Kapitola 1

Explicitní rovnice prvního řádu

1.1 Separovatelné rovnice

1.1.1 Rovnice typu $x' = f(t)$

Jedná se v podstatě o rovnost, jíž je definována primitivní funkce k dané funkci f. Obecné řešení této rovnice tedy je

$$x(t) = \int f(t)\mathrm{d}t$$

a partikulární řešení splňující počáteční podmínku

$$x(0) = x_0 \tag{1.1}$$

je dáno určitým integrálem

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau;$$

samozřejmě za předpokladu, že příslušná primitivní funkce nebo určitý integrál existují.

Příklad:

Řešení rovnice

$$x' = \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$$

je dáno integrálem

$$x(t) = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)} = \int \frac{2s\mathrm{d}s}{s(1+s^2)} = 2\int \frac{\mathrm{d}s}{1+s^2} = 2\,\mathrm{arctg}\, s + C = 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{t} + C,$$

kde C je integrační konstanta; při výpočtu jsme použili substituci $s = \sqrt{t}$. ■

Příklady na užití rovnice tohoto typu je nalezení rovnice křivky traktrisa (tractrix) 5.1 nebo Ciolkovského rovnice 5.2.

1.1.2 Rovnice autonomní $x' = g(x)$

Na pravé straně autonomní rovnice není explicitně přítomná nezávisle proměnná t. Derivaci vyjádříme jako podíl diferenciálů a rovnici přepíšeme do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(x),$$

který formálně upravíme na tvar

$$\frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \mathrm{d}t;$$

na levé straně je diferenciál funkce $\dfrac{1}{g(x)}$, na pravé diferenciál nezávisle proměnné. Z rovnosti diferenciálů funkcí plyne rovnost příslušných primitivních funkcí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \int \mathrm{d}t.$$

Touto rovností je implicitně zapsáno řešení dané diferenciální rovnice.

Při hledání řešení autonomní rovnice s počáteční podmínkou (1.1) takovou, že $g(x_0) \neq 0$, nahradíme neurčité integrály určitými. Na levé straně integrujeme v mezích od x_0 do x a na pravé v mezích od t_0 do t; přitom musíme přeznačit integrační proměnné. Řešení počáteční úlohy je tedy imlicitně dáno rovností

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{g(\xi)} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau$$

a poněvadž integrál na pravé straně lze snadno vyjádřit, zapíšeme řešení počáteční úlohy v implicitním tvaru

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{g(\xi)} = t - t_0. \tag{1.2}$$

Příklad

Řešme počáteční úlohu

$$x' = x - x^3, \quad x(0) = \tfrac{1}{2}.$$

V tomto případě je $t_0 = 0$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $g(x) = x - x^3$. Na pravé straně rovnosti (1.2) je nyní t a na její levé straně je

$$\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\xi - \xi^3} = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2(\xi+1)} - \frac{1}{2(\xi-1)} \right) \mathrm{d}\xi = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\xi^2}{|\xi^2 - 1|} \right]_{\xi=\frac{1}{2}}^{x} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{x^2}{1-x^2} + \ln 3 \right),$$

neboť $x(t)^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 < 0$ pro $t = 0$ a tedy v okolí 0 je $|x(t)^2 - 1| = 1 - x(t)^2$. Řešení úlohy je proto implicitně dáno rovností

$$\frac{1}{2} \left(\ln \frac{x^2}{1-x^2} + \ln 3 \right) = t,$$

po úpravě

$$2t - \ln 3 = \ln \frac{x^2}{1-x^2}.$$

Odtud vyjádříme $\dfrac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t}$, takže řešení úlohy můžeme napsat v explicitním tvaru

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{1+3\mathrm{e}^{-2t}}}. \qquad \blacksquare$$

1.1.3 Rovnice se separovanými proměnnými $x' = f(t)g(x)$

Tuto rovnici můžeme pomocí diferenciálů zapsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t)g(x).$$

Za předpokladu $g(x) \neq 0$ můžeme rovnici formálně přepsat na tvar

$$\frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = f(t)\mathrm{d}t$$

a po integraci obou stran dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \int f(t)\mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

Touto rovností je implicitně zadáno nějaké řešení dané rovnice.

Rovností $g(x) = 0$ je implicitně zadáno *singulární* (konstantní) řešení. Poznamenejme, že singulární řešení může, ale nemusí, být zahrnuto v řešení (1.3) pro nějakou volbu integrační konstanty. Pokud je singulární řešení zahrnuto ve formuli (1.3), pak je rovností (1.3) implicitně zadáno obecné řešení dané rovnice.

Rovností

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{g(\xi)} = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

je implicitně zadáno partikulární řešení dané rovnice, které splňuje počáteční podmínku (1.1) takovou, že $g(x_0) \neq 0$. Pokud $g(x_0) = 0$, pak řešením dané rovnice s počáteční podmínkou (1.1) je konstantní funkce $x(t) \equiv x_0$.

Povšimněme si, že rovnice typu 1.1.1 bez hledané funkce na pravé straně je zvláštním případem rovnice se separovanými proměnnými a s $g(x) \equiv 1$; rovnice autonomní 1.1.2 je speciálním případem rovnice se separovanými proměnnými a s $f(t) \equiv 1$.

Příklad na užití rovnice se separovanými proměnnými je uveden v 5.5.

1.1.4 Rovnice typu $x' = f(at + bx + c)$

Pokud $b = 0$, jedná se o rovnici tvaru 1.1.1.

Nechť $b \neq 0$. Zavedeme novou neznámou funkci $u = u(t)$ rovností

$$u = at + bt + c.$$

Pak je $x(t) = \frac{1}{b}(u(t) - at - c)$ a tedy $x' = \frac{1}{b}(u' - a)$. To znamená, že daná rovnice se transformuje na tvar

$$\frac{1}{b}(u' - a) = f(u),$$

po úpravě

$$u' = bf(u) + a,$$

což je rovnice autonomní 1.1.2.

1.1.5 Homogenní rovnice $x' = f\left(\frac{x}{t}\right)$

Zavedeme funkci $u = u(t) = \frac{x(t)}{t}$. Pak $x(t) = tu(t)$, $x' = u + tu'$. Dosazením do původní rovnice dostaneme

$$u' = \frac{f(u) - u}{t},$$

což je rovnice se separovanými proměnnými pro neznámou funkci u.

Příkladem na užití homogenní rovnice je Archimédova úloha 5.3.

1.1.6 Rovnice typu $x' = f\left(\frac{at + bx + c}{\alpha t + \beta x + \gamma}\right)$

1. $c = \gamma = 0$. Pak $f\left(\frac{at + bx}{\alpha t + \beta x}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{x}{t}}{\alpha + \beta\frac{x}{t}}\right)$ a daná rovnice je homogenní.

2. $c^2 + \gamma^2 \neq 0$, $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = k$.

   Zavedeme funkci $u = u(t) = at + bx$. Pak $u' = a + bx'$ a tedy $x' = \frac{u' - a}{b}$. Dosazením do původní rovnice dostaneme

   $$u' = a + bf\left(\frac{u + c}{ku + \gamma}\right),$$

   což je rovnice se separovanými proměnnými pro neznámou funkci u.

3. $c^2 + \gamma^2 \neq 0$, $a\beta \neq b\alpha$.
   Nechť m a n jsou řešením soustavy lineárních algebraických rovnic

   $$\begin{aligned} am + bn &= -c \\ \alpha m + \beta n &= -\gamma\,. \end{aligned}$$

   Zavedeme funkce $u = u(t) = t - m$
   $v = v(t) = x - n.$
   Pak $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$,
   $at + bx + c = a(u+m) + b(v+n) + c = au + bv + (am + bn) + c = au + bv,$
   $\alpha t + \beta x + \gamma = \alpha(u+m) + \beta(v+n) + \gamma = \alpha u + \beta v + (\alpha m + bn) + \gamma = \alpha u + \beta v$
   Daná rovnice přejde na tvar

   $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\frac{au + bv}{\alpha u + \beta v}\right),$$

   což je rovnice typu 1. pro neznámou funkci $v = v(u)$.

1.2 Exaktní rovnice

Exaktní diferenciální rovnice v explicitním tvaru je

$$y' = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}. \tag{1.4}$$

Funkce f a g přitom splňují podmínku

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}. \tag{1.5}$$

Obvyklejší implicitní tvar exaktní rovnice je

$$f(x,y) + g(x,y)y' = 0.$$

Jeho výhodou je skutečnost, že není třeba předpokládat nenulovost funkce g.

Rovnici (1.4) lze také přepsat pomocí diferenciálů $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ a pak formálně upravit na tvar

$$f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y = 0. \tag{1.6}$$

Za podmínky (1.5) je výraz na levé straně totálním diferenciálem nějaké funkce F dvou proměnných (sr. např. Z. Došlá, O. Došlý: *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* MU, Brno 1999, kap. 4), pro kterou platí $\mathrm{d}F(x,y) = 0$. Obecné řešení dané rovnice je tedy implicitně zadáno rovností $F(x,y) = C$, kde C je reálná konstanta.

Příklad $x(x^2+y^2-a^2) + y(x^2+y^2+a^2)y' = 0$

V tomto případě je $f(x,y) = x(x^2+y^2-a^2)$, $g(x,y) = y(x^2+y^2+a^2)$. Platí

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2xy,$$

takže podmínka (1.5) je splněna. Diferenciální tvar dané rovnice je

$$x(x^2+y^2-a^2)\mathrm{d}x + y(x^2+y^2+a^2)\mathrm{d}y = 0.$$

Pro kmenovou funkci $F = F(x,y)$ diferenciálu na levé straně platí

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x(x^2+y^2-a^2), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = y(x^2+y^2+a^2).$$

Z první rovnosti vyjádříme

$$F(x,y) = \int x(x^2+y^2-a^2)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2(y^2-a^2) + \varphi(y)$$

a dosadíme do druhé rovnosti

$$x^2y + \varphi'(y) = y(x^2+y^2+a^2).$$

Tím dostáváme obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} = y^3 + a^2y$$

pro dosud neznámou funkci φ. Řešení této rovnice je podle 1.1.1 dáno integrálem

$$\varphi(y) = \int (y^3 + a^2 y)\mathrm{d}y = \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{2}a^2y^2 + const.$$

Celkem dostáváme

$$F(x,y) = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2(y^2 - a^2) + \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{2}a^2y^2 + const = \tfrac{1}{4}(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + \tfrac{1}{2}a^2(y^2 - x^2) + const.$$

Obecné řešení dané rovnice je tedy implicitně dáno rovností

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + 2a^2\left(y^2 - x^2\right) = C,$$

kde C je libovolná konstanta. ■

Ještě si povšimněme, že rovnici $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi(t)\psi(x)$ se separovanými proměnnými (sr. 1.1.3) můžeme přepsat do tvaru

$$\varphi(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{\psi(x)}\mathrm{d}x = 0.$$

Přitom platí

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t) = 0 = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\psi(x)},$$

takže se jedná o rovnici exaktní. Rovnice se separovanými proměnnými je tedy zvláštním případem rovnice exaktní.

1.2.1 Integrační faktor

Pokud funkce f a g v rovnici (1.6) nesplňují podmínky (1.5), tj. pokud rovnice tvaru (1.6) není exatní, lze z ní někdy rovnici exktní učinit tím, že ji vynásobíme nějakou vhodnou funkcí $P = P(x,y)$. Pokud taková funkce existuje, nazýváme ji *integrační faktor*.

Rovnice (1.6) vynásobená funkcí P má tvar

$$fP + gPy' = 0$$

a aby tato rovnice byla exaktní, musí platit

$$\frac{\partial fP}{\partial y} = \frac{\partial gP}{\partial x}.$$

Parciální derivace součinů rozepíšeme a podmínku upravíme na tvar

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) = g\frac{\partial P}{\partial x} - f\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{1.7}$$

To je parciální diferenciální rovnice pro neznámou funkci P. Ve speciálních případech – pokud funkce P závisí pouze na jedné z proměnných x, y – se však může stát diferenciální rovnicí obyčejnou.

1. Integrační faktor P závisí pouze na proměnné x, $P = P(x)$.
   V tomto případě je
   $$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = P'$$
   a rovnice (1.7) je tvaru
   $$\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right). \tag{1.8}$$
   Výraz na levé straně této rovnosti závisí pouze na proměnné x. Aby rovnost mohla být splněna, musí výraz na její pravé straně také záviset pouze na proměnné x. Dostáváme tak závěr: *Pokud výraz na pravé straně rovnosti* (1.8) *nezávisí na proměnné y, pak existuje integrační faktor $P = P(x)$ rovnice* (1.6)*; najdeme ho jako řešení obyčejné diferenciální rovnice* (1.8).

2. Integrační faktor P závisí pouze na proměnné y, $P = P(y)$.
   V tomto případě je
   $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = P', \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$
   a rovnice (1.7) je tvaru
   $$\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{1.9}$$
   Výraz na levé straně této rovnosti závisí pouze na proměnné y. Aby rovnost mohla být splněna, musí výraz na její pravé straně také záviset pouze na proměnné y. Odtud usoudíme: *Pokud výraz na pravé straně rovnosti* (1.9) *nezávisí na proměnné x, pak existuje integrační faktor $P = P(y)$ rovnice* (1.6)*; najdeme ho jako řešení obyčejné diferenciální rovnice* (1.9).

Příklad:
$$2xy + (y^2 - x^2)y' = 0$$
Máme $f(x,y) = 2xy$, $g(x,y) = y^2 - x^2$, takže
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -2x$$
a daná rovnice není exaktní. Avšak výraz
$$\frac{1}{f}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2xy}(-4x) = -\frac{2}{y}$$
závisí pouze na proměnné y. Existuje tedy integrační faktor $P = P(y)$ zadané rovnice. Ten je řešením obyčejné diferenciální rovnice
$$\frac{1}{P}P' = -\frac{2}{y},$$
což je rovnice se separovanými proměnnými, jejíž řešení je podle 1.1.3 implicitně dáno rovností
$$\int \frac{\mathrm{d}P}{P} = -2\int \frac{\mathrm{d}y}{y}, \quad \text{tj. } \ln|P| = -2\ln|y| + const.$$

Odtud dostaneme $\ln y^2|P| = const$ a tedy

$$P(y) = \frac{const}{y^2}.$$

Stačí volit $const = 1$.
Danou rovnici vynásobíme získaným integračním faktorem $P(y) = y^{-2}$ a dostaneme

$$\frac{2x}{y} + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) y' = 0. \tag{1.10}$$

Poněvadž platí

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{2x}{y} = -\frac{2x}{y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) = -\frac{2x}{y^2},$$

je rovnice (1.10) exaktní. Najdeme kmenovou funkci $F = F(x, y)$ diferenciálu

$$\frac{2x}{y}\mathrm{d}x + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}y.$$

Postupně vypočítáme

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{y}, \quad \text{tedy } F(x, y) = \int \frac{2x}{y}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{y} + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + \varphi'(y) = 1 - \frac{x^2}{y^2}, \quad \text{tedy } \varphi' = 1, \quad \varphi(y) = y + const.$$

Obecné řešení dané rovnice je proto implicitně dáno rovností

$$\frac{x^2}{y} + y = const.$$

Označíme-li $const = 2C$, dostaneme $x^2 + y^2 - 2Cy = 0$, neboli

$$x^2 + (y - C)^2 = C^2.$$

■

Příklad:

$$\big(a(x)y + b(x)\big)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0 \tag{1.11}$$

Máme $f(x, y) = a(x)y + b(x)$, $g(x, y) = -1$ a tedy

$$\frac{\partial f}{\partial y} = a(x), \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = 0,$$

takže rovnice (1.11) obecně není exaktní. Avšak výraz

$$\frac{1}{g(x, y)}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right) = -a(x)$$

nezávisí na proměnné y. Existuje tedy integrační faktor P rovnice (1.11), který je funkcí jedné proměnné x a je řešením diferenciální rovnice

$$\frac{1}{P}P' = -a(x), \quad \text{tj. } P' = -a(x)P.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými a její řešení je podle 1.1.3 implicitně dáno rovností

$$\int \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\int a(x)\mathrm{d}x.$$

Neurčitý integrál na levé straně je roven $\ln|P| + \mathit{const}$, kde const je libovolná integrační konstanta. Tedy

$$\begin{aligned} \ln|P| + \mathit{const} &= -\int a(x)\mathrm{d}x, \\ |P| &= \exp\left(\mathit{const} - \int a(x)\mathrm{d}x\right), \\ P &= \mathit{const} \cdot \exp\left(-\int a(x)\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

V poslední rovnosti stačí zvolit $\mathit{const} = 1$ a dostaneme integrační faktor

$$P(x) = \exp\left(-\int a(x)\mathrm{d}x\right).$$

Rovnice

$$\big(a(x)y + b(x)\big)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y = 0$$

je již exaktní. Najdeme kmenovou funkci $F = F(x, y)$ diferenciálu na levé straně rovnice.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x} \quad \text{tedy } F(x,y) = -y\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + \varphi(x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -y\big(-a(x)\big)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + \varphi'(x) = \big(a(x)y + b(x)\big)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x},$$

tedy

$$\varphi'(x) = b(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}.$$

Řešení této jednoduché diferenciální rovnice je podle 1.1.1 dáno neurčitým integrálem

$$\varphi(x) = \int b(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

a řešení rovnice (1.11) je implicitně dáno rovností

$$-y\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + \int b(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = -C.$$

Z ní můžeme vypočítat řešení rovnice (1.11) ve tvaru

$$y(x) = \left(C + \int b(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x},$$

kde C je libovolná konstanta. ■

1.3 Lineární rovnice

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu je tvaru

$$x' = a(t)x + b(t); \tag{1.12}$$

na její pravé straně je polynom prvního stupně v proměnné x, tedy lineární funkce. Pokud je funkce b na pravé straně rovnice (1.12) identicky nulová, $b(t) \equiv 0$, nazýváme rovnici *homogenní,* v opačném případě *nehomogenní.*

1.3.1 Lineární homogenní rovnice $x' = a(t)x$

Je to rovnice se separovanými proměnnými. Partikulární řešení této rovnice s počáteční podmínkou (1.1) je:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} &= \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \\ \ln x - \ln x_0 &= \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \\ x &= x_0 \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Obecné řešení homogenní lineární rovnice lze tedy zapsat jako

$$x = C \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1.13}$$

kde C je libovolná t_0 je nějaké číslo z definičního oboru funkce a.

1.3.2 Lineární nehomogenní rovnice $x' = a(t)x + b(t)$

Uvedeme tři možné způsoby nalezení řešení lineární nehomogenní rovnice. V prvních dvou předpokládáme nějaký tvar výsledku; za takovými předpoklady jsou dvě různé možné interpretace nehomogenní rovnice. Třetí metoda je obecná. Očekávaný tvar řešení a jeho následné konkrétní vyjádření ponechává nejistotu, zda by nemohlo existovat také nějaké jiné řešení. První dvě metody tedy odpovídají na otázku po existenci řešení, třetí metoda ukazuje jednoznačnost řešení.

Duhamelův princip

Nejprve budeme hledat řešení nehomogenní rovnice (1.12) se speciální počáteční podmínkou

$$x(t_0) = 0. \tag{1.14}$$

Můžeme si představovat, že rovnice s touto počáteční podmínkou popisuje (modeluje) nějaký proces, při kterém má veličina x na počátku (v čase t_0) nulovou hodnotu a v průběhu času se v ní akumulují (integrují) nějaké vnější vlivy. Budeme tedy očekávat, že řešení x_P rovnice (1.12) s počáteční podmínkou (1.14) je tvaru

$$x_P(t) = \int_{t_0}^{t} w(t,s)\mathrm{d}s,$$

kde w je zatím neurčená spojitá funkce dvou proměnných. Takto zavedená funkce x_P samozřejmě splňuje počáteční podmínku (1.14). Podle věty o derivaci integrálu podle parametru platí

$$x_P'(t) = w(t,t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial w(t,s)}{\partial t}\mathrm{d}s.$$

Aby byla splněna rovnice (1.12), musí platit

$$w(t,t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial w(t,s)}{\partial t}\mathrm{d}s = a(t)\int_{t_0}^{t} w(t,s)\mathrm{d}s + b(t),$$

nebo po úpravě

$$w(t,t) - b(t) = \int_{t_0}^{t} \left(a(t)w(t,s) - \frac{\partial w(t,s)}{\partial t} \right) \mathrm{d}s.$$

Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, když

$$w(s,s) = b(s) \tag{1.15}$$

pro všechna s a

$$\frac{\partial w(t,s)}{\partial t} = a(t)w(t,s) \tag{1.16}$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a všechna $s \in (t_0, t)$.

Nyní budeme proměnnou s považovat za parametr a proměnnou t za nezávisle proměnnou. Rovnici (1.16) tedy chápeme jako obyčejnou diferenciální rovnici pro neznámou funkci w nezávisle proměnné t. která také závisí na parametru s. Je to rovnice lineární homogenní, počáteční podmínka je dána rovností (1.15) – je-li počáteční čas t_0 roven parametru s, je hodnota funkce w rovna hodnotě $b(s)$. Řešení počáteční úlohy pro lineární homogenní rovnici bylo v 1.3.1 odvozeno ve tvaru

$$w(t,s) = b(s)\exp\int_{s}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Dostáváme tak řešení x_P počáteční úlohy (1.12), (1.14) ve tvaru

$$x_P(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t a(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s.$$

Již také víme, že řešení x_H lineární homogenní rovnice $x' = a(t)x$ s obecnou počáteční podmínkou (1.1) je

$$x_H(t) = x_0 \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

Nyní snadno ověříme, že funkce

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) = x_0 \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau} + \int_{t_0}^{t} b(s) \mathrm{e}^{\int_{s}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}s$$

je řešením úlohy (1.12), (1.1). Vskutku

$$x'(t) = x'_H(t) + x'_P(t) = a(t)x_H(t) + a(t)x_P(t) + b(t) = \\ = a(t)\big(x_H(t) + x_P(t)\big) + b(t) = a(t)x(t) + b(t),$$

$$x(t_0) = x_H(t_0) + x_P(t_0) = x_0 + 0 = x_0.$$

Tento výsledek můžeme přečíst tak, že *řešení nehomogenní lineární rovnice* (1.12) *s počáteční podmínkou* (1.1) *je součtem řešení homogenní rovnice s touto počáteční podmínkou a nehomogenní rovnice s nulovou počáteční podmínkou.*

Řešení počáteční úlohy (1.12), (1.1) jsme dostali ve tvaru

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau} + \int_{t_0}^{t} b(s) \mathrm{e}^{\int_{s}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}s. \tag{1.17}$$

Metoda variace konstanty

Řešení hledáme ve stejném tvaru (1.13), v jakém je řešení rovnice homogenní, avšak hodnotu C nepovažujeme za konstantní, ale za proměnnou (závislou na nezávisle proměnné t). Můžeme si představovat, že nehomegenita b v rovnici nějak perturbuje (pozmění, rozkolísá, poruší ...) řešení „čisté, neporušené“ lineární rovnice. Z této úvahy plyne název *metoda variace konstanty*. Řešení tedy očekáváme ve tvaru

$$x(t) \;=\; C(t) \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Pak $x' = (C'(t) + a(t)C(t)) \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau$. Dosazením do dané rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}\big(C'(t) + a(t)C(t)\big) \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \;&=\; a(t)C(t) \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau + b(t), \\ C'(t) \;&=\; b(t) \exp \int_{t}^{t_0} a(\tau)\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

což je rovnice typu (1.1.1). Integrací v mezích od t_0 do t dostaneme

$$C(t) - C(t_0) \;=\; \int\limits_{t_0}^{t} \left(b(\sigma) \exp \int\limits_{\sigma}^{t_0} a(\tau)\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\sigma$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice tedy je

$$x(t) \;=\; \left[const + \int\limits_{t_0}^{t} \left(b(\sigma) \exp \int\limits_{\sigma}^{t_0} a(\tau)\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\sigma \right] \exp \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau$$

a partikulární řešení splňující počáteční podmínku (1.1) je

$$x(t) \;=\; \left[x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \left(b(\sigma) \exp \int\limits_{\sigma}^{t_0} a(\tau)\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\sigma \right] \exp \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{1.18}$$

Užití integračního faktoru

Lineární rovnici (1.12) můžeme (při změně označení proměnných) přepsat v „diferenciálním tvaru“ (1.11). Tuto rovnici lze vynásobit integračním faktorem

$$P(t) = \exp\left(- \int a(t)\mathrm{d}t \right)$$

a tak převést na rovnici exaktní.

U lineární rovnice není třeba hledat kmenovou funkci příslušného diferenciálu, stačí rovnici integračním faktorem vynásobit a postupně upravit:

$$\begin{aligned}
x' - a(t)x &= b(t) && / \; \mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} \\
x'\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} - a(t)x\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} &= b(t)\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} \right) &= b(t)\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} \\
x\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} &= \int b(t)\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
x &= \mathrm{e}^{\int a(t)\mathrm{d}t} \int b(t)\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Tím jsme dostali obecné řešení lineární rovnice (1.12) ve tvaru neurčitých integrálů. Při hledání partikulárního řešení rovnice (1.12) s počáteční podmínkou (1.1) postupujeme analogicky:

$$
\begin{aligned}
x'(t) - a(t)x &= b(t) && \Big/ \, \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau} \\
x'(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau} - a(t)x(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau} &= b(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau}\right) &= b(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau} \\
x(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau} - x(t_0) &= \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s \\
x(t) &= \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\right) \qquad (1.19)
\end{aligned}
$$

Třemi různými postupy jsme dospěli k vyjádření řešení počáteční úlohy (1.12), (1.1) pro lineární rovnici. Snadno nahlédneme, že výsledky (1.17), (1.18) a (1.19) jsou stejné.

Jsou-li koeficienty lineární rovnice konstantní, $a(t) \equiv A$, $b(t) \equiv B$, pak je její partikulární řešení s počáteční podmínkou (1.1) dáno formulí

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{B}{A}\right)\mathrm{e}^{A(t-t_0)} - \frac{B}{A}.$$

Příklad na užití lineární rovnice je 5.6.

1.4 Bernoulliova rovnice $x' = a(t)x + b(t)x^r, \ r \in \mathbb{R}$

Zavedeme funkci $u = u(t) = x(t)^{1-r}$. Pak $x = u^{\frac{1}{1-r}}$, $x' = \dfrac{1}{1-r}u^{\frac{1}{1-r}-1}u'$. Dosadíme do dané rovnice:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-r}u^{\frac{r}{1-r}}u' &= a(t)u^{\frac{1}{1-r}} + b(t)u^{\frac{r}{1-r}} && \Big/ \, (1-r)u^{\frac{r}{r-1}} \\
u' &= (1-r)a(t)u + (1-r)b(t)\,.
\end{aligned}
$$

To je lineární rovnice pro neznámou funkci u.

Jsou-li koeficienty konstantní, $a(t) \equiv A$, $b(t) \equiv B$, lze použít substituci

$$x = \left(y - \frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{r-1}}.$$

pak

$$x' = -\frac{1}{r-1}\left(y - \frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{r-1}-1}y'$$

a tedy

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{r-1}\left(y-\frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{r-1}-1} y' &= \left(A+B\left(y-\frac{B}{A}\right)^{-1}\right)\left(y-\frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{r-1}} \\
-\frac{1}{r-1}y' &= \left(A+B\frac{A}{Ay-B}\right)\frac{Ay-B}{A} \\
\frac{1}{1-r}y' &= \frac{A^2y-AB+AB}{Ay-B}\frac{Ay-B}{A} \\
y' &= (1-r)Ay,
\end{aligned}
$$

což je lineární homogenní rovnice.

Příklady na užití Bernoulliovy rovnice jsou 5.6 a 5.7.

1.5 Cvičení

Řešte rovnice (Cauchyovy úlohy)

1) $2t(2x-3)\mathrm{d}t+(t^2+1)\mathrm{d}x=0$

2) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{t-x}$

3) $t\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\dfrac{t^2+1}{x}\mathrm{d}t=0$

4) $\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}x+\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}t=0$

5) $t^2\mathrm{d}x+(x^2-tx)\mathrm{d}t=0$

6) $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{t+x}{x-t}$

7) $\left(t\sin\dfrac{x}{t}-x\cos\dfrac{x}{t}\right)\mathrm{d}t+t\cos\dfrac{x}{t}\,\mathrm{d}x=0$

8) $2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-x=\mathrm{e}^{t/2}$

9) $t\mathrm{d}x+x\mathrm{d}t=\sin t\mathrm{d}t$

10) $(t-1)^3x'+4(t-1)^2x=t+1$

11) $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}t+2(t\mathrm{e}^{2x}-x)\mathrm{d}x=0$

12) $(x^2+1)\mathrm{d}t+(2tx+1)\mathrm{d}x=0$

13) $(t+x)\mathrm{d}t+(t+x^2)\mathrm{d}x=0$

14) $t\mathrm{d}x-x\mathrm{d}t+t^3\mathrm{d}t=0$

15) $(t^2+t-x)\mathrm{d}t+t\mathrm{d}x=0$

16) $(\cos t+x\cos t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}x=0;\ x(\pi/2)=0$

17) $x'+2x=t;\ x(0)=2$

18) $(t+2x)\mathrm{d}t+(x+2t)\mathrm{d}x=0;\ x(1)=1$

19) Určete konstanty a, b, c tak, aby rovnice $(at^2+bx^2)\mathrm{d}t+ctx\,\mathrm{d}x=0$ byla exaktní a vyřešte ji.

Výsledky:

1)$x=\dfrac{3}{2}+\dfrac{C}{(t^2+1)^2}$ **2)**$\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^t+C$ **3)**$\mathrm{e}^x(x-1)+\dfrac{t^2}{2}+\ln|t|=C$ **4)**$(x+\sqrt{x^2-1}\,)(t+\sqrt{t^2+1}\,)=C$
5)$x=\dfrac{t}{\ln|t|+C}$ **6)**$\dfrac{1}{2}\ln(t^2+x^2)+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{t}=C$ **7)**$x=t\arcsin\dfrac{C}{t}$ **8)**$x=\dfrac{t+C}{2}\mathrm{e}^{t/2}$
9)$x=\dfrac{C-\cos t}{t}$ **10)**$x=\dfrac{t^3-3t+C}{3(t-1)^4}$ **11)**$t=\dfrac{x^2+C}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ **12)**$t=\dfrac{C-x}{x^2+1}$ **13)**$\dfrac{t^2}{2}+tx+\dfrac{x^3}{3}=C$
14)$x=Ct-\dfrac{t^3}{2}$ **15)**$x=Ct-t^2-t\ln|t|$ **16)**$x=\mathrm{e}^{1-\sin t}-1$ **17)**$x=\dfrac{t}{2}+\dfrac{9}{4}\mathrm{e}^{-2t}-\dfrac{1}{4}$
18)$x=\sqrt{3t^2+6}-2t$ **19)**$c=2b;\ \dfrac{at^3}{3}+btx^2=C$

Kapitola 2

Implicitní rovnice prvního řádu

Tyto rovnice nazýváme také *diferenciální rovnice nerozřešené vzhledem k derivaci*. Jedná se o rovnice tvaru

$$F(t, x, x') = 0. \tag{2.1}$$

Obecný postup při řešení těchto rovnic spočívá v zavedení funkce $p = p(t) = x'(t)$ a následném derivování rovnice

$$F\big(t, x(t), p(t)\big) = 0$$

podle proměnné t. Tímto způsobem se v některých případech podaří najít řešení dané rovnice v parametrickém tvaru

$$\begin{aligned} t &= \varphi(p), \\ x &= \psi(p); \end{aligned}$$

proměnnou p přitom považujeme za parametr. Uvedený postup je použitelný zejména v případech, kdy lze z rovnice (2.1) vypočítat proměnnou t nebo x, viz 2.1.

Je-li funkce F polynomem v proměnné x' s koeficienty závisejícími na proměnných t a x, není potřeba přepsanou rovnici

$$F(t, x, p) = \sum_{i=0}^{n} a_i(t, x)p^i \;=\; 0$$

derivovat podle proměnné t; postup řešení ukážeme v 2.3.

2.1 Rovnice rozřešené vzhledem k t nebo x

2.1.1 Implicitní autonomní rovnice $x = f(x')$

Označíme $p = p(t) = x'(t)$, rovnici přepíšeme do tvaru

$$x(t) = f\big(p(t)\big)$$

a zderivujeme podle proměnné t,

$$p(t) = f'\big(p(t)\big)p'(t).$$

Pokud je $f'\big(p(t)\big) \neq 0$, tj. pokud je funkce f nekonstantní, můžeme z poslední rovnice vypočítat $p'(t)$. Dostaneme tak explicitní autonomní diferenciální rovnici pro neznámou funkci p ve tvaru

$$p' = \frac{p}{f'(p)},$$

která má podle 1.1.2 řešení dané implicitně rovností

$$t = \int \frac{p\,\mathrm{d}p}{f'(p)}.$$

To je parametrické vyjádření původní nezávisle proměnné t. Původní závisle proměnná x je parametricky vyjádřena danou rovností

$$x = f(p).$$

Povšimněme si, že integrační konstanta se objevuje pouze u nezávisle proměnné t. Tato konstanta je aditivní. To znamená, že řešení autonomní rovnice je invariantní vzhledem k posunutí v nezávisle proměnné.

Pokud je nula v definičním oboru funkce f, pak je také konstantní funkce $x \equiv f(0)$ řešením dané rovnice.

Příklad: $xx' - 2(x')^4 + 2 = 0$

S označením $p = x'$ tuto rovnici přepíšeme jako

$$xp - 2p^4 + 2 = 0.$$

Vidíme, že $p = 0$ není kořenem této (algebraické) rovnice. Můžeme proto vypočítat

$$x = 2\,\frac{p^4 - 1}{p}. \tag{2.2}$$

Tuto rovnost derivujeme podle proměnné t a upravíme:

$$\begin{aligned}
x' &= 2\,\frac{4p^3p - (p^4-1)}{p^2}\,p' \\
p &= 2\,\frac{3p^4+1}{p^2}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \\
\mathrm{d}t &= 2\,\frac{3p^4+1}{p^3}\mathrm{d}p \\
t &= 2\int \left(3p + \frac{1}{p^3}\right)\mathrm{d}p \;=\; 2\left(\frac{3p^2}{2} - \frac{1}{2p^2}\right) + C \\
t &= \frac{3p^4-1}{p^2} + C. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Rovnostmi (2.3) a (2.2) je vyjádřeno řešení dané rovnice v parametrickém tvaru. ■

2.1.2 Rovnice tvaru $x = f(t, x')$

Při označení $p = x'$ máme rovnici

$$x = f(t, p), \tag{2.4}$$

nebo podrobněji

$$x(t) = f\big(t, p(t)\big),$$

kterou derivujeme podle proměnné t. S využitím „řetězového pravidla“ pro derivaci složené funkce dvou proměnných dostaneme

$$p(t) = f_t\big(t, p(t)\big) + f_p\big(t, p(t)\big)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}. \tag{2.5}$$

Pokud je $p \neq f_t(t, p)$, pak rovnici (2.5) přepíšeme do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p} = \frac{f_p(t, p)}{p - f_t(t, p)},$$

což je explicitní diferenciální rovnice pro neznámou funkci t jedné proměnné p. Najdeme její řešení $t = \varphi(t)$ a dosadíme ho do dané rovnice (2.4). Dostaneme tak řešení dané rovnice v parametrickém vyjádření

$$\begin{aligned} t &= \varphi(p), \\ x &= f\big(\varphi(p), p\big), \end{aligned}$$

kde proměnnou p považujeme za parametr.

Příklad: $x = 2tx' - \ln x'$

Označíme $p = x'$, rovnici přepíšeme, zderivujeme obě její strany podle proměnné t a upravíme:

$$\begin{aligned} x &= 2tp - \ln p, \\ p &= 2p + 2t\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}, \\ -p &= \left(2t - \frac{1}{p}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

Poněvadž hodnota p je argumentem logaritmu, musí být $p > 0$. Rovnici tedy můžeme dále upravit na tvar

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p} = -\frac{2}{p}t + \frac{1}{p^2},$$

což je lineární rovnice, která má podle 1.3 řešení

$$t = \frac{1}{p} + \frac{C}{p^2}.$$

Toto vyjádření dosadíme do dané rovnice a dostaneme

$$x = 2\left(\frac{1}{p} + \frac{C}{p^2}\right)p - \ln p = 2\left(1 + \frac{C}{p}\right) - \ln P.$$

Obecné řešení dané rovnice v parametrickém tvaru tedy je

$$\begin{aligned} t &= \frac{p+C}{p^2}, \\ x &= 2\frac{p+C}{p} - \ln p. \end{aligned}$$

V tomto případě lze parametr p eliminovat. Z první rovnice vypočítáme

$$p = \frac{1 \pm \sqrt{1+4Ct}}{2t}$$

a dosadíme do druhé. Po úpravách dostaneme

$$x(t) = 1 \pm \sqrt{1+4Ct} - \ln \frac{1 \pm \sqrt{1+4Ct}}{2t}.$$

Řešení se znaménkem „+“ je definováno na intervalu $(0, \infty)$ a integrační konstanta C může být libovolná; řešení se znaménkem „−“ je definováno na intervalu $\left(-\infty, \frac{-1}{4C}\right]$ a konstanta C musí být záporná. ■

2.1.3 Rovnice tvaru $t = f(x, x')$

Označíme $p = x'$ a dostaneme rovnici

$$t = f(x, p),$$

kterou zderivujeme podle proměnné t,

$$1 = f_x(x,p)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}.$$

Poněvadž platí

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

můžeme předchozí rovnici upravit na tvar

$$1 = pf_x(x,p) + pf_p(x,p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \frac{1 - pf_x(x,p)}{pf_p(x,p)},$$

což je rovnice explicitní pro neznámou funkci x s nezávisle proměnnou p. Její řešení označíme $\psi(p)$. Řešení dané implicitní rovnice má tedy parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} t &= f\big(\psi(p), p\big), \\ x &= \psi(p). \end{aligned}$$

Příklad: $t = (x - x')x'$

Označíme $p = x'$, rovnici přepíšeme, zderivujeme podle proměnné t a upravíme:

$$\begin{aligned}
t &= (x-p)p \\
1 &= p^2 + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - 2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \\
1-p^2 &= (x-2p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \\
1-p^2 &= (x-2p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}p \\
1-p^2 &= (xp-2p^2)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

Předpokládejme nejprve, že $p^2 \neq 1$. Pak lze rovnici dále upravit na tvar

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \frac{p}{1-p^2}x - \frac{2p^2}{1-p^2},$$

což je lineární rovnice pro neznámou funkci x proměnné p. Její řešení najdeme užitím integračního faktoru:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{p}{p^2-1}x &= \frac{2p^2}{p^2-1} \qquad \Big/ \sqrt{p^2-1} \\
\sqrt{p^2-1}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}\,x &= \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(x\sqrt{p^2-1}\right) &= \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}} \\
x\sqrt{p^2-1} &= 2\int \frac{p^2\mathrm{d}p}{\sqrt{p^2-1}} \\
x &= \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\left(p\sqrt{p^2-1} + \ln\left|p+\sqrt{p^2-1}\right| + const\right) \\
x &= p + \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\ln C\left(p+\sqrt{p^2-1}\right).
\end{aligned}$$

Vyjádření proměnné t jako funkce parametru p dostaneme dosazením tohoto výrazu do dané rovnice. Řešení dané rovnice v parametrickém tvaru tedy je

$$\begin{aligned}
t &= \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}\ln C\left(p+\sqrt{p^2-1}\right), \\
x &= p + \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\ln C\left(p+\sqrt{p^2-1}\right).
\end{aligned}$$

Ještě poznamenejme, že parametr p se pohybuje v intervalu $(0,1)$ nebo v intervalu $(-1,0)$ a integrační konstanta C je nenulová a má stejné znaménko jako parametr p.

Nyní vyšetříme zatím vyloučený případ $p^2 = 1$. Pokud $p = x' = 1$, pak $x = t + A$ a dosazením do dané rovnice dostaneme $t = (t + A - 1)$, takže $A = 1$. Další řešení dané rovnice je tedy dáno explicitně rovností

$$x = t + 1.$$

Pokud $p = -1$, pak $x = -t + B$ a dosazením do dané rovnice najdeme $B = -1$. Třetí řešení dané rovnice tedy je

$$x = -t - 1.$$

■

2.2 Rovnice Clairautova a Lagrangeova

2.2.1 Clairautova rovnice $x = tx' + g(x')$

Rovnici $x = tp + g(p)$ derivujeme podle proměnné t:

$$\begin{aligned} p &= p + t\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + g'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \\ 0 &= \bigl(t + g'(p)\bigr)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Musí tedy být $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 0$ nebo $t = -g'(p)$.
Z první rovnosti a dané rovnice dostaneme obecné řešení

$$x(t) = ct + g(c),$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta; z druhé rovnice dostaneme parametrické vyjádření singulárního řešení

$$\begin{aligned} t &= -g'(p) \\ x &= -pg'(p) + g(p)\,, \end{aligned}$$

kde p je parametr.

2.2.2 Lagrangeova rovnice $x = tf(x') + g(x')$

Rovnici $x = tf(p) + g(p)$ derivujeme podle proměnné t:

$$\begin{aligned} p &= f(p) + tf'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + g'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \\ p - f(p) &= \bigl(tf'(p) + g'(p)\bigr)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Má-li rovnice $p - f(p) = 0$ řešení $p \equiv c$, pak $x(t) = ct + c_1$ je singulárním řešením dané rovnice. Konstantu c_1 určíme dosazením do dané rovnice:

$$\begin{aligned} ct + c_1 &= tf(c) + g(c) \\ c_1 &= t\bigl(f(c) - c\bigr) + g(c) \end{aligned}$$

a poněvadž $f(c) = c$, je $c_1 = g(c)$. Singulární řešení Lagrangeovy rovnice tedy je

$$x(t) = ct + g(c)\,,$$

kde c je řešením rovnice $c = f(c)$ (je pevným bodem funkce f).
Pro $p \neq f(p)$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p} = \frac{tf'(p) + g'(p)}{p - f(p)},$$

což je lineární rovnice pro neznámou funkci t nezávisle proměnné p. Označíme-li její řešení $t = t(p) = \varphi(p)$, pak

$$\begin{aligned} t &= \varphi(p) \\ x &= f(p)\varphi(p) + g(p) \end{aligned}$$

je parametrickým vyjádřením obecného řešení Lagrangeovy rovnice.

2.3 Rovnice tvaru $P_n(x') = 0$

Nechť P_n je polynom stupně n, jehož koeficienty jsou funkcemi proměnných t a x definovanými na nějaké oblasti v $\mathbb{R}^2$. Hledáme tedy řešení rovnice

$$x'^n + a_{n-1}(t,x)x'^{n-1} + a_{n-2}(t,x)x'^{n-2} + \cdots + a_1(t,x)x' + a_0(t,x) = 0.$$

Při označení $p = p(t) = x(t)$ máme rovnici

$$p^n + a_{n-1}(t,x)p^{n-1} + a_{n-2}(t,x)p^{n-2} + \cdots + a_1(t,x)p + a_0(t,x) = 0.$$

Pokud polynom na levé straně rovnice nemá reálné kořeny, pak uvažovaná diferenciální rovnice nemá (reálné) řešení. Nechť tedy na nějaké oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^2$ má polynom na levé straně k reálných různých kořenů $p_1, p_2, \ldots, p_k$, které samozřejmě závisí na dvojici proměnných t, x, tj. $p_1 = f_1(t,x)$, $p_2 = f_2(t,x)$, $\ldots$, $p_k = f_k(t,x)$. Řešení každé z explicitních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$x_i' = f_i(t,x), \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

je současně řešením dané implicitní diferenciální rovnice.

Další nejednoznačnost plyne z faktu, že některé z funkcí f_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ mohou nabývat v některých bodech oblasti G nebo dokonce na nějakých otevřených podmnožinách oblasti G stejných hodnot. V takovém případě může řešením dané rovnice např. funkce x, která na nějaké části svého definičního oboru splňuje rovnici $x' = f_1(t,x)$ a na jiné části rovnici $x' = f_2(t,x)$ a podobně.

Příklad.

Budeme hledat řešení rovnice

$$x'^2 + tx = 0. \tag{2.6}$$

Při označení $p = x'$ máme

$$p^2 + tx = 0.$$

Polynom na levé straně má na množině $G = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 :\, tx \leq 0\right\}$ (tedy na sjednocení druhého a čtvrtého kvadrantu) dva reálné kořeny $p_1 = \sqrt{-tx}$, $p_2 = -\sqrt{-tx}$. Dostáváme tak dvě explicitní diferenciální rovnice prvního řádu

$$x' = \sqrt{-tx}, \qquad x' = -\sqrt{-tx}.$$

Každá z nich má konstantní řešení $x_0 = x_0(t) \equiv 0$. Ve druhém kvadrantu, tedy pro $x \geq 0$ a $t \leq 0$, jsou tyto rovnice tvaru

$$x' = \sqrt{x}\sqrt{-t}, \qquad x' = -\sqrt{x}\sqrt{-t},$$

což jsou rovnice se separovanými proměnnými. První z nich má podle 1.1.3 řešení v implicitním tvaru

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int \sqrt{-t}\mathrm{d}t, \quad \text{tj. } 2\sqrt{x} = -\tfrac{2}{3}\sqrt{-t^3} + const.$$

Dostáváme tak další řešení dané rovnice

$$x_1(t) = \left(C_1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{-t^3}\right)^2$$

definované na intervalu $(-\infty, 0]$. Ze druhé rovnice dostaneme řešení

$$x_2(t) = \left(C_2 + \tfrac{1}{3}\sqrt{-t^3}\right)^2$$

definované také na intervalu $(-\infty, 0]$.

Analogicky dostaneme další dvě řešení

$$x_3(t) = -\left(C_3 - \tfrac{1}{3}\sqrt{-t^3}\right)^2, \qquad x_4(t) = -\left(C_4 + \tfrac{1}{3}\sqrt{-t^3}\right)^2$$

definovaná na intervalu $[0, \infty)$.

Rovnici (2.6) můžeme uvažovat s počáteční podmínkou

$$x(t_0) = \xi_0. \tag{2.7}$$

Pokud $t_0\xi_0 < 0$ a $t_0 \neq 0$, má úloha (2.6), (2.7) v okolí bodu t_0 dvě diferencovatelná řešení, která můžeme souhrnně zapsat jako

$$x(t) = -\operatorname{sgn} t_0 \left(\sqrt{|\xi_0|} \pm \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{|t_0|^3} - \sqrt{|t|^3}\right)\right)^2;$$

pokud $\xi_0 = 0 \neq t_0$, má úloha (2.6), (2.7) v okolí bodu t_0 dvě diferencovatelná řešení

$$x(t) = -\tfrac{1}{9}\operatorname{sgn} t_0 \left(\sqrt{|t_0|^3} - \sqrt{|t|^3}\right)^2, \qquad x(t) = 0;$$

pokud $\xi_0 \neq 0 = t_0$, má úloha (2.6), (2.7) dvě diferencovatelná řešení

$$x(t) = \operatorname{sgn} \xi_0 \left(\sqrt{|\xi_0|} \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{|t|^3}\right)^2,$$

která jsou pro $\xi_0 < 0$ definována na pravém okolí bodu t_0, pro $\xi_0 > 0$ na levém okolí bodu t_0; pokud $\xi_0 = 0 = t_0$, pak libovolná z funkcí

$$x(t) = 0, \qquad x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ -\sqrt{t^3}, & t > 0, \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} \sqrt{-t^3}, & t < 0, \\ 0, & t \geq 0, \end{cases} \qquad x(t) = -t\sqrt{|t|}$$

je diferencovatelným řešením úlohy (2.6), (2.7) na okolí bodu t_0. ■

Kapitola 3

Lineární rovnice vyššího řádu a lineární systémy

3.1 Lineární rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Jedná se o rovnice tvaru

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \cdots + a_2x'' + a_1x' + a_0x = b(t). \tag{3.1}$$

Přitom $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálné konstanty, b je reálná funkce jedné reálné proměnné. Pokud je funkce b na pravé straně identity (3.1) nulová, $b(t) \equiv 0$, rovnice se nazývá *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*.

3.1.1 Homogenní rovnice

Budeme hledat řešení rovnice

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x = 0. \tag{3.2}$$

Připomeneme základní pojmy a tvrzení teorie lineárních homogenních rovnic n-tého řádu.

- *Princip superpozice:* Jsou-li $y_1 = y_1(t)$ a $y_2 = y_2(t)$ řešení rovnice (3.2), pak také jejich lineární kombinace je řešením této rovnice. Jinak řečeno, množina všech funkcí, které jsou řešením rovnice (3.2) tvoří vektorový prostor.

- Množina všech řešení rovnice (3.2) tvoří n-rozměrný vektorový prostor nad polem reálných čísel.

- Báze prostoru všech řešení rovnice (3.2) se nazývá *fundamentální systém řešení.*

- Funkce $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (3.2) právě tehdy, když každá z těchto funkcí funkcí je řešením rovnice a jejich wronskián

$$W(t; y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

je nenulový pro nějakou hodnotu nezávisle proměnné t (a v důsledku toho je nenulový pro všechny reálné hodnoty t).

Nejjednodušším případem rovnice (3.2) je samozřejmě rovnice prvního řádu

$$x' - ax = 0, \tag{3.3}$$

která má podle 1.3.1 řešení $x(t) = C\mathrm{e}^{at}$. Funkce $y_1(t) = \mathrm{e}^{at}$ je kladná, proto je wronskián $W(t; y_1)$ nenulový. Funkce y_1 je tedy fundamentálním (systémem) řešením rovnice (3.3).

Uvedené pozorování napovídá, že i rovnice vyššího řádu by mohla mít řešení ve tvaru exponenciálních funkcí.

Rovnice druhého řádu: Rovnici pro jednoduchost zapíšeme ve tvaru

$$x'' - ax' + bx = 0. \tag{3.4}$$

Řešení budeme hledat ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ se zatím neurčeným koeficientem λ. Očekávaný tvar řešení dosadíme do rovnice a dostaneme

$$\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t} - a\lambda\mathrm{e}^{\lambda t} + b\mathrm{e}^{\lambda t} = 0.$$

Poněvadž $\mathrm{e}^{\lambda t} > 0$, můžeme předchozí rovnost funkcí $\mathrm{e}^{\lambda t}$ vydělit. Tím dostaneme (algebraickou) rovnici pro neznámý koeficient λ,

$$\lambda^2 - a\lambda + b = 0. \tag{3.5}$$

Tato rovnice se nazývá *charakteristická (algebraická) rovnice příslušná k (diferenciální) rovnici* (3.4), její levá strana se nazývá *charakteristický polynom rovnice* (3.4).

Charakteristická rovnice (3.5) je kvadratická. Mohou tedy nastat tři případy:

(i) $a^2 > 4b$**.** V takovém případě má rovnice (3.5) dva reálné různé kořeny

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right)$$

a funkce dané výrazy

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right)t}, \quad y_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-4b}\right)t}$$

jsou řešením rovnice (3.4). Poněvadž

$$W(0; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - 4b}\right) & \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - 4b}\right) \end{vmatrix} = -\sqrt{a^2 - 4b} < 0,$$

tvoří tyto funkce fundamentální systém řešení rovnice (3.4).

Pro zjednodušení zápisu ještě označíme $\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$ a fundamentální systém řešení rovnice (3.4) zapíšeme ve tvaru

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\mathrm{e}^{\varphi t}, \qquad y_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\mathrm{e}^{-\varphi t}.$$

Obecné řešení rovnice (3.4) tedy je

$$x(t) = \left(A\mathrm{e}^{\varphi t} + B\mathrm{e}^{-\varphi t}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at},$$

kde A, B jsou libovolné reálné konstanty.

(ii) $a^2 < 4b$**.** V takovém případě má rovnice (3.5) dva komplexně sdružené kořeny

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(a \pm \mathrm{i}\sqrt{4b - a^2}\right).$$

Komplexní funkce dané rovnostmi

$$z_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\left(\cos \tfrac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}\, t + \mathrm{i} \sin \tfrac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}\, t\right),$$

$$z_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\left(\cos \tfrac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}\, t - \mathrm{i} \sin \tfrac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}\, t\right)$$

jsou řešením diferenciální rovnice (3.4) a podle principu superpozice také reálné funkce

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\big(z_1(t) + z_2(t)\big) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at} \cos \tfrac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}\, t,$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(z_1(t) - z_2(t)\big) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at} \sin \tfrac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}\, t$$

jsou řešením rovnice (3.4). Poněvadž

$$W(0; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4b - a^2} > 0,$$

tvoří funkce $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ fundamentální systém řešení rovnice (3.4). Pro zjednodušení zápisu ještě zavedeme označení $\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$. Fundamentální systém řešení pak zapíšeme ve tvaru

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at} \cos \varphi t, \qquad y_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at} \sin \varphi t.$$

Obecné řešení rovnice (3.4) pak je dáno jedním z ekvivalentních výrazů

$$x(t) = \big(C_1 \cos \varphi t + C_2 \sin \varphi t\big)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at} = A\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at} \cos(\varphi t - \beta),$$

kde C_1, C_2, a A, β jsou libovolné konstanty; konstanty C_1, C_2, A, β v předchozí rovnosti jsou vázány vztahy

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \qquad \cos \beta = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \quad \sin \beta = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}.$$

(iii) $a^2 = 4b$**.** V tomto případě diferenciální rovnice (3.5) a k ní příslušná charakteristická rovnice mají tvar

$$x'' - ax' + \tfrac{1}{4}a^2 x = 0, \qquad \lambda^2 - a\lambda + \tfrac{1}{4}a^2 = 0. \tag{3.6}$$

Charakteristická rovnice má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_1 = \frac{1}{2}a$. Funkce y_1 daná předpisem

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}$$

je řešením rovnice (3.4) a je kladná. Potřebujeme najít druhou složku fundamentálního systému řešení rovnice (3.4). Spolu s rovnicemi (3.6) uvažujme „blízké“ rovnice

$$x'' - (a + \varepsilon)x' + \tfrac{1}{4}a(a + 2\varepsilon)x = 0, \qquad \lambda^2 - (a + \varepsilon)\lambda + \tfrac{1}{4}a(a + 2\varepsilon) = 0. \tag{3.7}$$

Tyto rovnice přejdou pro $\varepsilon \to 0$ v rovnice (3.6). Kvadratická rovnice v (3.7) má pro $\varepsilon \neq 0$ dva různé kořeny

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}a \quad \text{a} \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}a + \varepsilon,$$

takže diferenciální rovnice v (3.7) má fundamentální systém řešení

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}, \quad z_1(t) = \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}a+\varepsilon\right)t}.$$

Podle principu superpozice má tato rovnice také řešení dané vztahem

$$z_2 = \frac{z_1(t) - y_1(t)}{\varepsilon}.$$

Poněvadž řešená diferenciální rovnice v (3.6) je pro $\varepsilon \to 0$ rovna diferenciální rovnici z (3.7), lze očekávat, že také limitní funkce z_2 pro $\varepsilon \to 0$ bude řešením diferenciální rovnice v (3.6). Položme

$$y_2(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} y_2(t).$$

S využitím de l'Hôpitalova pravidla vypočítáme

$$y_2(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}a+\varepsilon\right)t} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{t\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}a+\varepsilon\right)t}}{1} = t\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}.$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že funkce y_2, $y_2(t) = t\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}$, je skutečně řešením diferenciální rovnice v (3.6). Dále platí

$$W(0; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}a & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

a proto funkce $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (3.6). Obecné řešení rovnice (3.6) je tedy tvaru

$$x(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at},$$

kde A, B jsou libovolné konstanty.

Rovnice obecného řádu: Řešení lineární homogenní rovnice n-tého řádu (3.2) je bezprostředním zobecněním řešení rovnice druhého řádu. K diferenciální rovnici (3.2) přiřadíme algebraickou *charakteristickou rovnici*

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{3.8}$$

Její kořeny a jejich násobnosti jednoznačně určují fundamentální systém řešení diferenciální rovnice (3.2); to podrobně shrnuje následující věta.

Věta 1. *Každému reálnému k-násobnému kořenu λ charakteristické rovnice (3.8) odpovídá k řešení*

$$\mathrm{e}^{\lambda t},\ t\mathrm{e}^{\lambda t},\ t^2\mathrm{e}^{\lambda t}, \ldots,\ t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t},$$

diferenciální rovnice (3.2) a každé dvojici j-násobných nereálných kořenů $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ charakteristické rovnice (3.8) odpovídá $2j$ reálných řešení

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t,\ t\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t,\ t^2\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, \ldots,\ t^{j-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t,$$

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t,\ \ t\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t,\ \ t^2\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t,\dots,\ \ t^{j-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$$

diferenciální rovnice (3.2). *Množina řešení odpovídající všem kořenům charakteristické rovnice* (3.8) *tvoří fundamentální systém řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty* (3.2).

Důkaz věty provedeme ve třech krocích.

Lemma 1. *Pokud λ je k-násobný kořen charakteristické rovnice, pak funkce*

$$x_1(t)=\mathrm{e}^{\lambda t},\ \ x_2(t)=t\mathrm{e}^{\lambda t},\ \ x_3(t)=t^2\mathrm{e}^{\lambda t},\ \ \dots,\ \ x_k(t)=t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$$

jsou řešení rovnice (3.2).

Důkaz: Označme $a_n = 1$ a $P(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\lambda^i$ pravou stranu charakteristické rovnice (3.8). Poněvadž λ je k-násobný kořen charakteristické rovnice, platí

$$\frac{\partial^i}{\partial\lambda^i}P(\lambda)=0 \quad \text{pro } i=0,1,2,\dots,k-1. \tag{3.9}$$

Funkce $x_l = x_l(t) = t^{l-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$, $l = 1,2,\dots,k$ vyjádříme ve tvaru

$$x_l(t)=\frac{\partial^{l-1}}{\partial\lambda^{l-1}}\mathrm{e}^{\lambda t},$$

dosadíme je do pravé strany rovnice (3.2) a upravíme s využitím Leibnizovy formule pro vyšší derivace součinu funkcí. Dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} a_i x_l^{(i)}(t) &= \sum_{i=0}^{n} a_i\frac{\partial^i}{\partial t^i}\frac{\partial^{l-1}}{\partial\lambda^{l-1}}\mathrm{e}^{\lambda t}=\frac{\partial^{l-1}}{\partial\lambda^{l-1}}\sum_{i=0}^{n} a_i\frac{\partial^i}{\partial t^i}\mathrm{e}^{\lambda t}=\frac{\partial^{l-1}}{\partial\lambda^{l-1}}\sum_{i=0}^{n} a_i\lambda^i\mathrm{e}^{\lambda t}=\\ &=\frac{\partial^{l-1}}{\partial\lambda^{l-1}}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^i\right)=\frac{\partial^{l-1}}{\partial\lambda^{l-1}}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}P(\lambda)\right)=\sum_{i=0}^{l-1}\binom{l-1}{i}\frac{\partial^i P(\lambda)}{\partial\lambda^i}\frac{\partial^{l-1-i}\mathrm{e}^{\lambda t}}{\partial\lambda^{l-1-i}}=0\end{aligned}$$

podle (3.9). Funkce x_l tedy splňují rovnici (3.2). □

Lemma 2. *Nechť $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_l$ jsou všechny navzájem různé kořeny charakteristické rovnice* (3.8)*, přičemž kořen λ_i je k_i-násobný, $i=1,2,\dots,l$, $k_1+k_2+\dots+k_l=n$. Pak funkce*

$$y_1(t)=\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ \ y_2(t)=t\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ \ y_3(t)=t^2\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\dots,\ \ y_{k_1}(t)=t^{k_1-1}\mathrm{e}^{\lambda_1 t},$$

$$y_{k_1+1}(t)=\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\ \ y_{k_1+2}(t)=t\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\ \ y_{k_1+3}(t)=t^2\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\dots,\ \ y_{k_1+k_2}(t)=t^{k_2-1}\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\dots,$$

$$\vdots$$

$$y_{k_1+k_2+\dots+k_{l-1}+1}(t)=\mathrm{e}^{\lambda_l t},\ \ y_{k_1+k_2+\dots+k_{l-1}+2}(t)=t\mathrm{e}^{\lambda_l t},\ \ y_{k_1+k_2+\dots+k_{l-1}+3}(t)=t^2\mathrm{e}^{\lambda_l t},\dots,$$

$$y_n(t)=t^{k_l-1}\mathrm{e}^{\lambda_l t}$$

tvoří fundamentální systém řešení rovnice (3.2).

Důkaz: Každá z funkcí $y_1, y_2, \dots, y_n$ je řešením rovnice (3.2) podle lemma 1. Stačí tedy dokázat jejich lineární nezávislost, tj. ukázat, že jejich wronskián

$$W(t; y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2{\prime}(t) & \dots & y_n{\prime}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

je nenulový pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Z teorie víme, že wronskián je buď pro všechna t, nebo je pro všechna t nenulový. Připusťme, že $W(t; y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Wronskián má lineárně závislé řádky a tedy existují konstanty $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$, mezi nimiž je alespoň jedna nenulová, takové že

$$c_0 y_j + c_1 y_j' + \dots + c_{n-1} y_j^{(n-1)} \equiv 0$$

pro všechna $j = 1, 2, \dots, n$.

Pro $\lambda \in \mathbb{R}$ a n-krát diferencovatelnou funkci x nyní položíme

$$q(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \dots + c_{n-1}\lambda^{n-1},$$

$$M\big(x(t)\big) = c_0 x(t) + c_1 x'(t) + c_2 x''(t) + \dots + c_{n-1} x^{(n-1)}(t).$$

Pak q je polynom stupně nejvýše $n-1$. Pro funkci M a pro libovolné $\kappa \in \{1, 2, \dots, k_1\}$ platí

$$\begin{aligned} 0 = M\big(y_\kappa(t)\big) &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} y_\kappa(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \frac{\partial^{\kappa-1}}{\partial \lambda^{\kappa-1}} \mathrm{e}^{\lambda t}\bigg|_{\lambda=\lambda_1} = \\ &= \frac{\partial^{\kappa-1}}{\partial \lambda^{\kappa-1}} \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \mathrm{e}^{\lambda t}\bigg|_{\lambda=\lambda_1} = \frac{\partial^{\kappa-1}}{\partial \lambda^{\kappa-1}} \sum_{i=0}^{n-1} c_i \lambda^i \mathrm{e}^{\lambda t}\bigg|_{\lambda=\lambda_1} = \frac{\partial^{\kappa-1}}{\partial \lambda^{\kappa-1}} \mathrm{e}^{\lambda t} q(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_1} = \\ &= \sum_{i=0}^{\kappa-1} \binom{\kappa-1}{i} \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} \mathrm{e}^{\lambda t} \frac{\partial^{\kappa-1-i}}{\partial \lambda^{\kappa-1-i}} q(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_1} = \sum_{i=0}^{\kappa-1} \binom{\kappa-1}{i} t^i \mathrm{e}^{\lambda t} \frac{\partial^{\kappa-1-i}}{\partial \lambda^{\kappa-1-i}} q(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_1}. \end{aligned}$$

Zejména pro $t = 0$ dostáváme

$$0 = \frac{\partial^{\kappa-1}}{\partial \lambda^{\kappa-1}} q(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_1}.$$

To znamená, že λ_1 je kořenem $(\kappa-1)$-té derivace polynomu q pro každé $\kappa \in \{1, 2, \dots, k_1\}$, tedy λ_1 je k_1-násobným kořenem polynomu q.

Analogicky ukážeme, že λ_i je k_i-násobným kořenem polynomu q pro všechna $i = 1, 2, \dots, l$. Polynom q tedy musí být stupně alespoň $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$ a to je spor. □

Lemma 2 umožňuje zkonstruovat fundamentální systém řešení lineární rovnice (3.2). Mezi jeho prvky však mohou být i komplexní funkce, neboť polynom na levé straně charakteristické rovnice (3.8) může mít komplexně sdružené kořeny. Popíšeme, jak komplexní funkce z fundamentálního systému nahradíme lineárně nezávislými reálnými funkcemi.

Nechť $\lambda_c = \alpha + \mathrm{i}\beta$ je k-násobný komplexní kořen charakteristické rovnice (3.8). Pak také komplexně sdružené číslo $\overline{\lambda_c} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ je k-násobným kořenem charakteristické rovnice a ve fundamentálním systému řešení z Lemma 2 jsou funkce

$$t^j \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t} = t^j \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t + \mathrm{i}\sin\beta t), \qquad t^j \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t} = t^j \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t - \mathrm{i}\sin\beta t).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme funkce z fundamentálního systému přečíslovat tak, že

$$y_1(t) = t^j \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t + \mathrm{i}\sin\beta t), \qquad y_2(t) = t^j \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t - \mathrm{i}\sin\beta t).$$

Lemma 3. *Nechť $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ je fundamentální systém řešení rovnice (3.2) popsaný předchozí konstrukcí. Položme*

$$z_1 = z_1(t) = \frac{1}{2}\big(y_1(t) + y_2(t)\big) = t^j \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, \qquad z_2 = z_2(t) = \frac{\mathrm{i}}{2}\big(y_2(t) - y_1(t)\big) = t^j \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Pak funkce $z_1, z_2, y_3, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (3.2).

Důkaz: Funkce z_1, z_2 jsou řešením rovnice (3.2) podle principu superpozice. Ukážeme, že funkce $z_1, z_2, y_3, \ldots, y_n$ jsou lineárně nezávislé.

Položme

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\mathrm{i}\frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{2} & \mathrm{i}\frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{W}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & y_3^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\det\mathsf{C} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\mathrm{i}\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \mathrm{i}\frac{1}{2} \end{vmatrix} \cdot 1 = \frac{\mathrm{i}}{2} \neq 0$$

a pro wronskián funkcí $z_1, z_2, y_3, \ldots, y_n$ platí

$$W(t; z_1, z_2, y_3, \ldots, y_n) = \det(\mathsf{W}(t)\mathsf{C}) = \det\mathsf{W}(t)\det\mathsf{C} = \frac{\mathrm{i}}{2}W(t; y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0.$$

□

3.1.2 Nehomogenní rovnice se speciální pravou stranou

Uvažujme nehomogenní lineární rovnici s konstantními koeficienty (3.1). Lineární homogenní rovnice rovnice (3.2), která má stejné koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jako nehomogenní rovnice (3.1), se nazývá *homogenní rovnice přidružená k této nehomogenní rovnici.*

Řešení nehomogenní lineární rovnice a k ní přidružené homogenní rovnice mají vlastnosti:

- Obecné řešení x nehomogenní rovnice (3.1) je součtem obecného řešení x_H přidružené homogenní rovnice a nějakého partikulárního řešení x_P nehomogenní rovnice.
- Pokud funkce x_1, resp. x_2, jsou řešení rovnice (3.1) s $b = f$, resp. s $b = g$, pak funkce $x = x_1 + x_2$ je řešení rovnice (3.10) s $b = f + g$.

Partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty (3.1) lze v některých případech najít *metodou neurčitých koeficientů:*

(i) $b(t) = P_m(t)$, kde P_m je polynom stupně m.
Je-li nula k-násobným kořenem charakteristické rovnice (samozřejmě připouštíme i $k = 0$), lze partikulární řešení hledat ve tvaru $\tilde{x}(t) = t^k Q_m(t)$, kde Q_m je polynom stejného stupně jako P_m.

(ii) $b(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} P_m(t)$.
Substituce $x(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} y(t)$ převede rovnici na lineární rovnici n-tého řádu s pravou stranou P_m (předchozí případ).

(iii) $b(t) = \cos(\alpha t) P_m(t)$ nebo $f(t) = \sin(\alpha t) P_m(t)$.
Najdeme partikulární řešení rovnice

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t} P_m(t)$$

(to je rovnice předchozího typu). Jeho reálná část je partikulárním řešením uvažované rovnice v prvním případě, imaginární část ve druhém.

3.2 Lineární rovnice n-tého řádu s proměnnými koeficienty

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu je rovnice tvaru

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t); \tag{3.10}$$

x je hledaná funkce jedné reálné proměnné, koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ a pravá strana b jsou spojité reálné funkce jedné proměnné takové, že průnik jejich definičních oborů obsahuje nějaký otevřený interval J. Pokud je pravá strana nulová, $b(t) \equiv 0$, tj. rovnice je tvaru

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0, \tag{3.11}$$

nazývá se *homogenní,* opačném případě *nehomogenní.* Mají-li rovnice (3.10) a (3.11) stejné koeficienty, řekneme, že *rovnice* (3.11) *je homogenní rovnice přidružená k nehomogenní rovnici* (3.10).

Lineární rovnice s obecnými koeficienty (3.10) má stejné obecné vlastnosti jako lineární rovnice s konstantními koeficienty (3.1):

- *Princip superpozice:* Jsou-li $y_1 = y_1(t)$ a $y_2 = y_2(t)$ řešení homogenní rovnice (3.11), pak také jejich lineární kombinace je řešením této rovnice. Jinak řečeno, množina všech funkcí, které jsou řešením homogenní rovnice (3.11) tvoří vektorový prostor.
- Množina všech řešení homogenní rovnice (3.11) tvoří n-rozměrný vektorový prostor nad polem reálných čísel.
- Báze prostoru všech řešení rovnice (3.11) se opět nazývá *fundamentální systém řešení.*
- Funkce $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (3.11) právě tehdy, když každá z těchto funkcí funkcí je řešením rovnice a jejich wronskián $W(t; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ je nenulový pro nějakou hodnotu nezávisle proměnné t (a v důsledku toho je nenulový pro všechny hodnoty $t \in J$).
- Obecné řešení x nehomogenní rovnice (3.10) je součtem obecného řešení x_H přidružené homogenní rovnice a nějakého partikulárního řešení x_P nehomogenní rovnice.

- Pokud funkce x_1, resp. x_2, jsou řešení rovnice (3.10) s $b = f$, resp. s $b = g$, pak funkce $x = x_1 + x_2$ je řešení rovnice (3.10) s $b = f + g$.

Pokud funkce $y_1, y_2, \dots, y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice (3.11), pak její obecné řešení je tvaru

$$x_H(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) = \boldsymbol{y}(t)^\mathsf{T} \boldsymbol{c}. \tag{3.12}$$

3.2.1 Eulerova rovnice

Eulerova rovnice je lineární rovnice n-tého řádu ve tvaru

$$x^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{t} x^{(n-1)} + \frac{a_{n-2}}{t^2} x^{(n-2)} + \cdots + \frac{a_1}{t^{n-1}} x' + \frac{a_0}{t^n} x = g(t),$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ jsou reálné konstanty a g je funkce definovaná na intervalu $(0, \infty)$. Tuto rovnici přepíšeme do tvaru

$$t^n x^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + a_{n-2} t^{(n-2)} x^{n-2} + \cdots + a_1 t x' + a_0 x = f(t); \tag{3.13}$$

přitom $f(t) = t^n g(t)$. Řešíme ji zavedením nové nezávisle proměnné τ, kterou definujeme rovností $t = \mathrm{e}^\tau$, tj. $\tau = \ln t$. Pak je

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} \\
x'' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right) = -\frac{1}{t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right) \\
x''' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)\right) = -\frac{2}{t^3}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right) + \frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}\tau^3} - \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}\right)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \\
&= \frac{1}{t^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}\tau^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right) \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Dosadíme-li do rovnice (3.13), vypadnou faktory t, t^2, $\dots$, t^n, takže dostaneme lineární rovnici s konstantními koeficienty.

Příklad: $t^2 x'' - 2tx' + 2x = 3t^4$.

Položíme $t = \mathrm{e}^\tau$, tj. $\tau = \ln t$ a dostaneme

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{-\tau}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \\
x'' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\mathrm{e}^{-\tau}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \left(-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}\right)\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{e}^{-\tau} = \mathrm{e}^{-2\tau}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right).
\end{aligned}$$

Daná rovnice se tedy transformuje na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} - 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + 2x = 3\mathrm{e}^{4\tau}$$

a po triviální úpravě dostaneme rovnici s konstantními koeficienty

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + 2x = 3\mathrm{e}^{4\tau}. \tag{3.14}$$

Přidružená homogenní rovnice k této rovnici je

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + 2x = 0, \tag{3.15}$$

její charakteristická rovnice $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ má dva reálné kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, takže obecné řešení homogenní rovnice (3.15) je

$$x_H(\tau) = A\mathrm{e}^{\tau} + B\mathrm{e}^{2\tau}.$$

Nehomogenní rovnice (3.14) má speciální tvar pravé strany. Podle 3.1.2 zavedeme novou neznámou funkci $y = y(\tau)$ rovností

$$x(\tau) = \mathrm{e}^{4\tau}y(\tau). \tag{3.16}$$

Pak máme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} &= \left(4y + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{e}^{4\tau}, \\
\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\left(4y + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{e}^{4\tau}\right] = \left(4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} + 16y + 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{e}^{4\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} + 8\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} + 16y\right)\mathrm{e}^{4\tau}
\end{aligned}$$

a po dosazení do rovnice (3.15)

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} + 8\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} + 16y - 3\left(4y + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right) + 2y\right]\mathrm{e}^{4\tau} &= 3\mathrm{e}^{4\tau}, \\
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} + 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} + 6y &= 3,
\end{aligned}$$

Partikulární řešení této rovnice je podle 3.1.2 polynom stupně nula, tedy konstanta, $y \equiv c$. Po dosazení do rovnice dostaneme $6c = 3$, tj. $y(\tau) = c = \frac{1}{2}$. Partikulární řešení rovnice (3.14) dostáváme zpětnou substitucí (3.16) ve tvaru

$$x_P(\tau) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{4\tau}.$$

Obecné řešení transformované rovnice (3.14) je dáno rovností

$$x(\tau) = x_H(\tau) + x_P(\tau) = A\mathrm{e}^{\tau} + B\mathrm{e}^{2\tau} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{4\tau}.$$

Z něho zpětnou transformací dostaneme obecné řešení dané rovnice ve tvaru

$$x(t) = At + Bt^2 + \tfrac{1}{2}t^4.$$ ■

3.2.2 Partikulární řešení nehomogenní rovnice – variace konstant

Budeme hledat nějaké řešení nehomogenní lineární rovnice (3.10). Předpokládejme, že známe fundamentální systém řešení $y_1, y_2, \ldots, y_n$ přidružené homogenní rovnice (3.11). Obecné řešeni x_H této rovnice je dáno rovností (3.12).

Partikulární řešení nehomogenní rovnice budeme hledat v analogickém tvaru s tím rozdílem, že vektor $\boldsymbol{c}$ nebude konstantní, ale bude vektorem diferencovatelných funkcí jedné proměnné. Tuto myšlenku (a jejího autora) vystihuje název: *Lagrangeova metoda variace konstant.*

Řešení rovnice (3.10) tedy předpokládáme ve tvaru

$$x_P(t) = \boldsymbol{y}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}(t)$$

složky $c_1 = c_1(t)$, $c_2 = c_2(t)$, ..., $c_n = c_n(t)$ vektorové funkce $\boldsymbol{c}$ budeme hledat.

Platí $x_P'(t) = \boldsymbol{y}'(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{y}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}'(t)$. Abychom si zjednodušili další výpočty, položíme

$$\boldsymbol{y}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}'(t) = 0.$$

Je tedy

$$x_P'(t) = \boldsymbol{y}'(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}(t)$$

a proto $x_P'' = \boldsymbol{y}''(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{y}'(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}'(t)$. Podobně jako v předchozím kroku položíme

$$\boldsymbol{y}'(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}'(t) = 0$$

a dostaneme

$$x_P''(t) = \boldsymbol{y}''(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}(t).$$

Takové výpočty a úvahy zopakujeme $(n-1)$krát. Dostaneme tak

$$x_P^{(j)}(t) = \boldsymbol{y}^{(j)}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}(t), \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{y}^{(j)}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}'(t) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-2. \tag{3.18}$$

Nakonec ještě vypočítáme

$$x_P^{(n)}(t) = \boldsymbol{y}^{(j)}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{y}^{(j-1)}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}'(t). \tag{3.19}$$

Výrazy (3.17), $j = 0, 1, \dots, n-1$, a (3.19) dosadíme do levé strany rovnice (3.10) a upravíme:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}^{(j)}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{y}^{(j-1)}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}'(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)\boldsymbol{y}^{(j)}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}(t) = \\ = \boldsymbol{y}^{(j-1)}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}'(t) + \left(\boldsymbol{y}^{(j)}(t)^\mathsf{T} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)\boldsymbol{y}^{(j)}(t)^\mathsf{T}\right)\boldsymbol{c}(t).\end{aligned}$$

Poněvadž každá složka vektorové funkce $\boldsymbol{y}$ je řešením homogenní rovnice (3.11), je poslední výraz v závorce roven nulovému vektoru. Levá strana rovnice (3.10) je tedy rovna $\boldsymbol{y}^{(j-1)}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}'(t)$, takže se tato rovnice transformuje na rovnici

$$\boldsymbol{y}^{(j-1)}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{c}'(t) = b(t). \tag{3.20}$$

Celkem jsme dostali n algebraických rovnic (3.18), (3.20) pro n složek neznámého vektoru $\boldsymbol{c}'(t)$. Jedná se o systém lineárních algebraických rovnic, který můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{array}{ccccccc} y_1(t)c_1'(t) & + & y_2(t)c_2'(t) & + \cdots + & y_n(t)c_n'(t) & = & 0, \\ y_1'(t)c_1'(t) & + & y_2'(t)c_2'(t) & + \cdots + & y_n{}'(t)c_n'(t) & = & 0, \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t)c_1'(t) & + & y_2^{(n-2)}(t)c_2'(t) & + \cdots + & y_n^{(n-2)}(t)c_n'(t) & = & 0, \\ y_1^{(n-1)}(t)c_1'(t) & + & y_2^{(n-1)}(t)c_2'(t) & + \cdots + & y_n^{(n-1)}(t)c_n'(t) & = & b(t), \end{array} \tag{3.21}$$

nebo maticově

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(t) \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Determinant matice na levé straně této rovnice je wronskiánem lineárně nezávislých funkcí $y_1, y_2, \dots, y_n$ tvořících fundamentální systém řešení rovnice (3.11). Je tedy pro libovolné t nenulový a matice je regulární. Proto můžeme funkce $c_1', c_2', \dots, c_n'$ jednoznačně vypočítat. Jejich integrací získáme hledané funkce $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Partikulární řešení rovnice (3.10) splňující nulovou počáteční podmínku $x(t_0) = 0$ získáme tak, že integrujeme v mezích od t_0 do t.

Příklad: Najdeme obecné řešení rovnice

$$x'' + x = f(t)$$

s obecnou pravou stranou; o funkci f předpokládáme, že je definovaná na intervalu, který obsahuje nulu, a že je integrovatelná.

Přidružená homogenní rovnice $x'' + x = 0$ má konstantní koeficienty. Její charakteristická rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ má dva ryze imaginární kořeny $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}$, takže fundamentální systém řešení je

$$y_1(t) = \cos t, \quad y_2(t) = \sin t.$$

Systém rovnic (3.21) je nyní tvaru

$$\begin{aligned} c_1'(t)\cos t + c_2' \sin t &= 0, \\ -c_1'(t)\sin t + c_2' \cos t &= f(t). \end{aligned}$$

Odtud vypočítáme

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1,$$

$$c_1'(t) = \begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ f(t) & \cos t \end{vmatrix} = -f(t)\sin t, \qquad c_2'(t) = \begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & f(t) \end{vmatrix} = f(t)\cos t$$

a dále

$$c_1(t) = -\int_0^t f(s)\sin s \,\mathrm{d}s, \qquad c_2(t) = \int_0^t f(s)\cos s \,\mathrm{d}s.$$

Partikulární řešení dané rovnice, které splňuje nulovou počáteční podmínku $x(0) = 0$ tedy je

$$\begin{aligned} x_P(t) = \sin t \int_0^t f(s)\cos s \,\mathrm{d}s - \cos t \int_0^t f(s)\sin s \,\mathrm{d}s = \\ = \int_0^t f(s)(\sin t \cos s - \cos t \sin s)\mathrm{d}s = \int_0^t f(s)\sin(t-s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Obecné řešení dané rovnice tedy je

$$x(t) = A\cos t + B\sin t + \int_0^t f(s)\sin(t-s)\mathrm{d}s.$$

■

3.3 Snížení řádu lineární homogenní rovnice

Může se stát, že známe nějaké nenulové řešení $y_1 = y_1(t)$ lineární homogenní rovnice n-tého řádu (3.11); takové řešení můžeme například uhodnou z tvaru koeficientů nebo ze znalosti procesu, který rovnice (3.11) modeluje. Zavedeme novou neznámou funkci $v = v(t)$ vztahem

$$x(t) = y_1(t)v(t).$$

Pro zjednodušení zápisu zavedeme funkci $a_n(t) \equiv 1$ a levou stranu rovnice (3.11) zapíšeme jako

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)x^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\big(y_1(t)v\big)^{(k)}.$$

Podle Leibnizovy formule pro vyšší derivace součinu funkcí platí

$$\big(y_1(t)v\big)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y_1^{(k-j)}(t)v^{(j)}.$$

Nyní tyto výrazy dosadíme do levé strany rovnice (3.11) a upravíme ji.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k(t)x^{(k)} &= \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y_1^{(k-j)}(t)v^{(j)} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_k(t)\binom{k}{j} y_1^{(k-j)}(t)v^{(j)} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_k(t)\binom{k}{j} y_1^{(k-j)}(t)v^{(j)} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\binom{k}{0} y_1^{(k)}(t)v + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j}^{n} a_k(t)\binom{k}{j} y_1^{(k-j)}(t)v^{(j)} + a_n(t)\binom{n}{n} y_1(t)v^{(n)} = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k(t)y_1^{(k)}(t)\right)v + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{k=j}^{n} a_k(t)\binom{k}{j} y_1^{(k-j)}(t)\right)v^{(j)} + y_1(t)v^{(n)}.
\end{aligned}$$

Poslední výraz můžeme upravit na

$$y_1(t)\left[v^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{k=j}^{n} a_k(t)\binom{k}{j}\frac{y_1^{(k-j)}(t)}{y_1(t)}\right)v^{(j)}\right],$$

neboť funkce y_1 je nenulovým řešením rovnice (3.11).

Nakonec zavedeme označení $z(t) = v'(t)$. Rovnice (3.11) se uvedeným postupem transformuje na rovnici

$$z^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=j}^{n} a_k(t) \binom{k}{j} \frac{y_1^{(k-j)}(t)}{y_1(t)} \right) z^{(j-1)} = 0,$$

nebo ekvivalentně

$$z^{(n-1)} + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{k=j+1}^{n} a_k(t) \binom{k}{j+1} \frac{y_1^{(k-j-1)}(t)}{y_1(t)} \right) z^{(j)} = 0,$$

což je lineární homogenní rovnice $(n-1)$-ního řádu pro neznámou funkci z.

3.3.1 Nalezení druhé složky fundamentálního systému rovnice druhého řádu

Lineární homogenní rovnice druhého řádu má dvojrozměrný prostor řešení. Pokud tedy známe jedno nenulové řešení, stačí najít druhé – lineárně nezávislé – a rovnici máme vyřešenu. Avšak známe-li jedno řešení, můžeme obecným postupem uvedeným výše snížit řád rovnice; tak dostaneme lineární homogenní rovnici, kterou umíme vyřešit způsobem uvedeným v 1.3.1. Tuto myšlenku ukážeme podrobně.

Nechť p, q jsou spojité funkce definované na intervalu J. Uvažujme lineární homogenní rovnici druhého řádu ve tvaru

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \tag{3.22}$$

a předpokládejme, že známe jedno její nekonstantní řešení $y_1 = y_1(t)$, tedy jednu složku fundamentálního systému řešení. Zavedeme substituci

$$x(t) = y_1(t)v(t), \tag{3.23}$$

kde v je zatím neznámá funkce. Pak $x' = y_1'v + y_1v'$, $x'' = y_1''v + 2y_1'v' + y_1v''$, tedy

$$\begin{aligned} y_1''v + 2y_1'v' + y_1v'' + py_1'v + py_1v' + qy_1v &= 0 \\ y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' + \left(y_1'' + py_1' + qy_1\right)v &= 0 \\ v'' + \left(p + 2\frac{y_1'}{y_1}\right)v' &= 0\,, \end{aligned}$$

Dostali jsme diferenciální rovnici pro neznámou funkci $v = v(t)$, ve které se samotná funkce v explicitně neobjevuje (podrobněji se takovým rovnicím budeme věnovat v 4.2.2). Položíme $z(t) = v'(t)$. Pak

$$z' = -\left(p(t) + 2\frac{y_1'(t)}{y_1(t)}\right)z.$$

To je lineární homogenní rovnice prvního řádu, takže její řešení je tvaru

$$\begin{aligned} z(t) = {}& const \cdot \exp\left\{ -\int_{t_0}^{t} \left(p(s) + 2\frac{y_i'(s)}{y_1(s)} \right) \mathrm{d}s \right\} = \\ &= const \cdot \exp\left\{ -2\ln\frac{y_1(t)}{y_1(t_0)} \right\} \exp\left\{ -\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s \right\} = const \cdot \frac{1}{y_1(t)^2} \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s}\,, \end{aligned}$$

kde t_0 je nějaké číslo z intervalu J. Odtud integrací dostaneme hledanou funkci v ve tvaru

$$v(t) \;=\; A + B\int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{(y_1(s))^2}\,\mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{s} p(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\,\mathrm{d}s,$$

kde A, B jsou nějaké konstanty. Zpětnou substitucí (3.23) dostaneme řešení rovnice (3.22) ve tvaru

$$x(t) = Ay_1(t) + By_1(t)\int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{(y_1(s))^2}\,\mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{s} p(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\,\mathrm{d}s,$$

tedy jako lineární kombinaci funkcí y_1 a y_2, kde

$$y_2(t) = y_1(t)\int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{(y_1(s))^2}\,\mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{s} p(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\,\mathrm{d}s. \tag{3.24}$$

K tomu, aby funkce y_2 byla druhou složkou fundamentálního systému řešení řešení rovnice (3.22) stačí, aby byla lineárně nezávislá na funkci y_1. To však je splněno, neboť

$$y_2'(t) = y_1'(t)\int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{(y_1(s))^2}\,\mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{s} p(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{y_1(t)}\mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(\sigma)\mathrm{d}\sigma}$$

a wronskián funkcí y_1, y_2 je roven

$$W(t,y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_1(t)\int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{(y_1(s))^2}\,\mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{s} p(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\,\mathrm{d}s \\ y_1'(t) & y_1'(t)\int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{(y_1(s))^2}\,\mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{s} p(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{y_1(t)}\mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s} \;>\; 0\,.$$

Příklad: Najdeme fundamentální systém řešení rovnice

$$x'' - \frac{2t}{1-t^2}x' + \frac{6}{1-t^2}x = 0 \tag{3.25}$$

na intervalu $(-1,1)$. Rovnici nejprve vynásobíme dvojčlenem $1-t^2$,

$$(1-t^2)x'' - 2tx' + 6x = 0. \tag{3.26}$$

Koeficienty této rovnice jsou polynomy. Dále víme, že derivace polynomu je polynom stupně o jedna menšího, druhá derivace polynomu je polynom stupně o dva menšího. Pokud by tedy funkce $x = x(t)$ byla polynomem a dosadili bychom ji do levé strany rovnice (3.26), všechny sčítance by byly polynomy stejného stupně. Tato pozorování mohou vést k nápadu, že rovnici (3.26) by mohl řešit polynom.

Budeme tedy předpokládat, že rovnice (3.26) má řešení tvaru

$$y_1(t) = \sum_{i=0} a_i t^i \tag{3.27}$$

se zatím neurčenými koeficienty a neurčenou horní mezí pro sčítání. Pak je

$$\begin{aligned}
6y_1(t) &= 6a_0 + 6a_1 t + \sum_{i=2} 6a_i t^i, \\
y_1'(t) &= \sum_{i=0} i a_i t^{i-1} \;=\; \sum_{i=1} i a_i t^{i-1}, \\
2ty_1'(t) &= \sum_{i=1} 2i a_i t^i \;=\; 2a_1 t + \sum_{i=2} 2i a_i t^i, \\
y_1''(t) &= \sum_{i=1} i(i-1) a_i t^{i-2} \;=\; \sum_{i=2} i(i-1) a_i t^{i-2} \;=\; \sum_{i=0} (i+2)(i+1) a_{i+2} t^i, \\
(1-t^2)y_1''(t) &= \sum_{i=0} (i+2)(i+1) a_{i+2} t^i - \sum_{i=2} i(i-1) a_i t^i \;= \\
&= 2a_2 + 6a_3 t + \sum_{i=2} \left[(i+2)(i+1)a_{i+2} - i(i-1)a_i\right] t^i.
\end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (3.26) dostaneme

$$6a_0 + 2a_2 + (4a_1 + 6a_3)t + \sum_{i=2} \left[(i+2)(i+1)a_{i+2} - (i+3)(i-2)a_i\right] t^i = 0.$$

To znamená, že koeficienty hledaného polynomu splňují vztahy

$$a_2 = -3a_0, \qquad a_3 = -\tfrac{2}{3}a_1, \qquad a_4 = 0,$$

$$a_{i+2} = \frac{(i+2)(i+1)}{(i+3)(i-2)} a_i, \quad i = 3, 4, \ldots .$$

Odtud je vidět, že $a_4 = a_6 = \cdots = 0$, tj. všechny koeficienty se sudými indexy většími než 2 jsou nulové. Pokud by koeficient a_1 byl nenulový, byly by nenulové všechny koeficienty s lichými indexy a na pravé straně rovnice (3.27) by nebyl polynom, ale nekonečná řada. Musí tedy být $a_1 = 0$. Zvolíme-li nyní $a_0 = 1$, dostaneme $a_2 = -3$. Jedno řešení rovnice (3.25) tak dostáváme ve tvaru

$$y_1(t) = 1 - 3t^2.$$

Lineárně nezávislé řešení y_2 rovnice (3.25) dostaneme z formule (3.24), v níž zvolíme $t_0 = 0$. V rovnici (3.25) je

$$p(t) = -\frac{2t}{1-t^2},$$

takže

$$-\int_0^s p(\sigma)\mathrm{d}\sigma = \int_0^s \frac{2\sigma \mathrm{d}\sigma}{1-\sigma^2} = -\left[\ln\left|\sigma^2 - 1\right|\right]_{\sigma=0}^s = -\ln(1-s^2)$$

pro $s \in (-1, 1)$. Platí tedy

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t p(\sigma)\mathrm{d}\sigma} = \frac{1}{1-s^2}$$

a druhá složka fundamentálního systému řešení rovnice (3.25) je

$$y_2(t) = (1-3t^2)\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{(1-3s^2)^2(1-s^2)}.$$

Integrál na pravé straně je integrálem z racionální funkce, můžeme ho tedy vyjádřit explicitně,

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{(1-3s^2)^2(1-s^2)} = \frac{1}{4}\int_0^t \left(3\frac{3s^2+1}{(3s^2-1)^2} - \frac{1}{s^2-1}\right)\mathrm{d}s =$$
$$= \frac{1}{4}\left[-3\frac{s}{3s^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{s-1}{s+1}\right|\right]_{s=0}^t = -\frac{3}{4}\frac{t}{3t^2-1} - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| =$$
$$= \frac{3}{4}\frac{t}{1-3t^2} + \frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Dostáváme tak druhou složku fundamentálního systému řešení

$$y_2(t) = \tfrac{1}{4}\left(3t + (1-3t^2)\ln\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

a obecné řešení rovnice (3.25) můžeme zapsat ve tvaru

$$x(t) = A\left(1-3t^2\right) + B\left(3t + (1-3t^2)\ln\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\right).$$

Ještě poznamenejme, že rovnice (3.26) je speciálním případem *Legendreovy rovnice*

$$(1-t^2)x'' - 2tx' + \nu x = 0.$$

Tato rovnice má řešení ve tvaru polynomu stupně n právě pro $\nu = n(n+1)$. ■

3.4 Systém lineárních rovnic s konstantními koeficienty

Jedná se o soustavu obyčejných diferenciálních rovnic tvaru

$$\begin{array}{ccccccc} x_1' & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \ldots & + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ x_2' & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \ldots & + a_{2n}x_n + b_2(t) \\ \vdots & & \vdots \qquad \vdots & \ddots & \vdots \qquad \vdots \\ x_n' & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \ldots & + a_{nn}x_n + b_n(t). \end{array} \tag{3.28}$$

Přitom a_{ij}, $i,j = 1,2,\ldots,n$, jsou reálné konstanty, $b_i = b_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,n$, jsou reálné funkce jedné reálné proměnné. Pokud jsou všechny funkce $b_1, b_2, \ldots, b_n$ na pravých stranách rovnic (3.28) nulové, systém se nazývá *homogenní,* v opačném případě *nehomogenní.*

Lineární systém (3.28) můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

nebo stručněji

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t).$$

3.4.1 Homogenní systémy

Homogenní systém lineárních rovnic s konstantními koeficienty je tvaru

$$\begin{array}{ccccccc} x_1' & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1n}x_n \\ x_2' & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n' & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \dots & + a_{nn}x_n, \end{array} \tag{3.29}$$

nebo v maticovém zápisu

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A}\boldsymbol{x}. \tag{3.30}$$

Připomeneme základní pojmy a tvrzení teorie lineárních homogenních n-rozměrných systémů

- *Princip superpozice:* Jsou-li $\boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{y_1}(t)$ a $\boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{y_2}(t)$ řešení systému (3.29), pak také jejich lineární kombinace je řešením této rovnice. Jinak řečeno, množina všech vektorových funkcí, které jsou řešením systému (3.29) tvoří vektorový prostor.
- Množina všech řešení systému (3.29) tvoří n-rozměrný vektorový prostor nad polem reálných čísel.
- Báze $\boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{y_1}(t)$, $\boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{y_2}(t)$, …, $\boldsymbol{y_n} = \boldsymbol{y_n}(t)$ prostoru všech řešení rovnice (3.29) se nazývá *fundamentální systém řešení systému* (3.29). Matice

  $$\mathsf{Y} = \mathsf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1}(t) & \boldsymbol{y_2}(t) & \dots & \boldsymbol{y_n}(t) \end{pmatrix}$$

  se nazývá *fundamentální matice řešení systému* (3.29). Fundamentální matice $\mathsf{Y}(t)$ je regulární pro každé t a splňuje maticovou diferenciální rovnici

  $$\mathsf{Y}' = \mathsf{AY}.$$

Dvojrozměrné systémy: Uvažujme dvojrozměrný lineární homogenní systém s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned} x' &= ax + by, \\ y' &= cx + dy. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Při maticovém zápisu (3.30) tohoto systému je

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Pokud $b = 0 = c$, nejedná se o systém rovnic, ale o dvě samostatné rovnice

$$x' = ax, \qquad y' = dy.$$

To jsou lineární homogenní rovnice s konstantním koeficientem, které mají podle 1.3.1 obecná řešení $x(t) = A\mathrm{e}^{at}$, $y(t) = B\mathrm{e}^{dt}$. Fundamentální systém řešení a fundamentální matice systému (3.31) jsou v tomto případě

$$\boldsymbol{y_1}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y_2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{dt} \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{dt} \end{pmatrix}.$$

Nechť $|b| + |c| \neq 0$; pro určitost předpokládejme, že $b \neq 0$. V takovém případě můžeme řešení systému (3.31) najít *metodou eliminace* („dosazovací metodou“).

Z první rovnice systému (3.31) vypočítáme y,

$$y = \frac{x' - ax}{b}, \tag{3.32}$$

a dosadíme do druhé rovnice,

$$y' = cx + \frac{d}{b}\left(x' - ax\right).$$

Dále zderivujeme první rovnici systému a pak do ní dosadíme z předchozí rovnosti. Dostaneme

$$x'' = ax' + by' = ax' + b\left(cx + \frac{d}{b}\left(x' - ax\right)\right),$$

po úpravě

$$x'' - (a + d)x' + (ad - bc)x = 0,$$

neboli

$$x'' - (\operatorname{tr} \mathsf{A})x' + (\det \mathsf{A})x = 0. \tag{3.33}$$

Dostáváme tak, že první složka řešení systému (3.31) je řešením rovnice (3.33), což je lineární homogenní rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty; tato rovnice má stejný tvar jako rovnice (3.4), kterou jsme řešili v 3.1.1. Druhá složka řešení je pak dána rovností (3.32).

Ještě si povšimněme, že charakteristická rovnice lineární homogenní diferenciální rovnice (3.33) je

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} \mathsf{A})\lambda + (\det \mathsf{A}) = 0,$$

což je také charakteristická rovnice matice A.

Příklad na užití dvojrozměrného lineárního systému je uveden v 5.4.

Systémy obecné dimense: Jednorozměrný systém (3.30) je vlastně homogenní lineární rovnice $x' = ax$, která má podle 1.3.1 obecné řešení $x(t) = Ce^{at}$, kde C je reálná konstanta. Můžeme vyzkoušet, zda také systém (3.30) obecné dimense nemá řešení ve tvaru exponenciální funkce, tj. řešení tvaru

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{w}\mathrm{e}^{\lambda t},$$

kde $\boldsymbol{w}$ je konstantní vektor dimense n a λ je zatím neurčená konstanta. Tento očekávaný tvar řešení dosadíme do systému (3.30) a dostaneme

$$\mathsf{A}\boldsymbol{w}\mathrm{e}^{\lambda t} = \lambda \boldsymbol{w}\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Výraz $\mathrm{e}^{\lambda t}$ je vždy nenulový, proto jím můžeme předchozí rovnost vydělit. Dostaneme rovnost

$$\mathsf{A}\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{w},$$

která říká,že λ je vlastní číslo matice A a $\boldsymbol{w}$ je příslušný vlastní vektor. Tedy platí: *Je-li λ vlastní číslo matice A a $\boldsymbol{w}$ je příslušný vlastní vektor, pak vektorová funkce $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{w}$ je řešením rovnice* (3.30). Toto řešení však nemusí být reálné.

Má-li matice A n různých reálných vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, pak příslušné vlastní vektory $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_n}$ jsou lineárně nezávislé a proto vektorové funkce

$$\boldsymbol{y_1}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{w_1}, \quad \boldsymbol{y_2}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\boldsymbol{w_2}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{y_n}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_n t}\boldsymbol{w_n}$$

tvoří fundamentální systém řešení systému (3.30).

3.5 Cvičení

Řešte rovnice

1) $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$ **2)** $x''+tx'=0$ **3)** $tx'''-2x''=0$

Ukažte, že $x=u(t)$ je řešením dané rovnice a rovnici vyřešte.

4) $u=t^2;\ t^2x''-2x=0$ **5)** $u=\sqrt{t};\ x''+\frac{x}{4t^2}=0\ (t>0)$

Řešte rovnice (Cauchyovy úlohy)

6) $x''+2x=0$ **7)** $x''+6x'+5x=0$

8) $x''+6x'+9x=0$ **9)** $x''-2x'+4x=0$

10) $x''-x=0;\ x(0)=1,\ x'(0)=-2$ **11)** $x''+4x=0;\ x(0)=0,\ x'(0)=2$

12) $x''+x'=t$ **13)** $x''+x=\sin t$

14) $x''-x=\mathrm{e}^t$ **15)** $x''-3x'-10x=-3$

16) $x''-x'=\sin t$ **17)** $x''-3x'=\mathrm{e}^{3t}-12t$

18) $x''+x=\operatorname{cotg} t$ **19)** $x''-8x'=\mathrm{e}^{8t}$

20) $x''+2x'=t^2-\mathrm{e}^t$ **21)** $t^2x''-tx'+x=t$

22) $t^2x''-tx'+2x=(\ln t)^2$ **23)** $t^3x'-t^4x^2-t^2x=2$

Řešte systémy rovnic

24) $\begin{aligned}x'&=-2x+y\\ y'&=3x-4y\end{aligned}$ **25)** $\begin{aligned}x'&=-x-\tfrac{2}{3}y+\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^t\\ y'&=\tfrac{4}{3}x+y-t\end{aligned}$

26) $\begin{aligned}x'+3x+2y&=5\sin t\\ y'-2x+7y&=8\cos t\end{aligned}$ **27)** $\begin{aligned}4x'+9y'+2x+31y&=\mathrm{e}^t\\ 3x'+7y'+x+24y&=3\end{aligned}$

Výsledky:

1) $x=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2$ **2)** $x=C_1\int\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t+C_2$ **3)** $x=C_1t^4+C_2t+C_3$ **4)** $x=\frac{C_1}{t}+C_2t^2$
5) $x=\sqrt{t}\,(C_1\ln|t|+C_2)$ **6)** $x=C_1+C_2\mathrm{e}^{-2t}$ **7)** $x=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-5t}$ **8)** $x=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{-3t}$
9) $x=\mathrm{e}^t(C_1\cos\sqrt{3}\,t+C_2\sin\sqrt{3}\,t)$ **10)** $x=\frac{3\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^t}{2}$ **11** $x=\sin 2t$ **12)** $x=C_1+C_2\mathrm{e}^{-t}+\frac{t^2}{2}-t$
13) $x=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{t\cos t}{2}$ **14)** $x=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}+\frac{t\mathrm{e}^t}{2}$ **15)** $x=C_1\mathrm{e}^{5t}+C_2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{3}{10}$
16) $x=C_1+C_2\mathrm{e}^t+\frac{\cos t-\sin t}{2}$ **17)** $x=C_1+C_2\mathrm{e}^{3t}+2t^2+\frac{t\mathrm{e}^{3t}+4t}{3}$
18) $x=C_1\cos t+C_2\sin t-\sin t\ln\left|\frac{1+\cos t}{\sin t}\right|$ **19)** $x=C_1+\left(C_2+\frac{t}{8}\right)\mathrm{e}^{8t}$
20) $x=C_1+C_2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{4}+\frac{t}{4}-\frac{\mathrm{e}^t}{3}$ **21)** $x=t\left(A\ln t+B+\frac{1}{2}(\ln t)^2\right)$
22) $At\sin(B+\ln t)+(1+\ln t)^2$ **23)** $x=\frac{2Ct-1}{t^2(1-Ct)},\ x=-\frac{2}{t^2}$
24) $x=A\mathrm{e}^{-t}+B\mathrm{e}^{-5t},y=A\mathrm{e}^{-t}-3B\mathrm{e}^{-5t}$
25) $x=A\mathrm{e}^{t/3}+B\mathrm{e}^{-t/3}-6t,y=-2A\mathrm{e}^{t/3}-B\mathrm{e}^{-t/3}+9t+\frac{1}{2}\mathrm{e}^t+9$
26) $x=A\mathrm{e}^{-5t}+Bt\mathrm{e}^{-5t}+\frac{365}{338}\sin t-\frac{307}{338}\cos t,y=\left(A-\frac{1}{2}B\right)\mathrm{e}^{-5t}+Bt\mathrm{e}^{-5t}+\frac{72}{169}\sin t+\frac{139}{169}\cos t$
27) $x=\mathrm{e}^{-4t}(A\cos t+B\sin t)+\frac{31}{26}\mathrm{e}^t-\frac{93}{17},y=\mathrm{e}^{-4t}((B-A)\cos t-(B+A)\sin t)-\frac{2}{13}\mathrm{e}^t+\frac{6}{17}$

Kapitola 4

Další explicitně řešitelné rovnice

4.1 Riccatiho rovnice

Lineární homogenní rovnice druhého řádu

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{4.1}$$

je homogenní rovnicí v proměnných x, x', x'' ve smyslu zavedeném v 4.2.4, neboť pro funkci $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$F(t, z_0, z_1, z_2) = b(t)z_0 + a(t)z_1 + z_2$$

a každou konstantu $c \in \mathbb{R}$ platí

$$F(t, cz_0, cz_1, cz_2) = b(t)cz_0 + a(t)cz_1 + cz_2 = c\big(b(t)z_0 + a(t)z_1 + z_2\big) = cF(t, z_0, z_1, z_2).$$

Řešení uvažované rovnice lze proto hledat ve tvaru

$$x(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} y(s)\mathrm{d}s},$$

kde y je nová neznámá funkce a t_0 je nějaké číslo z průniku definičních oborů funkcí a, b. Při této substituci dostaneme

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} y(s)\mathrm{d}s}, \\ x''(t) &= y'(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} y(s)\mathrm{d}s} + y(t)^2\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} y(s)\mathrm{d}s} = \left(y'(t) + y(t)^2\right)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} y(s)\mathrm{d}s} \end{aligned}$$

a po dosazení do rovnice (4.1)

$$y'(t) + y(t)^2 + a(t)y(t) + b(t) = 0.$$

Po úpravě dostaneme diferenciální rovnici pro neznámou funkci y:

$$y' = -y^2 - a(t)y - b(t).$$

Lineární homogenní rovnici druhého řádu lze tedy převést na rovnici prvního řádu, která má na pravé straně kvadratický polynom, jehož proměnnou je hledaná funkce. Takovými rovnicemi se nyní budeme zabývat.

Riccatiho rovnice je rovnice tvaru

$$x' = p(t)x^2 + q(t)x + r(t).$$

Tuto rovnici můžeme užitím Eulerovy substituce

$$x(t) = -\frac{y'(t)}{p(t)y(t)}$$

převést na lineární rovnici druhého řádu. Platí totiž

$$x' = -\frac{y''py - y'(p'y + py')}{p^2y^2} = -\frac{y''}{py} + \frac{p'y'}{p^2y} + \frac{y'^2}{py^2}$$

a tedy

$$\begin{aligned} -\frac{y''}{py} + \frac{p'y'}{p^2y} + \frac{y'^2}{py^2} &= \frac{py'^2}{p^2y^2} - \frac{qy'}{py} + r \\ -\frac{y''}{py} + \frac{1}{py}\left(\frac{p'}{p} + q\right)y' - r &= 0 \\ y'' - \left(\frac{p'}{p} + q\right)y' + pry &= 0\,, \end{aligned}$$

což je lineární homogenní rovnice druhého řádu.

Příklad: Uvažujme rovnici

$$t^2x' - t^2x^2 + 3tx - 2 = 0.$$

Tuto rovnici můžeme přepsat na tvar

$$x' = x^2 - \frac{3}{t}x + \frac{2}{t^2}, \tag{4.2}$$

je tedy $p \equiv 1$, $q(t) = -\dfrac{3}{t}$, $r(t) = \dfrac{2}{t^2}$. Zavedeme substituci

$$x = -\frac{y'}{y}. \tag{4.3}$$

Pak je

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{y''y - y'y'}{y^2} = -\frac{y''}{y} + \left(\frac{y'}{y}\right)^2, \\ x^2 - \frac{3}{t}x + \frac{2}{t^2} &= \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \frac{3y'}{ty} + \frac{2}{t^2}, \end{aligned}$$

takže rovnice (4.2) se transformuje na tvar

$$-\frac{y''}{y} = \frac{3y'}{ty} + \frac{2}{t^2}$$

a po úpravě

$$t^2y'' + 3ty' + 2y = 0. \tag{4.4}$$

To je rovnice Eulerova, viz 3.2.1. Zavedeme tedy novou nezávisle proměnnou s vztahem

$$s = \ln t. \tag{4.5}$$

Pak je

$$y' = \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \qquad y'' = \frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)$$

a po dosazení do rovnice (4.4) dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + 2y = 0, \tag{4.6}$$

která je lineární s konstantními koeficienty. Její charakteristická rovnice $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $-1 \pm \mathrm{i}$. To znamená, že rovnice (4.6) má obecné řešení

$$y(s) = (A\cos s + B\sin s)\mathrm{e}^{-s}.$$

Zpětnou substitucí (4.5) dostaneme řešení Eulerovy rovnice (4.4)

$$y(t) = \frac{1}{t}(A\cos\ln t + B\sin\ln t).$$

Jeho derivace je

$$y'(t) = \frac{1}{t^2}\big((B-A)\cos\ln t - (B+A)\sin\ln t\big).$$

Po dosazení do transformačního vztahu (4.3) dostaneme řešení původní rovnice (4.2) ve tvaru

$$x(t) = \frac{1}{t}\frac{(A-B)\cos\ln t + (A+B)\sin\ln t}{A\cos\ln t + B\sin\ln t}. \tag{4.7}$$

Riccatiho rovnice (4.2) je však rovnice prvního řádu, její řešení by mělo záviset jen na jedné konstantě. Proto výsledek ještě upravíme. Integrační konstanta A může být nenulová nebo nulová. V prvním případě označíme $C = B/A$ a řešení (4.7) Riccatiho rovnice (4.2) přepíšeme ve tvaru

$$x(t) = \frac{(1-C)\cos\ln t + (1+C)\sin\ln t}{t(\cos\ln t + C\sin\ln t)},$$

ve druhém případě $A = 0$ dostaneme řešení tvaru

$$x(t) = \frac{\sin\ln t - \cos\ln t}{t\sin\ln t}.$$

■

Příkladem na užití Riccatiho rovnice s konstantními koeficienty je model udržitelného rybolovu 5.8.

4.2 Rovnice vyššího řádu, u nichž lze řád snížit

4.2.1 Autonomní rovnice druhého řádu $x'' = f(x)$

Rovnici vynásobíme $2x'$:

$$\begin{aligned} 2x'x'' &= 2x'f(x) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x'^2\right) &= 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}f(x) \end{aligned}$$

Položíme-li $p = x'$, máme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p^2 &= 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}f(x) \\ \frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 2f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}x} &= 2f(x) \\ p^2 &= 2\int f(x)\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Položíme dále $F(x) = 2\int f(x)\mathrm{d}x$ a dostaneme

$$\begin{aligned} p &= \pm\sqrt{F(x)} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \pm\sqrt{F(x)}\,, \end{aligned}$$

což je rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými.

Příklad na použití rovnice tohoto typu je model expandujícího Vesmíru 5.9.

4.2.2 Rovnice typu $F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(n)}) = 0,\ k \in \{1, \dots, n-1\}$

Položíme $y = y(t) = x^{(k)}(t)$ a dostaneme rovnici

$$F\left(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-k)}\right) = 0\,,$$

což je rovnice řádu o k nižšího, než daná rovnice.

Řešením rovnice tohoto typu je například „psí křivka“ uvedená v 5.5.

4.2.3 Autonomní rovnice typu $F\left(x, x', x'', \dots, x^{(n)}\right) = 0$

Položíme $p = p(t) = x'(t)$. Pak

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ x''' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)^2 + p\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}\right)p\,. \end{aligned}$$

Postupujeme-li tak dále, vidíme, že

$$x^{(k)} = f_k\left(p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}p}{\mathrm{d}x^{k-1}}\right)$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$. (f_k je nějaká funkce k proměnných.) Dosazením do původní rovnice tedy dostaneme

$$F\left(x, p, p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, f_3\left(p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}\right), \dots, f_n\left(p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}p}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)\right) = 0\,,$$

neboli

$$G\left(x, p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}p}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right) = 0\,,$$

což je rovnice řádu o jedna nižšího, než daná rovnice.

Ještě si povšimněme, že rovnice tvaru 4.2.1 je speciálním případem dané rovnice.

4.2.4 Rovnice homogenní v $x, x', x'', \dots, x^{(n)}$

Nechť F je funkce $n+2$ proměnných splňující podmínky:

$$(t, z_0, z_1, z_2, \dots, z_n) \in \operatorname{Dom} F \;\Rightarrow\; (t, cz_0, cz_1, cz_2, \dots, cz_n) \in \operatorname{Dom} F,$$

$$F(t, cz_0, cz_1, cz_2, \dots, cz_n) = c^\alpha F(t, z_0, z_1, z_2, \dots, z_n) \tag{4.8}$$

pro každou kladnou konstantu c, každou $(n+2)$-tici $(t, z_0, z_1, z_2, \dots, z_n) \in \operatorname{Dom} F$ a nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$. Řešení implicitní diferenciální rovnice n-tého řádu

$$F\big(t, x, x', x'' \dots, x^{(n)}\big) = 0 \tag{4.9}$$

lze hledat ve tvaru

$$x(t) = \mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t}, \tag{4.10}$$

kde $y = y(t)$ je nová neznámá funkce. Je totiž

$$\begin{aligned}
x' &= y\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t}\\
x'' &= y'\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} + y^2\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} = (y' + y^2)\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t}\\
x''' &= (y'' + 2yy')\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} + (y' + y^2)y\,\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} = (y'' + 3yy' + y^3)\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t}\\
&\;\vdots
\end{aligned}$$

Dosadíme-li pravé strany těchto rovností do dané rovnice, vypadne vzhledem k podmínce (4.8) faktor $\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t}$ a dostaneme rovnici řádu o jedna nižšího, než byla daná rovnice.

V lineární homogenní rovnici prvního řádu

$$x' = a(t)x,$$

řešené v 1.3.1 je $F(t, x, x') = x' - a(t)x$. Tato funkce splňuje podmínku (4.8) s $\alpha = 1$. Substitucí (4.10) převedeme lineární homogenní diferenciální rovnici na tvar

$$y(t)\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} = a(t)\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t}.$$

Výsledná rovnice není diferenciální; v rovnici stupně nula se neobjevuje derivace hledané funkce. Proto můžeme bezprostředně vyjádřit $y(t) = a(t)$. Řešení lineární homogenní diferenciální rovnice je tedy tvaru

$$x(t) = \mathrm{e}^{\int a(t)\mathrm{d}t}$$

v souladu s výsledkem 1.3.1.

Poznámka 1. Slovo „homogenní“ bez přívlastku se objevilo již u rovnice tvaru 1.1.5, rovnice (4.9) však není jejím speciálním případem. Terminologie vychází z pojmu „homogenní funkce“:

Řekneme, že funkce $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je *homogenní řádu* $\alpha \in \mathbb{R}$, jestliže pro každou konstantu $c > 0$ platí

$$G(cx_1, cx_2, \dots, cx_m) = c^\alpha G(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Ve funkci F na levé straně rovnice (4.9) můžeme proměnnou t (čas) považovat za parametr a podmínka (4.8) pak říká, že taková funkce je pro každou hodnotu parametru homogenní řádu 1.

Funkce $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daná předpisem

$$G(t,x) = f\left(\frac{x}{t}\right),$$

kde f je nějaká funkce jedné proměnné, je homogenní řádu 0, neboť platí

$$G(ct, cx) = f\left(\frac{cx}{ct}\right) = f\left(\frac{x}{t}\right) = c^0 f\left(\frac{x}{t}\right).$$

Používaná terminologie je tedy opodstatněná.

4.3 Ekvidimensionální rovnice

Řekneme, že implicitní diferenciální rovnice n-tého řádu

$$F\left(t, x, x', \dots, x^{(n)}\right) = 0$$

je *ekvidimensionální v nezávisle proměnné*, jestliže změna měřítka nezávisle proměnné $t \mapsto at$ pro každé $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nezmění její tvar. Transformace $t = \mathrm{e}^\tau$ převede danou rovnici na rovnici autonomní (typ 4.2.3).

Uvažujme například lineární homogenní rovnici tvaru

$$x' = \frac{\alpha}{t}x, \quad \text{tj.} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha}{t}x. \tag{4.11}$$

Zavedeme novou nezávisle proměnnou s vztahem $s = at$, kde a je nějaká reálná konstanta. Hledanou funkci x budeme chápat jako funkci proměnné s, která sama je funkcí proměnné t. Vzorec pro derivaci složené funkce dává vyjádření

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}a.$$

Dosazením do rovnice dostaneme

$$a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{a\alpha}{s}x, \quad \text{tj.} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\alpha}{s}x,$$

což je rovnice stejného tvaru jako (4.11), takže tato rovnice je ekvidimensionální v nezávisle proměnné. Její transformace $t = \mathrm{e}^\tau$ převede rovnici (4.11) na tvar

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\alpha}{t}x\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\alpha}{\mathrm{e}^\tau}x\mathrm{e}^\tau = \alpha x,$$

tedy na rovnici autonomní

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \alpha x.$$

Významným případem ekvidimensionální rovnice je rovnice Eulerova vyšetřovaná v 3.2.1.

Kapitola 5

Některé klasické elementární úlohy

V této kapitole je uvedeno několik úloh vedoucích na obyčejné diferenciální rovnice, které lze vyřešit elementárními metodami uvedenými v předchozích kapitolách. Lze ji tedy považovat za jakousi sbírku řešených příkladů.

Úlohy vychází z různých oborů — kinematiky (úlohy 5.1, 5.5), geometrické optiky (Archimédova úloha 5.3), dynamiky (úloha o reaktivním motoru 5.2), kosmologie (jednoduchý model expandujícího Vesmíru 5.9), epidemiologie (model šíření neštovic 5.6), ekonomie (Solowův-Swanův model ekonomického růstu 5.7), teorie řízení (problém „menežmentu obnovitelných zdrojů“ 5.8) nebo psychologie (nepříliš vážně míněná úloha 5.4).

5.1 Traktrisa

Po stole táhneme hodinky na napjatém řetízku délky ℓ tak, že koncem řetízku sledujeme hranu stolu. Na počátku svírá řetízek a hrana stolu úhel $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi]$. Úkolem je určit dráhu hodinek.

Zvolíme orthonormální souřadnou soustavu tak, že svislá osa splývá s hranou stolu a je souhlasně orientovaná se směrem pohybu konce řetízku, viz obr. 5.1. Při této volbě budou hodinky na počátku v bodě $(-\ell \sin\alpha, 0)$. Dráhu hodinek vyjádříme jako graf funkce $y = y(x)$. Hodinky se pohybují ve směru působící síly, síla působí ve směru řetízku. To znamená, že přímka incidentní s řetízkem je tečnou ke grafu funkce y v každém bodě. Směrnice této tečny je tedy rovna

$$y'(x) = \frac{\sqrt{\ell^2 - x^2}}{-x}. \tag{5.1}$$

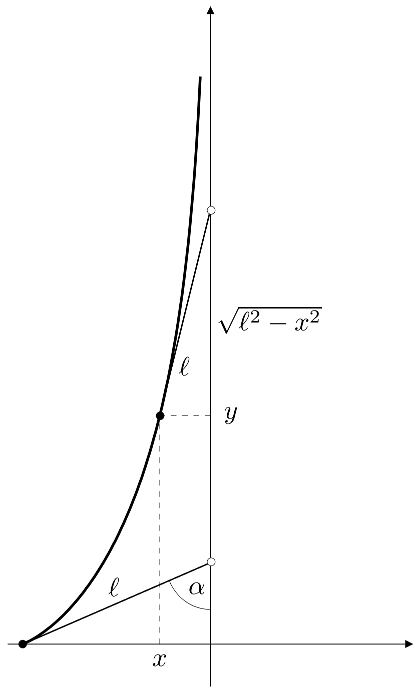
Hledaná funkce je řešením této obyčejné diferenciální rovnice s počáteční podmínkou

$$y(-\ell \sin\alpha) = 0. \tag{5.2}$$

Na pravé straně rovnice (5.1) se nevyskytuje hledaná funkce y, proto můžeme řešení úlohy (5.1), (5.2) bezprostředně psát ve tvaru určitého integrálu

$$y(x) = \int\limits_{-\ell\sin\alpha}^{x} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{-\xi} \mathrm{d}\xi = \left[\ell \ln \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{|\xi|} - \sqrt{\ell^2 - \xi^2} \right]_{\xi=-\ell\sin\alpha}^{x} =$$

$$= \ell \left[\cos\alpha - \sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2}} + \ln \left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - x^2}}{-x} \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} \right) \right].$$



Obrázek 5.1: Traktrisa

Úlohu o dráze hodinek tažených na řetízku po stole zformuloval Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716). Křivku podrobně studoval v roce 1692 Christiaan Huygens, který jí také dal jméno tractrix (z latinského *trahere*, táhnout).

5.2 Ciolkovského rovnice

Pohyb rakety budeme popisovat v souřadné soustavě takové, aby na raketu nepůsobily žádné vnější síly (tedy ve stavu beztíže). Nechť v čase $t_0 = 0$ se raketa pohybuje rychlostí v_0. V čase t_0 se zažehne palivo, které rovnoměrně shoří za čas T a v podobě plynů proudí z trysky na zádi rakety rychlostí u vzhledem k raketě. Úlohou je určit rychlost rakety po provedení popsaného manévru, tedy její rychlost v čase T.

Označme M ... hmotnost rakety na počátku (v čase $t_0 = 0$),
μ ... hmotnost paliva vyhořelého za čas T,
$m = m(t)$ ... hmotnost rakety (s dosud nevyhořelým palivem) v čase t,
$v = v(t)$ ... rychlost rakety v čase t.

Předpoklad o rovnoměrném hoření paliva zapíšeme rovností

$$m(t) = M - \frac{\mu}{T}t = \frac{MT - \mu t}{T}. \tag{5.3}$$

Rychlost v neznáme. Budeme však o ní předpokládat, že je spojitě diferencovatelnou funkcí svého argumentu (času). Hybnost rakety se zbývajícím palivem v čase t je

$$p(t) = m(t)v(t). \tag{5.4}$$

Uvažujme krátký časový interval $[t, t + \Delta t] \subseteq [0, T]$. Během něho shoří palivo o hmotnosti

$$\Delta\mu = \mu(t) - \mu(t + \Delta t) = M - \frac{\mu}{T}t - \Big(M - \frac{\mu}{T}(t + \Delta t)\Big) = \frac{\mu}{T}\Delta t. \tag{5.5}$$

Rychlost vytékajících plynů v souřadné soustavě, v níž pohyb popisujeme, je v čase t rovna $v(t) - u$ a v průběhu intervalu se mění v rozmezí od této hodnoty po hodnotu $v(t + \Delta t) - u$. Hybnost vyhořelého paliva vytrysklého v uvažovaném časovém intervalu proto vyjádříme jako

$$p_P(t, \Delta t) = w(t, \Delta t)\Delta\mu, \tag{5.6}$$

kde $w(t, \Delta t)$ je integrální průměr vytékajících plynů v časovém intervalu délky Δt, tj.

$$w(t, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} \big(v(\tau) - u\big)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} v(\tau)\mathrm{d}\tau - u.$$

Podle první věty o střední hodnotě integrálního počtu existuje číslo $\eta \in (0, 1)$ takové, že

$$\int_t^{t+\Delta t} v(\tau)\mathrm{d}\tau = v(t + \eta\Delta t)\Delta t,$$

takže $w(t, \Delta t) = v(t + \eta\Delta t) - u$. S využitím této rovnosti a rovnosti (5.5) vyjádříme hybnost (5.6) vytékajícího plynu výrazem

$$p_P(t, \Delta t) = \big(v(t + \eta\Delta t) - u\big)\frac{\mu}{T}\Delta t. \tag{5.7}$$

Hybnost rakety v čase $t + \Delta t$ je vzhledem k (5.3) rovna

$$p_R(t + \Delta t) = m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) = \left(M - \frac{\mu}{T}(t + \Delta t)\right) v(t + \Delta t) = \left(m(t) - \frac{\mu}{T}\Delta t\right) v(t + \Delta t).$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě platí

$$v(t + \Delta t) = v(t) + v'(t + \vartheta\Delta t)\Delta t,$$

kde $\vartheta \in (0, 1)$. Dosazením této rovnosti do předchozí dostaneme

$$\begin{aligned} p_R(t + \Delta t) &= \left(m(t) - \frac{\mu}{T}\Delta t\right)\big(v(t) + v'(t + \vartheta\Delta t)\Delta t\big) = \\ &= m(t)v(t) - \left(\frac{\mu}{T}v(t) - m(t)v'(t + \vartheta\Delta t)\right)\Delta(t) - \frac{\mu}{T}v'(t + \vartheta\Delta t)(\Delta t)^2. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Souhrnná hybnost rakety a vyhořelého paliva je v čase $t + \Delta t$ rovna

$$p(t + \Delta t) = p_R(t + \Delta t) + p_P(t, \Delta t).$$

Odtud a z (5.7), (5.8) dostaneme

$$\frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} = \big(v(t + \eta\Delta t) - u - v(t)\big)\frac{\mu}{T} + m(t)v'(t + \vartheta\Delta t) - \frac{\mu}{T}v'(t + \vartheta\Delta t)\Delta t.$$

Limitním přechodem $\Delta t \to 0$ a jednoduchou úpravou vyjádříme derivaci hybnosti soustavy rakety s palivem ve tvaru

$$p'(t) = m(t)v'(t) - u\frac{\mu}{T}.$$

Podle zákona o zachování hybnosti je $p'(t) = 0$, takže s využitím rovnosti (5.3) dostaneme diferenciální rovnici pro neznámou funkci v ve tvaru

$$v'(t) = \frac{\mu u}{MT - \mu t}.$$

Na její pravé straně se nevyskytuje hledaná funkce v, stačí tedy integrovat obě strany rovnice v mezích od 0 po t. S využitím počáteční podmínky $v(0) = v_0$ dostaneme

$$v(t) = v_0 + \int\limits_0^t \frac{\mu u}{MT - \mu\tau} \mathrm{d}\tau = v_0 - u \left[\ln |MT - \mu\tau|\right]_{\tau=0}^t = v_0 + u \ln \frac{MT}{MT - \mu t} = \\ = v_0 + u \ln \left(1 + \frac{\mu t}{MT - \mu t}\right).$$

Zejména pro $t = T$ máme

$$v(T) = v_0 + u \ln \left(1 + \frac{\mu}{M - \mu}\right). \tag{5.9}$$

Tato formule se nazývá *Ciolkovského rovnice.*

Rovnici (5.9) odvodil William Moore ve výzkumné zprávě *A Treatise on the Motion of Rockets* pro Royal Military Academy, Woolwich, England, v roce 1813. Tato práce byla zapomenuta a nezávisle na ní rovnici objevil roku 1898 Konstantin Eduardovič Ciolkovskij. S její pomocí v článku

> Циолковский, К. Е. Изследование мировых пространств реактивными приборами. *Научное обозрѣние.* 1903, годъ X, No. 5

zdůvodnil, že rakety mohou létat naprosto nezávisle na okolním prostředí, a proto mohou být vhodným prostředkem pro lety do vesmíru.

5.3 Archimédova úloha

Určete tvar zrcadla, které odráží rovnoběžné světelné paprsky do jediného bodu (ohniska).

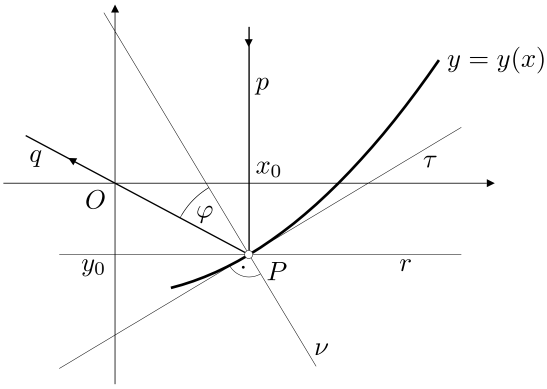
Zvolíme souřadnou soustavu tak, aby ohnisko bylo v jejím počátku O, přicházející paprsky byly rovnoběžné se svislou osou a směřovaly proti její orientaci (kreslete si obrázek 5.2). Uvažujme přicházející paprsek p, který se od zrcadla odráží v libovolném, ale pevně zvoleném bodě $P = (x_0, y_0)$, $x_0 > 0$, $y_0 < 0$. Nechť tvar zrcadla je v okolí tohoto bodu popsán funkcí $y = y(x)$; přitom samozřejmě $y(x_0) = y_0$.

Označme τ, resp. ν, tečnu, resp. normálu, k zrcadlu v bodě P, q přímku incidentní s odraženým paprskem PO, r vodorovnou přímku procházející bodem P. Nechť dále $\varphi = \sphericalangle\nu q$ je úhel, který svírá odražený paprsek s normálou ν. Úhel odrazu se rovná úhlu dopadu a tedy $\sphericalangle p\nu = \varphi$. Odtud plyne, že $\sphericalangle p\tau = \frac{1}{2}\pi - \varphi$. Dále platí $\sphericalangle r\tau = \frac{1}{2}\pi - \sphericalangle p\tau = \varphi$. Poněvadž τ je tečnou ke křivce o rovnici $y = y(x)$, platí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = \mathrm{tg}(\sphericalangle r\tau) = \mathrm{tg}\,\varphi. \tag{5.10}$$

Poněvadž přímky p a r jsou kolmé, je $\sphericalangle qr = \frac{1}{2}\pi - \sphericalangle p\nu - \sphericalangle\nu q = \frac{1}{2}\pi - 2\varphi$ a tedy

$$\mathrm{tg}(\sphericalangle qr) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) = \mathrm{cotg}(2\varphi) = \frac{1 - (\mathrm{tg}\,\varphi)^2}{2\,\mathrm{tg}\,\varphi}. \tag{5.11}$$



Obrázek 5.2: K Archimédově úloze: $y = y(x)$ – zrcadlo, p – přicházející paprsek, q – odražený paprsek, P – bod dopadu a odrazu paprsku, O – ohnisko, τ – tečna k zrcadlu v bodě dopadu přicházejícího paprsku, ν – normála k zrcadlu, φ –úhel odrazu.

Současně

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle qr) = \frac{|y_0|}{x_0} = -\frac{y_0}{x_0}. \tag{5.12}$$

Spojením (5.10), (5.11) a (5.12) dostaneme rovnost

$$-\frac{y_0}{x_0} = \frac{1 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)\right)^2}{2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)}.$$

Poněvadž bod $P = (x_0, y_0)$ byl libovolný, dostáváme pro tvar zrcadla diferenciální rovnici

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 1 = 2\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

To je rovnice nerozřešená vzhledem k derivaci. Jedná se však o jednoduchou kvadratickou rovnici pro neznámou derivaci, takže ji můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}\,.$$

Pro $y < 0$ a $x > 0$ je $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0$, viz obrázek 5.2. Znaménko před odmocninou tedy musí být $+$. Dostáváme tak diferenciální rovnici pro tvar požadovaného zrcadla

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}\,.$$

To je rovnice homogenní. Substitucí $u = u(x) = \frac{y(x)}{x}$, tedy $y(x) = xu(x)$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ dostaneme rovnici se separovanými proměnnými. Její řešení v implicitním tvaru je

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

tedy $\ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right| = \ln|x| + const.$ Odtud

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{C} - \frac{C}{x}\right),$$

kde C je integrační konstanta. V původních proměnných dostaneme rovnost

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{C} - C\right),$$

neboli $x^2 = C(C+2y)$. To je rovnice paraboly s ohniskem $(0,0)$ a řídící přímkou $x = -C$.

Název „Archimédova úloha“ vychází z tradované historky, podle níž Archimédes při obléhání Syrakus armádou římského vojevůdce Marcella v letech 214–212 př. n. l. z vyleštěných štítů obránců města sestavoval zrcadla, kterými soustředil sluneční paprsky a tak zapaloval lodě obléhatelů impregnované smolou.

5.4 Romeo a Julie

Romeo na plese zahlédl Julii a na první pohled se do ní zamiloval. Svoji zamilovanost začal Julii dávat najevo a tak se i ona do něho zamilovala. Pokusíme se popsat vývoj jejich citů, pokud by nedošlo k tragédii popsané Williamem Shakespearem.

Předpokládejme, že cit lze nějak kvantifikovat a označme $r = r(t)$ Romeův cit k Julii a $j = j(t)$ Juliin cit k Romeovi v čase t. Cit s kladným znaménkem budeme interpretovat jako okouzlení nebo zamilovanost[1], cit se záporným znaménkem jako odpor nebo nechuť. Romeův cit samozřejmě závisí na Juliině odezvě a současně je citem renesančního kavalíra, tedy dobyvatele: čím více náklonnosti Julie projevuje, tím je pro dobyvatele Romea méně přitažlivá. Tento jev vyjádříme tak, že Romeův cit k Julii se zmenšuje, pokud její k němu je kladný. V prvním přiblížení budeme změnu Romeova citu k Julii, tj. derivaci funkce r, považovat za úměrnou Juliinu citu k Romeovi se záporným koeficientem úměrnosti. Formálně to zapíšeme rovností

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -aj, \tag{5.13}$$

kde a je kladná konstanta. Naopak Juliin cit k Romeovi je povzbuzován Romeovými projevy náklonnosti. Touto úvahou dostaneme rovnici pro Juliin cit v prvním přiblížení jako

$$\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t} = br, \tag{5.14}$$

kde $b > 0$. Na počátku se Romeo zamiloval a Julie o něm ani nevěděla, její cit k Romeovi byl nulový. Romeovu zamilovanost budeme považovat za jednotkový kladný cit. Dostáváme tak podmínky

$$r(0) = 1, \quad j(0) = 0. \tag{5.15}$$

[1]Používáme slovo „zamilovanost“, nikoliv „láska“. Láska totiž není jen citem, ale je z velké míry i záležitostí rozhodnutí a vůle; nelze ji proto jednoduše popisovat nějakým „přírodovědeckým“ způsobem. Samotný cit však lze do jisté míry biologickými nebo chemickými termíny popsat a proto ho lze i matematicky modelovat.

Diferenciální rovnice (5.13), (5.14) s počátečními podmínkami (5.15) představují model vývoje Romeových a Juliiných citů. Jedná se o homogenní systém dvou lineárních rovnic s konstantními koeficienty a lze ho tedy vyřešit metodami popsanými v 3.4.1, konkrétně dosazovací metodou popsanou na str. 3.4.1.

Derivováním rovnice (5.13) a dosazením z rovnosti (5.14) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -a\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t} = -abr.$$

Vývoj Romeova vztahu k Julii je tedy popsán homogenní lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} + abr = 0. \tag{5.16}$$

Příslušná charakteristická rovnice $\lambda^2 + ab = 0$ má dva různé ryze komplexní kořeny $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}\sqrt{ab}$. Obecné řešení rovnice (5.16) tedy je tvaru

$$r(t) = A\cos\left(\sqrt{ab}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{ab}\,t\right).$$

Řešení musí splňovat počáteční podmínky (5.15), tedy

$$r(0) = 1, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(0) = -aj(0) = 0.$$

Odtud dostaneme $A = 1$, $B = 0$, takže $r(t) = \cos\left(\sqrt{ab}\,t\right)$ a podle rovnosti (5.13) dále platí

$$j(t) = -\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{a}\sqrt{ab}\,\sin\left(\sqrt{ab}\,t\right) = \sqrt{\frac{b}{a}}\,\sin\left(\sqrt{ab}\,t\right).$$

Model (5.13), (5.14), (5.15) vývoje citů veronských milenců tedy předpovídá, že Romeovy city k Julii by periodicky kolísaly mezi zamilovaností a zhnusením, stejně tak Juliiny city k Romeovi. Pozitivní city k sobě navzájem mohou prožívat pouze na začátku příběhu, konkrétně do času

$$t = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}.$$

Shakespearovo řešení konfliktu tedy není tragédií, ale dobrým koncem. Kdyby příběh probíhal v neomezeném čase, pak pouze čtvrtinu z něho prožívají Romeo s Julií ve vzájemné náklonnosti, čtvrtinu ve vzájemném odporu a polovinu času s city rozdílnými. Povšimněme si ještě, že v případě $b > a$ kolísají Juliiny city s větší amplitudou než Romeovy, v případě $b < a$ je tomu naopak. Jinak řečeno, větším výkyvům citů (většímu utrpení?) je vystaven ten z dvojice, který je citově závislejší.

Vývoj citů lze modelovat i obecněji. Předpokládejme, že také úroveň vlastního citu ovlivňuje změnu tohoto citu. Můžeme tedy uvažovat model tvořený systémem rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \alpha_1 r - aj, \\ \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t} &= br + \alpha_2 j, \end{aligned} \tag{5.17}$$

s počáteční podmínkou

$$r(0) = 1, \; j(0) = 0.$$

Záporný koeficient α_1 může vyjadřovat, že Romeo se svých citů bojí, nechce ztrácet vnitřní klid; kladný koeficient α_1 může znamenat, že se Romeo svými city nechá vést. Koeficient α_1 lze tedy považovat za jakési „umístění Romea na ose racionalita-romantismus“; koeficient α_2 lze interpretovat podobně pro Julii.

Modely vývoje milostných citů (5.13), (5.14) a (5.17) publikoval Steven H. Strogatz v článku

STROGATZ, S. H. Love affairs and differential equations. *Mathematics Magazine.* 1988, Vol. 61, No. 1, p. 35.

Účelem článku ovšem nebylo vytvořit matematickou teorii zamilovanosti, ale navrhnout neobvyklý a pokud možno atraktivní způsob výkladu klasické látky – systému dvou obyčejných lineárních diferenciálních rovnic.

5.5 „Psí křivka“

Pes pronásleduje zajíce. Zajíc se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí u, pes běží ve směru k zajíci rovnoměrnou rychlostí v, $v > u$. Určete tvar dráhy psa a čas T, za který pes zajíce dohoní.

Zvolíme orthonormální souřadnou soustavu tak, aby se zajíc pohyboval po druhé ose souhlasně s její orientací a na počátku, tj. v čase $t_0 = 0$, se zajíc nacházel v bodě $(0, b)$ a pes v bodě $(-a, 0)$. Nechť pro určitost je $a > 0$; případ $a = 0$ je triviální a v případě $a < 0$ bude tvar dráhy zřejmě obrazem tvaru pro $a > 0$ v osové symetrii kolem druhé souřadné osy.

Situace je znázorněna na obr. 5.3 a). Dráhu psa vyjádříme jako funkci $y = y(x)$. V čase $t = 0$ je $x = -a$ a $y = 0$, tj.

$$y(-a) = 0. \tag{5.18}$$

Pes k zajíci směřuje od začátku, tj.

$$y'(-a) = \frac{b}{a}. \tag{5.19}$$

V jistém čase t, $t < T$, se pes nachází v bodě (x, y), $x \in (-a, 0)$, a zajíc v bodě $(0, b + ut)$. Poněvadž pes stále směřuje k zajíci, platí

$$y'(x) = \frac{b + ut - y(x)}{|x|} = \frac{y(x) - b - ut}{x},$$

neboli

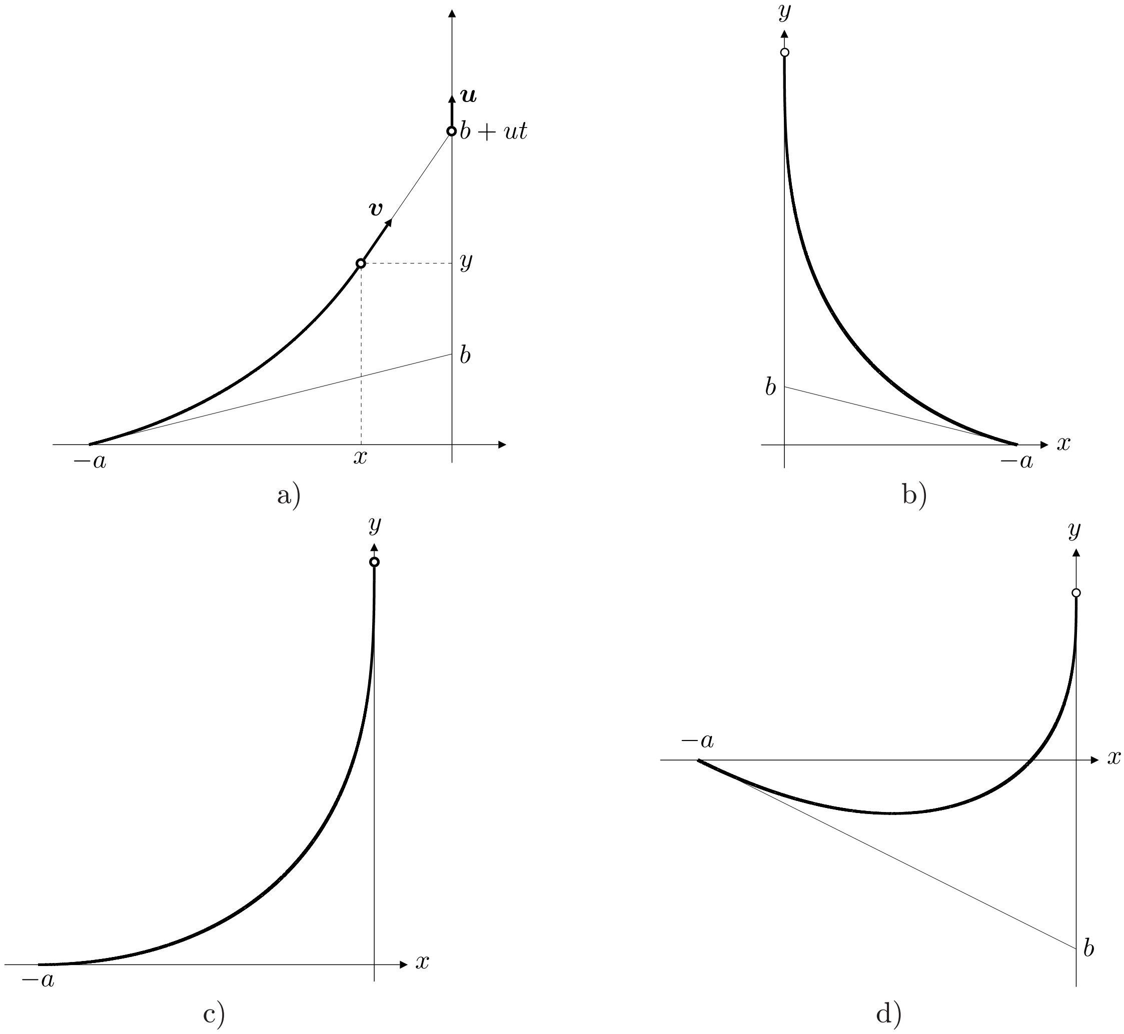
$$ut = y - xy'(x) - b. \tag{5.20}$$

Za čas t urazí pes dráhu délky vt. Této hodnotě tedy musí být rovna délka křivky (grafu funkce) $y = y(x)$ od bodu $(-a, 0)$ po bod (x, y), tedy

$$vt = \int_{-a}^{x} \sqrt{1 + \left(y'(\xi)\right)^2}\, \mathrm{d}\xi.$$

Z této rovnosti vyjádříme t a dosadíme do (5.20),

$$\frac{u}{v} \int_{-a}^{x} \sqrt{1 + \left(y'(\xi)\right)^2}\, \mathrm{d}\xi = y(x) - xy'(x) - b. \tag{5.21}$$



Obrázek 5.3: a) K odvození rovnice „psí křivky“. Vektor rychlosti zajíce $\boldsymbol{u}$ má v každém okamžiku souřadnice $(0, u)$, vektor rychlosti psa $\boldsymbol{v}$ má v každém okamžiku velikost v a v čase t směřuje k zajíci, tj. je rovnoběžný s vektorem o souřadnicích $(|x|, b + ut - y)$.
b) „Psí křivka“ pro $a < 0$, $b > 0$.
c) „Psí křivka“ pro $a > 0$, $b = 0$.
d) „Psí křivka“ pro $a > 0$, $b < 0$.

Označíme
$$s = \frac{u}{v}. \tag{5.22}$$
Podle předpokladu je $s < 1$. Obě strany rovnosti (5.21) zderivujeme podle x. Dostaneme
$$s\sqrt{1 + \big(y'(x)\big)^2} = y'(x) - y'(x) - xy''(x)$$
a po úpravě
$$xy''(x) + s\sqrt{1 + \big(y'(x)\big)^2} = 0. \tag{5.23}$$
Dráha psa je tedy řešením neautonomní nelineární diferenciální rovnice druhého řádu (5.23) s počátečními podmínkami (5.18), (5.19).

Rovnice (5.23) je typu 4.2.2. Proto zavedeme novou neznámou funkci $p = p(x) = y'(x)$. Dosadíme ji do rovnice (5.23) a počáteční podmínky (5.19). Po snadné úpravě dostaneme počáteční úlohu
$$p' = -\frac{s}{x}\sqrt{1 + p^2}, \qquad p(-a) = \frac{b}{a}.$$
Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými. Řešení úlohy v implicitním tvaru tedy podle 1.1.3 je
$$\int\limits_{\frac{b}{a}}^{p} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} = -s\int\limits_{-a}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}.$$
Integrací dostaneme
$$\ln \frac{a\left(p + \sqrt{1+p^2}\right)}{b + \sqrt{a^2+b^2}} = \ln\left(-\frac{a}{x}\right)^s$$
a odtud
$$p = \frac{1}{2C}\left(C^2\left(-\frac{a}{x}\right)^s - \left(-\frac{x}{a}\right)^s\right),$$
kde
$$C = \frac{b}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{5.24}$$
Poněvadž $p = y'$ a funkce y splňuje podmínku (5.18), dostaneme řešení úlohy integrací poslední rovnosti, tedy
$$y(x) = \frac{1}{2C}\int\limits_{-a}^{x}\left(C^2\left(-\frac{a}{\xi}\right)^s - \left(-\frac{\xi}{a}\right)^s\right)\mathrm{d}\xi =$$
$$= \frac{Ca}{2(1-s)}\left(1 - \left(-\frac{x}{a}\right)^{1-s}\right) - \frac{a}{2C(1+s)}\left(1 - \left(-\frac{x}{a}\right)^{1+s}\right).$$
Za konstanty s a C dosadíme z rovností (5.22) a (5.24). Po úpravách dostaneme „psí křivku“ ve tvaru
$$y(x) = \frac{v\left(vb + u\sqrt{a^2+b^2}\right)}{v^2-u^2} - \frac{v}{2}\left(\frac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{v+u}\left|\frac{x}{a}\right|^{1+\frac{u}{v}} + \frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{v-u}\left|\frac{x}{a}\right|^{1-\frac{u}{v}}\right).$$

Nalezená funkce y je sudá, vyjadřuje tedy tvar dráhy psa pro $a > 0$ i pro $a < 0$; v prvním případě bychom za definiční obor považovali interval $[-a, 0]$, ve druhém interval $[0, -a]$.

Pes dostihne zajíce v bodě $\big(0, y(0)\big)$. To znamená, že zajíc rychlostí u urazí dráhu délky $y(0) - b$ a čas, za který pes zajíce dohoní, je tedy roven

$$T = \frac{y(0) - b}{u} = \frac{1}{u}\left(\frac{v\left(vb + u\sqrt{a^2 + b^2}\right)}{v^2 - u^2} - b\right) = \frac{ub + v\sqrt{a^2 + b^2}}{v^2 - u^2}.$$

„Psí křivku“ („courbe chien“) jako první studoval v roce 1732 francouzský matematik Pierre Bouger (ten je známější jako účastník expedice do Peru v roce 1735, která změřila délku jednoho stupně zeměpisné délky na rovníku). Křivka je nejjednodušším případem křivek sledování (pursuit curves, pojem poprvé použil George Boole ve svém spisu „Treatise on Differential equations“ v roce 1859), které jsou definovány takto: jestliže body A a P se pohybují rovnoměrně, bod A po dané křivce a směr pohybu bodu P stále míří k bodu A, pak bod P opisuje křivku sledování.

Úloha bývá někdy formulována tak, že pes sleduje svého pána, nebo že liška honí králíka.

5.6 Epidemiologický model Daniela Bernoulliho

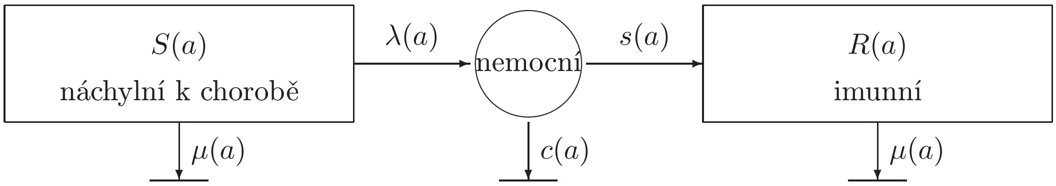
Uvažujme chorobu, která trvá krátce, někteří pacienti na ni zemřou, jiní se uzdraví a získají vůči nákaze imunitu; typickým představitelem takové infekce byly neštovice. Budeme modelovat epidemii této choroby, tj. její šíření v nějaké kohortě. Kohortou rozumíme skupinu osob narozených ve stejnou dobu.

Zavedeme označení: N počet osob zahrnutých do kohorty, a jejich věk (tj. čas od počátku), $S = S(a)$, resp. $R = R(a)$ počet osob věku a, které neprodělaly, resp. prodělaly, chorobu. Při tomto označení je $N = S(0) + R(0) = S(0)$, neboť novorozenci chorobu neprodělali, tj. $R(0) = 0$. Další symboly zavedeme na základě následujících předpokladů:

- Počet osob věku a, které zemřou z jiných příčin, než je uvažovaná infekce, je úměrná délce (krátkého) časového intervalu sledování Δa a počtu nenakažených osob $S(a)$. Konstantu úměrnosti — *přirozenou úmrtnost* ve věku a — označíme $\mu(a)$.
- Počet osob věku a, které se nakazí uvažovanou chorobou je úměrná délce sledování Δa a počtu $S(a)$ osob, které dosud chorobu neprodělaly a jsou tedy citlivé na infekci. Koeficient úměrnosti — *incidenci choroby* ve věku a — označíme $\lambda(a)$
- Počet nemocných osob věku a, které se uzdraví za časový interval Δa je úměrný počtu infikovaných osob tohoto věku a délce intervalu Δa. Koeficient úměrnosti — *index přežití* choroby osobami věku a — označíme $s(a)$.

Úmrtnost $\mu(a)$ lze interpretovat jako pravděpodobnost, že „zdravá“ osoba (tj. ta, která nemá uvažovanou chorobu) věku a zemře během časového intervalu délky Δa; incidenci $\lambda(a)$ jako pravděpodobnost, že se „zdravá“ osoba věku a, která není imunní vůči uvažované chorobě, nakazí během časového intervalu délky Δa; ukazatel přežití $s(a)$ jako pravděpodobnost, že nakažená osoba věku a se během časového intervalu délky Δa uzdraví. Budeme předpokládat, že onemocnění a uzdravení jsou jevy nezávislé, tj. že pravděpodobnost, že osoba citlivá k infekci se během časového intervalu délky Δa nakazí a uzdraví, je rovna $s(a)\lambda(a)$. Dále zavedeme *letalitu choroby* ve věku a vztahem

$$c(a) = 1 - s(a);$$



Obrázek 5.4: Schéma vývoje kohorty ohrožené chorobou

lze ji interpretovat jako pravděpodobnost, že nemocná osoba věku a během časového intervalu délky Δa zemře. Proměnné

$$u = u(a) = \frac{S(a)}{N}, \quad \text{resp. } w = w(a) = \frac{R(a)}{N}$$

vyjadřují (klasickou) pravděpodobnost, že osoba se dožila věku a a neprodělala, resp. prodělala, chorobu. Novorozenec určitě chorobu neprodělal, tedy platí

$$u(0) = 1, \quad w(0) = 0. \tag{5.25}$$

Vývoj kohorty, v níž probíhá choroba, lze schematicky znázornit obrázkem 5.4 a předpoklady vyjádřit ve tvaru rovností:

$$S(a+\Delta a) = S(a) - \mu(a)S(a)\Delta a - \lambda(a)S(a)\Delta a = S(a) - \big(\mu(a)+\lambda(a)\big)S(a)\Delta a,$$

$$\begin{aligned} R(a+\Delta a) = R(a) + s(a)\lambda(a)S(a)\Delta a - \mu(a)R(a)\Delta a = \\ = R(a) + \big(1-c(a)\big)\lambda(a)S(a)\Delta a - \mu(a)R(a)\Delta a. \end{aligned}$$

V první z uvedených rovností převedeme na levou stranu $S(a)$ a ve druhé z nich $R(a)$, rovnosti vydělíme výrazem $N\Delta a$ a provedeme limitní přechod $\Delta a \to 0$. Pro zjednodušení modelu budeme předpokládat, že funkce u a w jsou diferencovatelné; takový předpoklad je v případě velké kohorty dostatečně realistický. Dostaneme tak systém neautonomních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a} &= -\big(\mu(a)+\lambda(a)\big)u, \\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}a} &= \big(1-c(a)\big)\lambda(a)u \ - \mu(a)w; \end{aligned} \tag{5.26}$$

jejich řešení splňuje počáteční podmínky (5.25).

První rovnice systému (5.26) je lineární homogenní rovnicí pro neznámou funkci u. Její řešení s počáteční podmínkou (5.25) je při označení

$$M(a) = \int_0^a \mu(\alpha)\mathrm{d}\alpha, \quad \Lambda(a) = \int_0^a \lambda(\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{5.27}$$

podle 1.3 rovno

$$u(a) = \mathrm{e}^{-\Lambda(a)-M(a)}. \tag{5.28}$$

Toto vyjádření dosadíme do druhé rovnice systému (5.26) a dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}a} = -\mu(a)w + \big(1-c(a)\big)\lambda(a)\mathrm{e}^{-\Lambda(a)-M(a)},$$

což je lineární nehomogenní rovnice pro neznámou funkci w. Její řešení s počáteční podmínkou (5.25) je opět podle 1.3 rovno

$$w(a) = \mathrm{e}^{-M(a)} \left(1 - \int_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)} \mathrm{d}\alpha \right) - \mathrm{e}^{-\Lambda(a)-M(a)}. \tag{5.29}$$

Dosud provedené úvahy a výpočty lze shrnout: Pravděpodobnosti $u(a)$, resp. $w(a)$, že se osoba dožije věku a a neprodělá, resp. prodělá, chorobu, jsou řešením soustavy rovnic (5.26) s počátečními podmínkami (5.25) a jsou dány výrazy (5.28), resp. (5.29), kde funkce M a Λ jsou dány výrazy (5.27).

Pravděpodobnost, že se osoba dožije věku a za předpokladu, že choroba se v kohortě neobjevuje (tj. $\lambda \equiv 0$ a v důsledku toho také $\Lambda \equiv 0$), je rovna přímo funkci u s $\Lambda \equiv 0$, tj.

$$\ell_0(a) = \mathrm{e}^{-M(a)}.$$

Pravděpodobnost, že se osoba dožije věku a pokud se choroba vyskytuje, je rovna

$$\ell(a) = u(a) + w(a) = \mathrm{e}^{-M(a)} \left(1 - \int_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)} \mathrm{d}\alpha \right) = \\ = \ell_0(a) \left(1 - \int_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)} \mathrm{d}\alpha \right).$$

Pravděpodobnost dožití věku a je tedy součinem pravděpodobnosti dožití věku a při přirozené úmrtnosti a faktoru, který závisí pouze na incidenci a letalitě choroby.

Označme dále

$$x(a) = \frac{u(a)}{\ell(a)}, \quad z(a) = \frac{w(a)}{\ell(a)} = \frac{\ell(a) - u(a)}{\ell(a)} = 1 - x(a);$$

Veličina $x(a)$, resp. $z(a)$, vyjadřuje podmíněnou pravděpodobnost, že osoba věku a neprodělala, resp. prodělala, chorobu za podmínky, že se věku a dožila.

Poněvadž

$$x(a) = \frac{\mathrm{e}^{-\Lambda(a)-M(a)}}{\mathrm{e}^{-M(a)} \left(1 - \int\limits_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)} \mathrm{d}\alpha \right)} = \frac{\mathrm{e}^{-\Lambda(a)}}{1 - \int\limits_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)} \mathrm{d}\alpha}, \tag{5.30}$$

platí rovnost $x(0) = 1$ a dále

$$\frac{\mathrm{d}x(a)}{\mathrm{d}a} = \frac{-\lambda(a)\mathrm{e}^{-\Lambda(a)} \left(1 - \int\limits_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)} \mathrm{d}\alpha \right) + \mathrm{e}^{-\Lambda(a)} c(a)\lambda(a)\mathrm{e}^{-\Lambda(a)}}{\left(1 - \int\limits_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)} \mathrm{d}\alpha \right)^2} = \\ = -\lambda(a) \left(\frac{\mathrm{e}^{-\Lambda(a)}}{1 - \int\limits_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)} \mathrm{d}\alpha} - \frac{c(a)\mathrm{e}^{-2\Lambda(a)}}{\left(1 - \int\limits_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)} \mathrm{d}\alpha \right)^2} \right) = \\ = -\lambda(a)x(a)\big(1 - c(a)x(a)\big).$$

Relativní zastoupení osob věku a, které v uvažované kohortě neprodělaly chorobu, je tedy veličina $x(a)$ daná formulí (5.30), která je současně řešením počáteční úlohy pro Bernoulliovu rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a} = -\lambda(a)x\big(1 - c(a)x\big), \quad x(0) = 1. \tag{5.31}$$

Vývoj zastoupení osob, které neprodělaly chorobu, tedy nezávisí na přirozené úmrtnosti μ. Úlohu (5.31) můžeme vyřešit metodami popsanými v 1.4 a přesvědčit se, že řešení je stejné jako (5.30), nebo podrobněji

$$x(a) = \frac{\mathrm{e}^{\int_a^0 \lambda(\alpha)\mathrm{d}\alpha}}{1 - \int_0^a \lambda(\xi)c(\xi)\mathrm{e}^{\int_a^\xi \lambda(\alpha)\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}\xi}.$$

Zejména pro incidenci choroby a letalitu choroby nezávislé na věku dostaneme

$$x(a) = \frac{1}{c + (1-c)\mathrm{e}^{\lambda a}}.$$

Poznamenejme ještě, že v teorii přežití se funkce ℓ_0, μ, M nazývají *funkce přežití, riziková funkce* a *kumulativní riziková funkce* (v uvedeném pořadí). Pokud

$$\lim_{a\to\infty} M(a) = \int_0^\infty \mu(a)\mathrm{d}a = \infty,$$

pak pro funkci přežití platí

$$\ell_0(a) = 1 - F(a),$$

kde F je distribuční funkce náhodné veličiny „věk dožití jedince z kohorty“.

Uvedený model šíření epidemie neštovic publikoval Daniel Bernoulli (1700–1782) v článku

Bernoulli, D. Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. *Hist. Acad R. Sci. Paris.* 1760/1766, p.1–45.

v němž hledal odpověď na otázku, zda zavádět očkování proti neštovicím, přestože tato operace někdy končí smrtí.

Na základě tabulek úmrtí, které publikoval královský astronom Edmond Haley (1656–1742)

Halley E. An estimate of the degrees of the mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives. *Phil. Trans. Roy. Soc. London.* 1693, vol. 17, p. 596–610.

odhadl D. Bernoulli hodnoty incidence a letality neštovic nezávislé na věku jako $\lambda = \frac{1}{8}$, $c = \frac{1}{8}$; skutečnost, že mu koeficienty vyšly stejné, je náhoda.

5.7 Ekonomický růst (Solowův-Swanův neoklasický model)

Budeme se snažit popsat dynamiku (vývoj v čase) základních makroekonomických ukazatelů v uzavřené ekonomice, tj. v ekonomice, v níž nedochází k žádné výměně s okolními ekonomikami (k exportu nebo importu). Za základní ukazatele budeme považovat:

$Y = Y(t)$ ... hrubý domácí produkt v čase t.

$K = K(t)$ ... kapitál v čase t. Kapitálem budeme rozumět nejen kapitál finanční, tj. peníze, ale také kapitál hmotný, tj. budovy, stroje, zařízení ap. Celkové množství kapitálu lze však vyjádřit pomocí peněžní jednotky.

$L = L(t)$ ... disponibilní pracovní síla v čase t. Lze si ji představit jako množství práceschopného (nebo práceochotného) obyvatelstva.

$I = I(t)$ ... investice v čase t, tj. peněžní prostředky použité k tvorbě nebo obnově kapitálu.

$S = S(t)$ ... spotřeba v čase t. Za spotřebu budeme považovat peněžní prostředky k tvorbě nebo obnově kapitálu nevyužité, tj. nejen realizovanou spotřebu ale také např. vládní výdaje nebo úspory obyvatelstva.

Vyjdeme z několika jednoduchých a z ekonomického hlediska přijatelných předpokladů:

P1) Jedinými produkčními faktory jsou kapitál a práce.

P2) Kapitál se vytváří investicemi.

P3) Kapitál se amortizuje (znehodnocuje) tak, že poměr znehodnoceného kapitálu za jednotku času ke všemu kapitálu je konstantní.

P4) Relativní přírůstek pracovní síly v čase je konstantní; v podstatě odpovídá přirozenému přírůstku obyvatel.

P5) Sklon ke spotřebě, tj. podíl spotřebovaného produktu, je v čase konstantní.

P6) Veškerý produkt se rozdělí na investice a spotřebu.

P2) a P6) nejsou ve vlastním smyslu předpoklady, je jimi pouze specifikováno, co se rozumí pojmy „investice“ a „spotřeba“.

Základní makroekonomické ukazatele budeme považovat za nezáporné diferencovatelné funkce definované na intervalu $[0, \infty)$, tj. zajímá nás vývoj od jistého okamžiku do budoucnosti. Nyní můžeme předpoklady vyjádřit matematicky:

P1) Produkce je funkcí kapitálu a práce, tj.

$$Y(t) = f\big(K(t), L(t)\big), \tag{5.32}$$

kde $f : [0, \infty)^2 \to [0, \infty)$ je nějaká diferencovatelná funkce rostoucí v každé ze svých proměnných. Nazýváme ji *produkční funkce.*

P2) Množství kapitálu vytvořeného za časový interval délky Δt, tj. od času t po čas $t + \Delta t$, je úměrné množství investic $I(t)$ a času investování Δt, tj. je roven hodnotě

$$\frac{1}{\kappa} I(t) \Delta t,$$

kde $\kappa > 0$ je nějaká konstanta. Vyjadřuje čas, za který se z jednotkové investice vytvoří jednotkové množství kapitálu. Většinou se volí $\kappa = 1$, tedy že investice je totéž, co vytvořený kapitál.

P3) Označme a množství kapitálu amortizovaného za jednotku času. Pak pro každý čas t platí

$$\frac{a}{K(t)} = \delta,$$

kde δ je nějaká nezáporná konstanta, kterou nazveme *mírou amortizace*. Ta bývá vyjádřena pomocí odpisů. Za časový interval délky Δt se amortizuje $a\Delta t$ kapitálu, takže množství kapitálu znehodnoceného za interval délky Δt je rovno

$$\delta K(t)\Delta t.$$

P4) Relativní přírůstek λ pracovní síly za jednotku času je konstantní, takže relativní přírůstek pracovní síly za časový interval délky Δt je roven $\lambda\Delta t$, tj.

$$\frac{L(t+\Delta t) - L(t)}{L(t)} = \lambda\Delta t.$$

P5) Existuje konstanta s nazývaná *mezní sklon ke spotřebě* taková, že pro každé $t \geq 0$ je

$$\frac{S(t)}{Y(t)} = s.$$

P6) V každém čase t platí

$$Y(t) = I(t) + S(t). \tag{5.33}$$

Dále potřebujeme specifikovat produkční funkci f. Budeme tedy ještě předpokládat:

P7) Ke zdvojnásobení produkce je potřeba dvojnásobného kapitálu i dvojnásobné pracovní síly. Obecněji, ke zvětšení produkce o $q\%$ je potřeba zvětšit kapitál i pracovní sílu také o $q\%$. Matematicky,

$$f(\beta K, \beta L) = \beta f(K, L) \tag{5.34}$$

pro každou konstantu $\beta > 0$; jinak řečeno, produkční funkce f je homogenní prvního řádu.

P8) Není-li v ekonomice žádný kapitál, tak jakékoliv jeho přidání způsobí veliký nárůst produkce; přesněji, mezní produkt kapitálu roste do nekonečna, pokud se množství kapitálu v ekonomice přibližuje k nule. Je-li v ekonomice nadbytek kapitálu, tak jeho zvětšení již nezpůsobí významný nárůst produkce; přesněji, mezní produkt kapitálu klesá k nule, pokud jeho množství v ekonomice neomezeně roste. Analogické vztahy jsou mezi produkcí a prací. Tyto předpoklady zapíšeme ve tvaru

$$\lim_{K\to 0+} \frac{\partial f}{\partial K}(K, L) = \infty \text{ pro } L > 0, \qquad \lim_{L\to 0+} \frac{\partial f}{\partial L}(K, L) = \infty \text{ pro } K > 0,$$

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\partial f}{\partial K}(K, L) = 0, \qquad \lim_{L\to\infty} \frac{\partial f}{\partial L}(K, L) = 0;$$

nazýváme je *Inadovy podmínky*.

Nyní již můžeme sestavit rovnice popisující vývoj makroekonomických ukazatelů. Podle P2) a P3) je kapitál v čase $t + \Delta t$ roven

$$K(t+\Delta t) = K(t) + \frac{1}{\kappa} I(t)\Delta t - \delta K(t)\Delta t.$$

Odtud dostaneme
$$\frac{K(t+\Delta t)-K(t)}{\Delta t}=\frac{1}{\kappa}I(t)-\delta K(t)$$
a limitním přechodem $\Delta t \to 0$ získáme diferenciální rovnici
$$K'=\frac{1}{\kappa}I-\delta K. \tag{5.35}$$
Tímtéž limitním přechodem dostaneme po snadné úpravě z předpokladu P4) diferenciální rovnici
$$L'=\lambda L. \tag{5.36}$$
Z předpokladu P6) máme $1=\dfrac{I(t)}{Y(t)}+\dfrac{S(t)}{Y(t)}$ a dále s využitím předpokladu P5) dostaneme
$$I(t)=(1-s)Y(t). \tag{5.37}$$
Systém dvou diferenciálních rovnic (5.35), (5.36) spolu s omezujícími rovnostmi (5.32), (5.37) lze považovat za matematický model dynamiky produkce, kapitálu a práce.

Model (5.35), (5.36), (5.32), (5.37) můžeme ještě dále upravit. Zavedeme veličinu $k=k(t)$ vztahem
$$k(t)=\frac{K(t)}{L(t)}; \tag{5.38}$$
nazýváme ji *míra vybavenosti práce kapitálem.* Z rovností (5.32) a (5.34) dostaneme
$$Y(t)=f\big(K(t),L(t)\big)=L(t)f\left(\frac{K(t)}{L(t)},1\right)=L(t)f\big(k(t),1\big).$$
Výraz $f(k,1)$ se nazývá *intenzivní tvar produkční funkce.* Derivováním vztahu $K=Lk$ definujícího vybavenost práce kapitálem dostaneme $K'=L'k+Lk'$. Po dosazení z rovnic (5.36), (5.35) máme
$$\frac{1}{\kappa}I-\delta K=\lambda Lk+Lk'.$$
Za proměnnou I nejprve dosadíme z rovnosti (5.37) a pak za proměnnou Y z rovnosti (5.32). Dostaneme tak
$$\frac{1-s}{\kappa}Lf(k,1)-\delta K=\lambda Lk+Lk'.$$
Po vydělení hodnotou L máme
$$\frac{1-s}{\kappa}f(k,1)-\delta k=\lambda k+k'.$$
Odtud vyjádříme derivaci k' a dostaneme *základní dynamickou rovnici neoklasického modelu*
$$k'=-(\lambda+\delta)k+\frac{1-s}{\kappa}f(k,1). \tag{5.39}$$
Připomeňme, že obvykle se volí $\kappa=1$, tj. že investice představují nově vytvořený kapitál.

Řešení základní rovnice s Cobbovou-Douglasovou produkční funkcí

V základní rovnici stále zůstává neurčená produkční funkce f. Jednoduchá funkce, která splňuje podmínky P7) a P8) (a tedy může představovat jistý popis ekonomické reality) je *Cobbova-Douglasova produkční funkce*, která je tvaru

$$f(K,L) = BK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \tag{5.40}$$

kde kladný koeficient B představuje produkci při jednotkovém kapitálu i práci a α je nějaká konstanta taková, že $0 < \alpha < 1$. Cobbova-Douglasova produkční funkce v intenzivním tvaru je

$$f(k,1) = Bk^{\alpha}. \tag{5.41}$$

Dosazením této funkce do základní rovnice (5.39) dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro neznámou funkci k ve tvaru

$$k' = -(\lambda+\delta)k + A(1-s)k^{\alpha}, \tag{5.42}$$

kde jsme označili $A = \dfrac{B}{\kappa}$. Jedná se diferenciální rovnici Bernoulliovu, sr. 1.4. Budeme ji řešit zavedením substituce

$$r = k^{1-\alpha}, \tag{5.43}$$

tedy

$$\begin{aligned} r' = (1-\alpha)k^{-\alpha}k' = (1-\alpha)k^{-\alpha}\left(-(\lambda+\delta)k + A(1-s)k^{\alpha}\right) = \\ = (\alpha-1)(\lambda+\delta)k^{1-\alpha} - A(1-s)(\alpha-1), \end{aligned}$$

neboli

$$r' = (\alpha-1)(\lambda+\delta)r - A(1-s)(\alpha-1). \tag{5.44}$$

To je nehomogenní lineární rovnice pro neznámou funkci k a její řešení s počáteční podmínkou $r(0) = r_0$ je podle 1.3 rovno

$$\begin{aligned} r(t) = \left[r_0 - \int_0^t A(1-s)(\alpha-1)\mathrm{e}^{-(\alpha-1)(\lambda+\delta)\sigma}\mathrm{d}\sigma\right]\mathrm{e}^{(\alpha-1)(\lambda+\delta)t} = \\ = \left[r_0 + A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\left(\mathrm{e}^{-(\alpha-1)(\lambda+\delta)t} - 1\right)\right]\mathrm{e}^{(\alpha-1)(\lambda+\delta)t} = \\ = \left(r_0 - A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\right)\mathrm{e}^{(\alpha-1)(\lambda+\delta)t} + A\frac{1-s}{\lambda+\delta}. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Míra amortizace δ je podle předpokladu P3) nezáporná. O relativním přírůstku pracovní síly λ jsme dosud nic nepředpokládali, může být kladný (obyvatelstva přibývá) i záporný (obyvatelstvo vymírá). Pro další úvahy budeme předpokládat, že $\lambda + \delta > 0$ (materiál chátrá rychleji než obyvatelstvo). Poněvadž $\alpha < 1$, je funkce r daná rovností (5.45) monotonní (v případě $(\lambda+\delta)r_0 > A(1-s)$ klesající, v případě $(\lambda+\delta)r_0 < A(1-s)$ rostoucí) a platí

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = A\frac{1-s}{\lambda+\delta}. \tag{5.46}$$

S využitím rovností (5.38), (5.41) a (5.43) můžeme psát

$$r = k^{1-\alpha} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha} = \frac{BK}{BK^{\alpha}L^{1-\alpha}} = B\frac{K}{Y}. \tag{5.47}$$

Z rovnosti (5.46) nyní plyne

$$\lim_{t\to\infty}\frac{K(t)}{Y(t)} = \frac{1-s}{\kappa(\lambda+\delta)}; \tag{5.48}$$

tento výsledek můžeme interpretovat tak, že *kapitálová náročnost jednotky produkce* (množství kapitálu potřebné k vytvoření jednotkového produktu) se v uzavřené ekonomice ustálí na jisté hodnotě, zvané *mezní poměr kapitálu a produkce,* která závisí pouze na sklonu ke spotřebě s, efektivitě investic κ, míře amortizace δ a přirozeném přírůstku (nebo úbytku) obyvatel λ. Ve stabilizované uzavřené ekonomice tedy platí $\dfrac{K}{Y} = \dfrac{1-s}{\kappa(\lambda+\delta)}$, neboli

$$Y = \frac{1-s}{\kappa(\lambda+\delta)}K;$$

produkce je přímo úměrná kapitálu.

Návratem k proměnné $k = r^{1/(1+\alpha)}$ můžeme vyjádřit řešení základní rovnice (5.42) s Cobbovou-Douglasovou produkční funkcí a s počáteční podmínkou $k(0) = k_0$ ve tvaru

$$k(t) = \left[\left(k_0^{1-\alpha} - A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\right)\mathrm{e}^{(\alpha-1)(\lambda+\delta)t} + A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{5.49}$$

Pro funkci k platí, že

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = \left(A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}; \tag{5.50}$$

její chování v dlouhém časovém úseku nezávisí na počáteční hodnotě. Ekonomika tedy směřuje ke konstantní (*rovnovážné*) vybavenosti práce kapitálem.

Nyní můžeme pomocí řešení (5.45) a (5.49) rovnic (5.44) a (5.42) vyjádřit řešení rovnic původního modelu (5.32), (5.35), (5.36), (5.37), (5.33) v případě, že produkční funkce je Cobbova-Douglasova tvaru (5.40). Budeme uvažovat počáteční podmínky

$$K(0) = K_0, \quad L(0) = L_0.$$

Pak podle (5.40), (5.33) a (5.37) je

$$Y(0) = Y_0 = BK_0^{\alpha}L_0^{1-\alpha}, \quad S(0) = S_0 = sY_0, \quad I(0) = I_0 = (1-s)Y_0.$$

Rovnice (5.36) je lineární homogenní a její řešení splňující uvedenou počáteční podmínku je

$$L(t) = L_0\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Podle (5.38) je

$$K(t) = k(t)L(t) = L_0\mathrm{e}^{\lambda t}\left[\left(\left(\frac{K_0}{L_0}\right)^{1-\alpha} - A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\right)\mathrm{e}^{(\alpha-1)(\lambda+\delta)t} + A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

podle (5.40), (5.32) je

$$Y(t) = BK(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha} = \kappa AL_0\mathrm{e}^{\lambda t}\left[\left(\left(\frac{K_0}{L_0}\right)^{1-\alpha} - A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\right)\mathrm{e}^{(\alpha-1)(\lambda+\delta)t} + A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Spotřeba $S(t)$ je s-násobkem produkce a investice $I(t)$ je jejím $(1-s)$-násobkem.

Technologický pokrok v modelu ekonomického růstu

Z rovností (5.50), (5.48) plyne, že produkce, kapitál a pracovní síla jsou asymptoticky ekvivalentní funkce; zhruba řečeno, tyto makroekonomické charakteristiky rostou stejně rychle. Zejména platí

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Y(t)}{K(t)} = \frac{\lambda+\delta}{1-s} = const < \infty.$$

Základní dogma ekonomie však říká, že ekonomika roste tak, že se produkuje stále více se stále menšími náklady, tj.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Y(t)}{K(t)} = \infty. \tag{5.51}$$

Tato disproporce může být způsobena tím, že jsme neuvažovali technologický pokrok. Ten se projevuje tak, že efektivita práce v čase roste. To znamená, že pracovní síla nebude vyjádřena pouze množstvím pracujících. Předpoklad P4) tedy nahradíme předpokladem modifikovaným:

P4') Relativní přírůstek pracovní síly za jednotku času v průběhu času roste, tj.

$$\frac{L(t+\delta t) - L(t)}{L(t)} = \lambda(t)\Delta t,$$

kde λ je rostoucí funkce.

Nyní můžeme zopakovat všechny úvahy. Těmi dojdeme k modifikované rovnici neoklasického modelu

$$k' = -\big(\lambda(t) + \delta\big)k + \frac{1-s}{\kappa} f(k,1), \tag{5.52}$$

která se od rovnice (5.39) liší pouze v tom, že relativní přírůstek pracovní síly λ závisí na čase. Abychom tuto závislost specifikovali, přijmeme další předpoklad:

P9) Relativní přírůstek pracovní síly vyjadřuje dosaženou technologickou úroveň. Technologický růst je proces kumulativní, tj. jeho přírůstek je úměrný úrovni dosažené a době rozvoje, tj.

$$\lambda(t+\Delta t) - \lambda(t) = p\lambda(t)\Delta t,$$

kde p je kladná konstanta.

Uvedený předpoklad lze limitním přechodem $\Delta t \to 0$ přepsat ve tvaru homogenní diferenciální rovnice

$$\lambda' = p\lambda, \tag{5.53}$$

jejíž řešení je podle 1.3 rovno $\lambda(t) = \lambda_0 \mathrm{e}^{pt}$, kde λ_0 vyjadřuje počáteční technologickou úroveň. Do rovnice (5.52) nyní můžeme dosadit Cobbovu-Douglasovu produkční funkci (5.41) a vyjádření (5.53). Opět dostaneme Bernoulliovu rovnici

$$k' = -\left(\lambda_0 \mathrm{e}^{pt} + \delta\right) k + A(1-s)k^{\alpha},$$

kterou substituce (5.43) transformuje na rovnici lineární

$$r' = (\alpha - 1)\left(\lambda_0 \mathrm{e}^{pt} + \delta\right) r + A(1-s)(1-\alpha).$$

Její řešení s počáteční podmínkou $r(0) = r_0$ je podle 1.3 rovno

$$r(t) = \left[r_0 + A(1-\alpha)(1-s) \int_0^t \exp\left\{ (1-\alpha) \left(\delta\tau + \frac{\lambda_0}{p} \left(e^{p\tau} - 1 \right) \right) \right\} d\tau \right] \times$$
$$\times \exp\left\{ -(1-\alpha) \left(\delta t + \frac{\lambda_0}{p} \left(e^{pt} - 1 \right) \right) \right\}.$$

Vzhledem k (5.47) je

$$\frac{Y(t)}{K(t)} = \frac{B}{r(t)},$$

takže s použitím de l'Hospitalova pravidla můžeme vypočítat

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Y(t)}{K(t)} = B \lim_{t\to\infty} \frac{\exp\left\{ (1-\alpha) \left(\delta t + \frac{\lambda_0}{p} \left(e^{pt} - 1 \right) \right) \right\}}{r_0 + A(1-\alpha)(1-s) \int_0^t \exp\left\{ (1-\alpha) \left(\delta\tau + \frac{\lambda_0}{p} \left(e^{pt} - 1 \right) \right) \right\} d\tau} =$$

$$= B \lim_{t\to\infty} \frac{(1-\alpha)\left(\delta + \frac{\lambda_0}{p} e^{pt}\right) \exp\left\{ (1-\alpha) \left(\delta t + \frac{\lambda_0}{p} \left(e^{pt} - 1 \right) \right) \right\}}{A(1-\alpha)(1-s) \exp\left\{ (1-\alpha) \left(\delta t + \frac{\lambda_0}{p} \left(e^{pt} - 1 \right) \right) \right\}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\delta p + \lambda_0 e^{pt}}{p(1-s)} = \infty.$$

Podmínka (5.51) je nyní splněna. Analogicky vypočítáme

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{K(t)}{Y(t)} / \lambda_0 e^{pt} \right) = 0.$$

Poslední výsledek lze interpretovat tak, že v uzavřené ekonomice s plynulým technologickým pokrokem klesá kapitálová náročnost jednotky produkce řádově rychleji, než technologická úroveň roste.

Základní dynamickou rovnici neoklasického modelu sestavili nezávisle na sobě Robert M. Solow a Trevor W. Swan jako rozšíření modelu produktivity kapitálu, který nezávisle vytvořili Sir Roy F. Harrod (v roce 1939) a Ewsey Domar (v roce 1946). Publikovali ji v článcích

Solow, R. M. A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quaterly Journal of Economic.* 1956, vol. 70, No. 1 (February), p. 65–94.

Swan, T. W. Economic Growth and Capital Accumulation. *Economic Record.* 1956, No. 32 (November), p. 334–361.

Robert Solow za rozpracování neoklasického modelu obdržel v roce 1987 Cenu Švédské národní banky za rozvoj ekonomické vědy na památku Alfreda Nobela (lidově zvanou Nobelova cena za ekonomii).

5.8 Udržitelný rybolov

Představme si nějakou vodní nádrž, v níž žijí ryby. Tato nádrž je uzavřená v tom smyslu, že ryby z ní ani do ní nemigrují. Úživnost této nádrže budeme považovat za konstantní. Populaci ryb považujeme za homogenní (nerozlišujeme věk, velikost, pohlaví ani jiné vlastnosti jedinců) a všechny její charakteristiky kromě velikosti považujeme za konstantní v čase. Označíme-li $x = x(t)$ velikost populace ryb v čase t, pak vývoj této veličiny lze modelovat logistickou diferenciální rovnicí

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

kde r je vnitřní koeficient růstu populace a K je kapacita (úživnost) prostředí; oba parametry r a K jsou kladné.

Rybolov s konstantním úlovkem za jednotku času

Ryby však nejsou ponechány svému vývoji, jejich populace je využívána. Rybolov můžeme popsat tak, že z populace ryb je pravidelně odstraňován jistý počet jedinců, za jednotku času je vyloveno určité množství ryb. (To si lze například představit tak, že u jezera žijí rybáři, kteří mají pevně daný počet loděk, každý den vyrazí na lov a loví tak dlouho, až své čluny naplní.) Označme h množství ryb ulovených za jednotku času; parametr h je kladný. Pak vývoj populace ryb, jejíž velikost byla na začátku rovna hodnotě $x_0 \geq 0$, je popsán počáteční úlohou pro diferenciální rovnici

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - h, \qquad x(0) = x_0. \tag{5.54}$$

Základní otázkou je, zda rybolov je udržitelný, tj. zda v dostatečně dlouhém časovém horizontu bude populace ryb přežívat nebo ji lov vyhubí.

Rovnice v úloze (5.54) je Riccatiho, podle 4.1 ji řešíme substitucí

$$x(t) = \frac{K}{r}\frac{y'(t)}{y(t)}. \tag{5.55}$$

Dosazení do rovnice (5.54) dává

$$\frac{K}{r}\frac{y''y - (y')^2}{y^2} = x' = r\frac{K}{r}\frac{y'}{y} - \frac{r}{K}\left(\frac{K}{r}\frac{y'}{y}\right)^2 - h,$$

tj.

$$\frac{K}{r}\frac{y''}{y} - \frac{K}{r}\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = -\frac{K}{r}\left(\frac{y'}{y}\right)^2 + K\frac{y'}{y} - h.$$

Odtud snadnou úpravou dostaneme lineární homogenní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$y'' - ry' + \frac{rh}{K}y = 0. \tag{5.56}$$

Její charakteristická rovnice (sr. 3.1.1) je

$$\lambda^2 - r\lambda + \frac{rh}{K} = 0. \tag{5.57}$$

Označme $D = 1 - \dfrac{4h}{rK}$. Pak $D < 1$, neboť parametry r, K, h jsou kladné. Při řešení úlohy (5.54) rozlišíme tři případy podle znaménka veličiny D.

(i) $D > 0$, tj. $h < \frac{1}{4}rK$.

V tomto případě má charakteristická rovnice (5.57) dva reálné různé kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{r}{2}\left(1 \pm \sqrt{D}\right)$$

a protože $D < 1$, jsou oba kořeny kladné. Obecné řešení lineární rovnice (5.56) je

$$y(t) = A\mathrm{e}^{\frac{1}{2}r(1+\sqrt{D})t} + B\mathrm{e}^{\frac{1}{2}r(1-\sqrt{D})t} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}r(1+\sqrt{D})t}\left(A + B\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}\right),$$

kde A, B jsou nějaké konstanty. Platí tedy

$$y'(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}r(1+\sqrt{D})t}\left(\frac{r}{2}(1+\sqrt{D})\left(A + B\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}\right) - Br\sqrt{D}\,\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}\right) =$$
$$= \frac{r}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}r(1+\sqrt{D})t}\left(\left(1+\sqrt{D}\right)A + \left(1-\sqrt{D}\right)B\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}\right).$$

Odtud a z transformačního vztahu (5.55) dostaneme obecné řešení rovnice z úlohy (5.54) ve tvaru

$$x(t) = \frac{K}{2}\frac{\left(1+\sqrt{D}\right)A + \left(1-\sqrt{D}\right)B\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}}{A + B\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}}.$$

Konstanty A, B získáme z počáteční podmínky v úloze (5.54):

$$x_0 = \frac{K}{2}\frac{\left(1+\sqrt{D}\right)A + \left(1-\sqrt{D}\right)B}{A+B} = \frac{K}{2}\left(1 + \sqrt{D}\,\frac{A-B}{A+B}\right).$$

To je jedna rovnice pro dvě neznámé a hodnoty A, B z ní nelze vypočítat. Lze však určit jejich poměr

$$\frac{2x_0}{K} - 1 = \sqrt{D}\,\frac{A-B}{A+B}, \quad \text{tj.} \quad \left(2x_0 - K - K\sqrt{D}\right)A = -B\left(2x_0 - K + K\sqrt{D}\right).$$

Řešení úlohy (5.54) je tedy dáno formulí

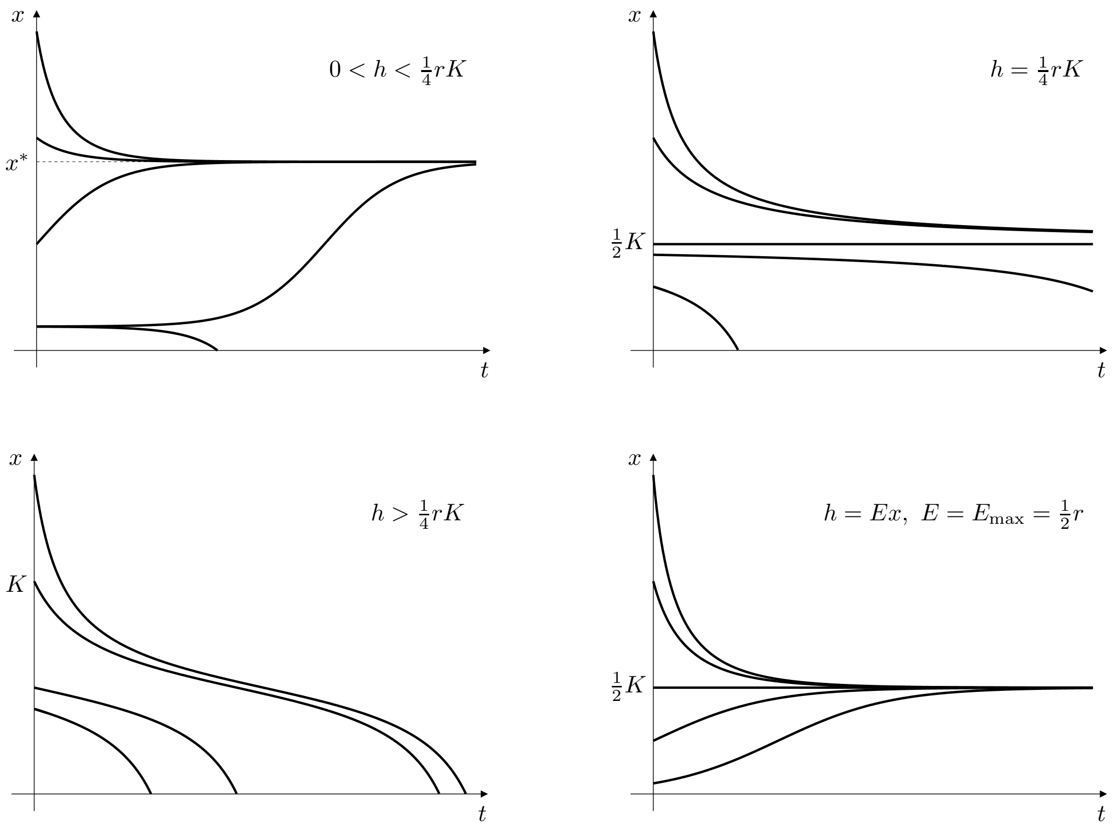
$$x(t) = \frac{K}{2}\frac{\left(1+\sqrt{D}\right)\left(K\left(1-\sqrt{D}\right) - 2x_0\right) - \left(1-\sqrt{D}\right)\left(K\left(1+\sqrt{D}\right) - 2x_0\right)\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}}{K\left(1-\sqrt{D}\right) - 2x_0 - \left(K\left(1+\sqrt{D}\right) - 2x_0\right)\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}} =$$
$$= \frac{K}{r}\frac{rx_0\left(1+\sqrt{D}\right) - 2h - \left(rx_0\left(1+\sqrt{D}\right) - 2h\right)\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}}{2x_0 - K\left(1-\sqrt{D}\right) - \left(2x_0 - K\left(1+\sqrt{D}\right)\right)\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}},$$

neboť $1 - D = \dfrac{4h}{rK}$.

Nyní můžeme vyšetřovat průběh funkce x v závislosti na počáteční hodnotě (parametru) x_0. Pokud je $x_0 > \frac{1}{2}K\left(1-\sqrt{D}\right)$, pak je funkce x kladná pro jakoukoliv hodnotu nezávisle proměnné t a platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = K\frac{1+\sqrt{D}}{2};$$

zejména pro $x_0 = \frac{1}{2}K\left(1+\sqrt{D}\right)$ je funkce x konstantní, $x(t) \equiv \frac{1}{2}K\left(1+\sqrt{D}\right)$. Rybolov zredukuje velikost populace ryb na hodnotu $x^* = \frac{1}{2}K\left(1+\sqrt{D}\right)$.



Obrázek 5.5: Modely rybolovu. Rybolov s konstantním úlovkem za časovou jednotku, tj. řešení úlohy (5.54) pro různé hodnoty intenzity lovu h a pro různé počáteční hodnoty x_0 (nahoře a vlevo dole). Rybolov s konstantním loveckým úsilím, tj. řešení úlohy (5.59) s úsilím E přinášejícím maximální udržitelný úlovek pro různé počáteční hodnoty x_0 (vpravo dole).

Pokud je $x_0 = \frac{1}{2}K\big(1-\sqrt{D}\big)$, pak je funkce x konstantní, $x(t) \equiv \frac{1}{2}K\big(1-\sqrt{D}\big)$.
Ovšem, pokud je $x_0 < \frac{1}{2}K\big(1-\sqrt{D}\big)$, pak pro

$$t_E = \frac{1}{r\sqrt{D}} \ln \frac{2h - rx_0\big(1-\sqrt{D}\big)}{2h - rx_0\big(1+\sqrt{D}\big)}$$

je $x(t_E) = 0$. To znamená, že lov ryby vyhubí.

Řešení počáteční úlohy (5.54) s hodnotou $h \in (0, \frac{1}{4}rK)$ a s různými počátečními hodnotami je zobrazeno na obr. 5.5 vlevo nahoře.

(ii) $D > 0$, tj. $h = \frac{1}{4}rK$.

V tomto případě má charakteristická rovnice (5.57) dvojnásobný reálný kladný kořen $\lambda = \frac{1}{2}r$. Obecné řešení lineární rovnice (5.56) v tomto případě je rovno

$$y(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}rt}.$$

Pro toto řešení musí platit $y(0) \neq 0$, jinak by transformace (5.55) nebyla definována v pravém okolí počáteční hodnoty. Odtud plyne, že $A \neq 0$ a řešení můžeme upravit na tvar

$$y(t) = A\left(1 + \frac{B}{A}t\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}rt} = A(1 + Ct)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}rt},$$

kde $C = \dfrac{B}{A}$. Derivace řešení je rovna

$$y'(t) = A\left(C + \frac{r}{2}(1+Ct)\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}rt}$$

a obecné řešení rovnice z úlohy (5.54) je

$$x(t) = \frac{K}{r}\frac{C + \frac{r}{2}(1+Ct)}{1+Ct} = \frac{K}{2} + \frac{K}{r}\frac{C}{1+Ct}.$$

Toto řešení má splňovat počáteční podmínku v úloze (5.54), takže

$$C = \frac{r}{2K}(2x_0 - K).$$

Řešení úlohy (5.54) je tedy v případě $h = \frac{1}{4}rK$ dáno formulí

$$x(t) = K\left(\frac{1}{2} + \frac{2x_0 - K}{2K + r(2x_0 - K)t}\right).$$

Pokud $x_0 \geq \frac{1}{2}K$, je toto řešení kladné pro každé $t \geq 0$. Zejména pro $x_0 = \frac{1}{2}K$ je řešení konstantní, $x(t) \equiv \frac{1}{2}K$. Pokud naopak $x_0 < \frac{1}{2}K$, je řešení kladné pouze pro $t \in [0, t_E)$, kde

$$t_E = \frac{2K}{r(K - 2x_0)}$$

a $x(t_E) = 0$. Řešení úlohy (5.54) v případě $h = \frac{1}{4}rK$ pro různé počáteční hodnoty je znázorněno na obr. 5.5 vpravo nahoře.

V případě $h = \frac{1}{4}rK$ je tedy rybolov udržitelný pouze pokud byla počáteční velikost populace ryb alespoň na polovině úživnosti prostředí. V takovém případě rybolov dlouhodobě udržuje velikost populace na hodnotě $\frac{1}{2}K$, neboť

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{K}{2}.$$

Pokud je počáteční velikost populace ryb menší, lov ryby vyhubí v čase t_E.

(iii) $D < 0$, tj. $h > \frac{1}{4}rK$.

V tomto případě má charakteristická rovnice (5.57) komplexně sdružené kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{r}{2} \pm \mathrm{i}\varphi, \quad \text{kde } \varphi = \frac{r}{2}\sqrt{-D} = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{4h}{rK} - 1}$$

a obecné řešení lineární rovnice (5.56) je tvaru

$$y(t) = A\mathrm{e}^{\frac{1}{2}rt}\sin(\varphi t + \psi),$$

kde A, ψ jsou konstanty. Jeho derivace je rovna

$$y'(t) = A\mathrm{e}^{\frac{1}{2}rt}\left(\frac{r}{2}\sin(\varphi t + \psi) + \varphi\cos(\varphi T + \psi)\right)$$

a řešení rovnice z úlohy (5.54) podle transformačního vztahu (5.55) je dáno formulí

$$x(t) = \frac{K}{r}\frac{r\sin(\varphi t+\psi)+2\varphi\cos(\varphi t+\psi)}{2\sin(\varphi t+\psi)} = \frac{K}{2}+\frac{K\varphi}{r}\operatorname{cotg}(\varphi t+\psi) = \\ = \frac{K}{2}\left(1+\sqrt{\frac{4h}{rK}-1}\operatorname{cotg}(\varphi t+\psi)\right).$$

Aby toto řešení splnilo počáteční podmínku v úloze (5.54), musí platit

$$x_0 = \frac{K}{2}\left(1+\sqrt{\frac{4h}{rK}-1}\operatorname{cotg}\psi\right),$$

tedy

$$\psi = \operatorname{arccotg}\left(\frac{2x_0-K}{K}\sqrt{\frac{rK}{4h-rK}}\right).$$

Řešení úlohy (5.54) je nyní kladné pouze na intervalu $[0,t_E)$, kde t_E je nejmenší kladné řešení rovnice

$$\frac{K}{2}\left(1+\sqrt{\frac{4h}{rK}-1}\operatorname{cotg}(\varphi t_E+\psi)\right)=0,$$

tedy

$$t_E = \frac{1}{\varphi}\left(\operatorname{arccotg}\left(-\sqrt{\frac{rK}{4h-rK}}\right)-\psi\right) = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{rK}{4h-rK}}\left(\frac{\pi}{2}-\psi+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{rK}{4h-rK}}\right).$$

Pro $h>\frac{1}{4}rK$ tedy rybolov nemůže být udržitelný. Řešení úlohy (5.54) v případě $h>\frac{1}{4}rK$ pro různé počáteční hodnoty je znázorněno na obr. 5.5 vlevo dole.

Z rozboru řešení modelu (5.54) plyne, že rybolov může být udržitelný pouze v případě, že není příliš intenzivní a počáteční populace ryb je dostatečně velká, konkrétně když

$$h \le \frac{1}{4}rK \quad \text{a} \quad x_0 \ge \frac{K}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{4h}{rK}}\right).$$

Maximální udržitelný úlovek je tedy

$$h_{\max} = \frac{1}{4}rK. \tag{5.58}$$

Rybolov s konstantním úsilím

K modelování rybolovu můžeme přistoupit i jinak. Předpokládejme, že nikoliv úlovek za jednotku času, ale úsilí vynaložené na lov je konstantní. To si můžeme představit například tak, že rybáři mají pevnou denní pracovní dobu, po kterou vlečou sítě. Úlovek za jednotku času je v takovém případě úměrný množství ryb, které jsou k dispozici, tj. $h=Ex$, kde kladná konstanta E vyjadřuje vynaložené úsilí.

Místo modelu (5.54) tedy uvažujeme model

$$x' = rx\left(1-\frac{x}{K}\right)-Ex, \qquad x(0)=x_0. \tag{5.59}$$

Rovnici upravíme na tvar

$$x' = -\frac{r}{K}x^2 + (r-E)x$$

a vidíme, že se opět jedná o Riccatiho rovnici. Substituce (5.55) ji převede na tvar

$$\frac{K}{r}\frac{y''}{y} - \frac{K}{r}\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = -\frac{r}{K}\left(\frac{K}{r}\frac{y'}{y}\right)^2 + (r-E)\frac{K}{r}\frac{y'}{y},$$

z něhož po úpravě dostaneme lineární homogenní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$y'' - (r-E)y' = 0. \tag{5.60}$$

Příslušná charakteristická rovnice $\lambda^2 - (r-E)\lambda = 0$ má dva reálné kořeny

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 0, \\ r-E. \end{cases} \tag{5.61}$$

Pokud $E \neq r$, jsou tyto kořeny různé a obecné řešení rovnice (5.60) je tvaru

$$y(t) = A + B\mathrm{e}^{(r-E)t}.$$

Jeho derivace je rovna $y'(t) = B(r-E)\mathrm{e}^{(r-E)t}$, takže zpětnou transformací (5.55) dostaneme řešení rovnice z úlohy (5.59) jako

$$x(t) = \frac{K}{r}\frac{B(r-E)\mathrm{e}^{(r-E)t}}{A + B\mathrm{e}^{(r-E)t}}.$$

Pro $x(0) = x_0 > 0$ musí být $B \neq 0$ a řešení můžeme upravit na tvar

$$x(t) = \frac{K(r-E)}{r\left(1 + D\mathrm{e}^{-(r-E)t}\right)};$$

hodnotu konstanty $D = \dfrac{A}{B}$ určíme z počáteční podmínky úlohy (5.59),

$$D = \frac{K(r-E)}{rx_0} - 1 = \frac{1}{rx_0}\big(K(r-E) - rx_0\big).$$

Řešení úlohy (5.59) je tedy v případě $E \neq r$ dáno formulí

$$x(t) = \frac{K(r-E)x_0}{rx_0 - \big(rx_0 - K(r-E)\big)\mathrm{e}^{-(r-E)t}}; \tag{5.62}$$

povšimněme si, že tato funkce vyjadřuje řešení problému (5.59) i pro $x_0 = 0$. Řešení (5.62) úlohy (5.59) je pro libovolnou počáteční hodnotu $x_0 \geq 0$ definováno na celém intervalu $[0, \infty)$ a platí pro něho

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{cases} K\left(1 - \dfrac{E}{r}\right), & E < r, \\ 0, & E > r. \end{cases}$$

Pokud $E = r$, oba kořeny (5.61) charakteristické rovnice splývají do dvojnásobného kořene $\lambda_{1,2} = 0$. Obecné řešení lineární rovnice (5.60) je v tomto případě rovno

$$y(t) = A + Bt,$$

takže z transformačního vztahu (5.55) plyne, že obecné řešení rovnice v úloze (5.59) je

$$x(t) = \frac{K}{r}\frac{B}{A + Bt} = \frac{K}{r}\frac{1}{D + t}.$$

Hodnota konstanty D nyní je $D = \dfrac{K}{rx_0}$, takže řešení úlohy (5.59) je

$$x(t) = \frac{Kx_0}{K + rx_0 t}.$$

Tato funkce je také při libovolném $x_0 \geq 0$ definována na celém intervalu $[0, \infty)$ a platí pro ni

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Z rozboru řešení úlohy (5.59) vidíme, že rybolov je dlouhodobě udržitelný (tj. řešení $x = x(t)$ úlohy (5.59) je kladné pro všechna $t \geq 0$) v případě $E < r$. Na rozdíl od předchozího modelu (5.54) však i neudržitelný rybolov vyhubí ryby v dlouhodobém horizontu, nikoliv v konečném čase. Jinak řečeno: je-li ochrana ryb (nebo jiného obnovitelného zdroje) prováděna pevným omezením úlovku, může dojít ke katastrofickému vývoji — rychlé likvidaci ryb. Ochrana pomocí zpětné vazby, tj. omezováním úlovku na základě aktuálního množství ryb, je bezpečnější.

Uvažujme nyní udržitelný rybolov papsaný modelem (5.59) za situace, kdy velikost populace ryb je na limitní hodnotě

$$x^* = K\left(1 - \frac{E}{r}\right).$$

Úlovek za jednotku času je v takovém případě roven $h = Ex^*$. Tento úlovek lze chápat jako závislý na vynaloženém úsilí, tj. jako funkci

$$h = h(E) = EK\left(1 - \frac{E}{r}\right).$$

To je konkávní kvadratická funkce, která nabývá svého maxima pro $E = E_{\max} = \frac{1}{2}r$. Maximální úlovek za jednotku času je tedy

$$h_{\max} = h(E_{\max}) = \frac{1}{4}rK.$$

To je stejný výsledek jako (5.58), tj. v případě rybolovu s konstantním úlovkem za jednotku času popsaného modelem (5.54). Řešení úlohy (5.59) s úsilím $E = E_{\max} = \frac{1}{2}r$ je znázorněno na obrázku 5.5 vpravo dole.

Optimalizace udržitelného rybolovu

Nyní můžeme řešit problém optimalizace rybolovu. Vnitřní koeficient růstu populace ryb je pro konkrétní druh konstanta, tu ovlivnit nelze. Úživnost prostředí však lze měnit, například eutrofizací příslušné vodní nádrže (přikrmováním ryb). V takovém případě můžeme počáteční velikost x_0 považovat za kapacitu přirozeného prostředí. Zvyšování úživnosti prostředí ale něco stojí. Předpokládejme, že náklady na eutrofizaci rybníka, které zvýší jeho úživnost na hodnotu K, jsou vyjádřeny funkcí $n(K)$. Cenu ulovených ryb při intenzitě h označíme $c(h)$ a náklady na něho označíme $l(h)$. Zisk z rybolovu je tedy roven $c(h) - l(h) - n(K)$.

Maximální udržitelný rybolov má intenzitu $h = \frac{1}{4}rK$. Chceme-li tedy maximalizovat zisk, hledáme maximum funkce

$$f(K) = c\left(\tfrac{1}{4}rK\right) - l\left(\tfrac{1}{4}rK\right) - n(K)$$

za podmínky

$$x_0 \geq \frac{K}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4h}{rK}}\right).$$

To se ovšem snáze řekne, než udělá; funkce c a n totiž nemusí být známy.

Uvedené modely diskutovali Beddington a May v článku

BEDDINGTON, J. R., MAY, R. M. Harvesting natural populations in a randomly fluctuating environment. *Science*. 1977, vol. 197, p. 463–465.

Přestože se jedná o modely velice jednoduché, přinášejí důležitý vhled do problematiky řízení využívání obnovitelných zdrojů.

5.9 Nerelativistický model nestacionárního Vesmíru

Seriózní modely Vesmíru jako celku jsou konstruovány v rámci obecné teorie relativity. Ovšem již Newtonovy zákony (a tedy středoškolská fyzika) umožňují jistý vhled do vývoje Vesmíru, zejména mohou ukázat význam jeho současné hustoty pro jeho další osud.

Budeme si tedy představovat, že Vesmír je umístěn v klasicky nekonečném euklidovském trojrozměrném prostoru. Vesmír sám nemůže být nekonečný, nemůže tento hypotetický absolutní prostor rovnoměrně vyplnit. To snadno nahlédneme, pokud se za bezoblačné noci a mimo městské osvětlení podíváme na oblohu. Uvidíme tmu a hvězdy. Kdyby byl Vesmír nekonečný, v každém směru by náš pohled nakonec na nějakou hvězdu narazil a noční obloha by celá zářila jako polední slunce. Uvedený argument pro konečnost Vesmíru však není úplně přesvědčivý – mohla by v něm být nějaká mezihvězdná nebo mezigalaktická mračna, která vzdálenější hvězdy zastíní; nebo by světlo mohlo během dlouhé cesty Vesmírem zestárnout a přestat svítit. Avšak dalším argumentem pro konečnost Vesmíru může být existence gravitačního zákona. V nekonečném Vesmíru by se v každém směru nacházelo nekonečné množství hmoty a gravitační působení těchto hmot na jakékoliv těleso by se vzájemně vyrušila. Pokud tedy chceme zůstat v přehledném světě klasické fyziky, tj. ve světě, v němž působí obecné Newtonovy zákony pohybu i zákon gravitační, musí hmotný vesmír (což je z pohledu novověké materialistické přírodovědy celý Vesmír) být konečný, byť se nachází v nekonečném absolutním prostoru.

Z prostorové omezenosti Vesmíru plyne také skutečnost, že nemůže být neproměnný v čase; čas si v souladu s newtonovskou fyzikou představujeme jako rovnoměrně plynoucí nezávisle na jakémkoliv procesu, tedy jako jednorozměrný euklidovský prostor. Konečný Vesmír nemůže mít stále stejnou rozlohu – gravitační síla by totiž každou částici přitahovala do těžiště Vesmíru a ten by se postupně zhroutil a vytvořil nějaké těleso obrovské hustoty. O trvání Vesmíru tato úvaha ještě nic neříká: Vesmír mohl mít počátek a při něm dostat nějaký impuls, který způsobuje jeho neustálé rozpínání až po úplné „vyvanutí“; nebo mohl být na počátku veliký a postupně se smršťuje; žádný počátek ani konec nemusí mít, jen se v průběhu času nějak periodicky nebo neperiodicky mění a podobně. Také proto chceme vývoj Vesmíru nějak modelovat. Modelovaný Vesmír bude homogenní (v každém místě stejný) a izotropní (v každém směru stejný); to celkem dobře odpovídá pozorování na dostatečně velké prostorové škále. K tomu budeme ještě předpokládat, že platí zákon zachování hmoty a přírodní zákony, zejména zákon gravitační, jsou na čase nezávislé, jsou věčné.

Model Vesmíru je tedy postaven na předpokladech:

(i) Vesmír je homogenní koule o poloměru $R > 0$.

(ii) Poloměr Vesmíru se v čase mění, $R = R(t)$. Současný poloměr Vesmíru označíme R_0.

(iii) Vesmír má konstantní hmotnost M; samozřejmě je $M > 0$.

(iv) V celém Vesmíru platí Newtonův gravitační zákon a gravitační konstanta $G > 0$ nezávisí na čase.

Z astronomických pozorování je známo, že se Vesmír rozpíná; čím jsou galaxie od sebe vzdálenější, tím rychleji se od sebe vzdalují. Změnu velikosti Vesmíru, tedy derivaci jeho poloměru $R'(t)$, budeme proto považovat za úměrnou jeho velikosti. Spolu s předpokladem (ii) tak pro poloměr Vesmíru dostáváme počáteční podmínky

$$R(0) = R_0, \quad R'(0) = HR_0, \tag{5.63}$$

kde $H > 0$ je Hubbleova konstanta[2].

Uvažujme částici (galaxii) o hmotnosti μ na „hranici Vesmíru“, tj. ve vzdálenosti R od jeho středu. Podle předpokladů (i), (iii) a (iv) na ni působí gravitační síla orientovaná do středu Vesmíru, tedy síla daná vztahem

$$F = -G\frac{M\mu}{R^2},$$

která částici uděluje zrychlení R''. Podle zákona síly je $F = \mu R''$, tedy

$$R'' = -G\frac{M}{R^2}. \tag{5.64}$$

Diferenciální rovnice druhého řádu (5.64) spolu s počátečními podmínkami (5.63) představuje model vývoje velikost Vesmíru.

Označme ϱ_0 současnou hustotu Vesmíru. Podle předpokladu (iii) platí $M = \frac{4}{3}\pi R_0^3\varrho_0$. Dále zavedeme bezrozměrný poloměr Vesmíru r a bezrozměrný čas τ vztahy

$$r = \frac{R}{R_0}, \qquad \tau = Ht. \tag{5.65}$$

Pak pravá strana rovnice (5.64) je rovna

$$-G\frac{M}{R^2} = -\frac{G}{(R_0 r)^2}\frac{4}{3}\pi R_0^3\varrho_0 = -\frac{4\pi G R_0\varrho_0}{3r^2},$$

[2] Přesněji řečeno, současná hodnota Hubbleovy konstanty; tento parametr by se mohl v průběhu vývoje Vesmíru měnit.

její levá strana je

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}R_0 r \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = R_0 H^2 \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2},$$

takže rovnice (5.64) se transformuje na rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{4\pi G \varrho_0}{3H^2}\frac{1}{r^2}.$$

Rozměr veličiny $\dfrac{H^2}{G}$ v jednotkách SI je $\mathrm{kg\,m^{-3}}$, což znamená, že tato veličina vyjadřuje hustotu hmotnosti. To nás opravňuje k zavedení *kritické hustoty* vztahem

$$\varrho_{\mathrm{krit}} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{5.66}$$

Při tomto označení rovnici (5.64) přepíšeme do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{1}{2}\frac{\varrho_0}{\varrho_{\mathrm{krit}}}\frac{1}{r^2}. \tag{5.67}$$

Dále platí

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{R}{R_0}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{HR_0}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$$

a $\tau = 0$ právě tehdy, když $t = 0$, takže podle druhé rovnosti (5.63) je

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(0) = \frac{1}{HR_0}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{1}{HR_0}HR_0 = 1.$$

Dostáváme tak počáteční podmínky pro funkci r ve tvaru

$$r(0) = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(0) = 1. \tag{5.68}$$

Transformace (5.65) a označení (5.66) tedy převádí počáteční úlohu (5.64), (5.63) na úlohu (5.67), (5.68).

Pro zjednodušení zápisu ještě označíme

$$\sigma = \frac{\varrho_0}{\varrho_{\mathrm{krit}}}$$

a rovnici (5.67) přepíšeme ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{\sigma}{2r^2}. \tag{5.69}$$

Řešení úlohy (5.69), (5.68)

Explicitní autonomní rovnici druhého řádu (5.69) můžeme podle 4.2.1 převést na implicitní rovnici prvního řádu ve tvaru

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 2\int\left(-\frac{\sigma}{2r^2}\right)\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{r} + const.$$

Z počátečních podmínek (5.68) dále plyne, že

$$1 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(0)\right)^2 = \frac{\sigma}{r(0)} + const = \sigma + const,$$

tj. že integrační konstanta je rovna $1-\sigma$. Úloha (5.69), (5.68) se tedy transformuje na úlohu

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \frac{\sigma + (1-\sigma)r}{r}, \quad r(0) = 1. \tag{5.70}$$

V okolí počáteční hodnoty je derivace funkce r podle druhé rovnosti v (5.68) blízká hodnotě 1, zejména tedy $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} > 0$ a rovnici můžeme vyřešit vzhledem k derivaci. Úlohu (5.69), (5.68) tedy transformujeme na tvar

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \sqrt{\frac{\sigma + (1-\sigma)r}{r}}, \quad r(0) = 1. \tag{5.71}$$

Z první rovnosti a z (5.69) vidíme, že

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} > 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\tau^2} < 0$$

pro všechna přípustná r, tj. pro $r > 0$ v případě $\sigma \leq 1$ a pro $r \in \left(0, \dfrac{\sigma}{1-\sigma}\right)$ v případě $\sigma > 1$. To znamená, že řešení úlohy (5.71) je rostoucí konkávní funkce. Tento výsledek můžeme interpretovat tak, že poloměr Vesmíru se v průběhu času zvětšuje, Vesmír expanduje, a rychlost expanze se přitom snižuje.

Rovnice v (5.71) je autonomní, řešení úlohy je podle 1.1.3 implicitně dáno rovností

$$\tau = \int_1^r \sqrt{\frac{x}{\sigma + (1-\sigma)x}}\,\mathrm{d}x.$$

Substituce

$$u^2 = \frac{x}{\sigma + (1-\sigma)x}, \quad \text{tj. } x = \frac{\sigma u^2}{1-(1-\sigma)u^2}, \ \mathrm{d}x = \frac{2\sigma u}{\left(1-(1-\sigma)u^2\right)^2}\mathrm{d}u$$

převede integrál na pravé straně rovnosti na integrál z racionální funkce

$$I(r) = 2\sigma \int_1^{\sqrt{\frac{r}{\sigma+(1-\sigma)r}}} \left(\frac{u}{1-(1-\sigma)u^2}\right)^2 \mathrm{d}u. \tag{5.72}$$

Řešení úlohy (5.69), (5.68) je tedy implicitně dáno rovností

$$\tau = I(r), \tag{5.73}$$

kde výraz $I(r)$ je integrál zavedený rovností (5.72). Nyní musíme rozlišit tři případy podle hodnoty parametru σ, poměru aktuální hustoty Vesmíru k hustotě kritické.

1. $\sigma = 1$, tj. $\varrho_0 = \varrho_{\text{krit}}$

V tomto případě se integrál v (5.72) redukuje na tabulkový integrál

$$I(r) = 2\int_1^{\sqrt{r}} u^2 \mathrm{d}u = \tfrac{2}{3}\left(\sqrt{r^3} - 1\right).$$

Po dosazení do rovnosti (5.73) můžeme řešení úlohy (5.69), (5.68) vyjádřit ve tvaru

$$r(\tau) = \sqrt[3]{\left(\tfrac{3}{2}\tau + 1\right)^2}.$$

Tato funkce je definována pro libovolné τ, její první derivace

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{2}\tau + 1}}$$

je definována pro $\tau > -\frac{2}{3}$. Dále platí

$$\lim_{\tau \to -\frac{2}{3}+} r(\tau) = 0, \qquad \lim_{\tau\to\infty} r(\tau) = \infty, \qquad \lim_{\tau \to -\frac{2}{3}+} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = \infty, \qquad \lim_{\tau\to\infty} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = 0.$$

Odtud a z obecné úvahy provedené za (5.71) plyne, že úplné řešení úlohy (5.67), (5.68) je definováno na intervalu $(-\frac{2}{3}, \infty)$, funkce r je na tomto intervalu kladná, rostoucí a konkávní. V čase $\tau = -\frac{2}{3}$ má funkce r singularitu (nulovou hodnotu a nekonečnou derivaci) — poloměr Vesmíru byl nulový a rychlost jeho rozpínání nekonečná. Tento čas tedy můžeme považovat za okamžik vzniku Vesmíru, hodnota $\alpha_p = \frac{2}{3}$ vyjadřuje stáří Vesmíru. Stáří Vesmíru můžeme podle druhého z transformačních vztahů (5.65) vyjádřit také v časových jednotkách jako

$$A_p = \frac{\alpha_p}{H} = \frac{2}{3H}.$$

Je-li tedy současná hustota Vesmíru rovna hustotě kritické, pak se Vesmír vyvíjí od počáteční singularity (nulového poloměru) v čase A_p před současností tak, že jeho poloměr roste neomezeně v prostoru i v čase. Rychlost jeho růstu přitom klesá z nekonečna (počáteční exploze, big bang) k nule, tj. v nekonečném čase se rozpínání Vesmíru zastaví. Takový Vesmír se nazývá *parabolický*.

2. $\sigma < 1$, tj. $\varrho_0 < \varrho_{\text{krit}}$

V tomto případě je

$$I(r) = \left[\frac{\sigma u}{(1-\sigma)\left(1-(1-\sigma)u^2\right)} - \frac{\sigma}{2\sqrt{(1-\sigma)^3}} \ln \frac{1+\sqrt{1-\sigma}u}{1-\sqrt{1-\sigma}u}\right]_{u=1}^{\sqrt{\frac{r}{\sigma+(1-\sigma)r}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sigma r + (1-\sigma)r^2} - 1}{1-\sigma} - \frac{1}{2\sqrt{(1-\sigma)^3}} \ln \frac{\left(1-\sqrt{1-\sigma}\right)\left(\sqrt{\sigma+(1-\sigma)r} + \sqrt{(1-\sigma)r}\right)}{\left(1+\sqrt{1-\sigma}\right)\left(\sqrt{\sigma+(1-\sigma)r} - \sqrt{(1-\sigma)r}\right)}$$

a tato funkce je definována pro libovolné $r \geq 0$. Zejména platí

$$I(0) = -\frac{1}{1-\sigma}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1-\sigma}} \ln \frac{1-\sqrt{1-\sigma}}{1+\sqrt{1-\sigma}}\right).$$

Označme pravou stranu této rovnosti $-\alpha_h$. Pak platí

$$\lim_{\tau \to -\alpha_h +} r(\tau) = 0, \tag{5.74}$$

což znamená, že v čase $-\alpha_h$ měl Vesmír nulový poloměr. Tento čas lze považovat za počátek Vesmíru, takže jeho stáří nyní vyjádříme výrazem

$$A_h = \frac{\alpha_h}{H} = \frac{1}{(1-\sigma)H}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1-\sigma}} \ln \frac{1-\sqrt{1-\sigma}}{1+\sqrt{1-\sigma}}\right).$$

Již víme, že funkce $r = r(\tau)$ je rostoucí a konkávní. Dále je

$$\lim_{r \to \infty} I(r) = \infty$$

a tedy také

$$\lim_{\tau \to \infty} r(\tau) = \infty.$$

Z vyjádření derivace v (5.71), z předchozí rovnosti a z (5.74) dále plyne

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = \lim_{r \to \infty} \sqrt{\frac{\sigma}{r} + 1 - \sigma} = \sqrt{1-\sigma}, \qquad \lim_{\tau \to -\alpha_h +} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = \lim_{r \to 0+} \sqrt{\frac{\sigma}{r} + 1 - \sigma} = \infty.$$

Je-li tedy současná hustota Vesmíru menší než hustota kritické, pak se Vesmír opět vyvíjí od počáteční singularity v čase A_n před současností tak, že jeho poloměr roste neomezeně v prostoru i v čase. Rychlost jeho růstu přitom klesá z nekonečné k jisté kladné hodnotě. V tomto případě se tedy rozpínání Vesmíru nezastaví ani v nekonečném čase. Takový Vesmír se nazývá *hyperbolický.*

3. $\sigma > 1$, tj. $\varrho_0 > \varrho_{\mathrm{krit}}$

V tomto případě je

$$I(r) = \left[\frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma-1)^3}} \operatorname{arctg} u\sqrt{\sigma-1} - \frac{\sigma u}{(\sigma-1)\big(1+(\sigma-1)u^2\big)}\right]_{u=1}^{\sqrt{\frac{r}{\sigma-(\sigma-1)r}}} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{\sigma r-(\sigma-1)r^2}}{\sigma-1} + \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma-1)^3}}\left(\operatorname{arctg} \sqrt{r(\sigma-1)\sigma-(\sigma-1)r} - \operatorname{arctg} \sqrt{\sigma-1}\right).$$

Tato funkce je definována pro $r \in \left[0, \frac{\sigma}{\sigma-1}\right)$. Označme pro stručnost $r_m = \frac{\sigma}{\sigma-1}$. Platí

$$I(0) = \frac{1}{\sigma-1}\left(1 - \frac{\sigma \operatorname{arctg} \sqrt{\sigma-1}}{\sqrt{\sigma-1}}\right) < -\tfrac{2}{3},$$

$$0 < \lim_{r \to r_m -} I(r) = \frac{1}{\sigma-1}\left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma-1}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\sigma-1}\right)\right) < \infty;$$

platnost první nerovnosti ověříme tak, že podle de l'Hôpitalova pravidla vypočítáme

$$\lim_{\sigma\to 0+} I(0) = \lim_{\sigma\to 0+} \frac{\sqrt{\sigma-1} - \sigma \operatorname{arctg}\sqrt{\sigma-1}}{\sqrt{(\sigma-1)^3}} = -\tfrac{2}{3}$$

a dále

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} I(0) = \frac{1}{2(\sigma-1)^2}\left((2-\sigma)\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\sigma-1}}{\sqrt{\sigma-1}} - 1\right) < 0$$

pro $\sigma > 0$. Označme dále

$$\alpha_e = -I(0) \quad \text{a} \quad \omega_e = \lim_{r\to r_m-} I(r).$$

Pak je $\alpha_e > 0$, $\omega_e > 0$, $r(-\alpha_e) = 0$, $r(\omega_e) = r_m$ a podle první rovnosti v (5.71) je

$$\lim_{\tau\to-\alpha_e+} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = \lim_{r\to 0-} \sqrt{\frac{\sigma}{r} + 1 - \sigma} = \infty, \qquad \lim_{\tau\to\omega_e-} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = \lim_{r\to r_m-} \sqrt{\frac{\sigma}{r} + 1 - \sigma} = 0.$$

To znamená, že funkce r roste z nulové hodnoty v čase $\tau = -\alpha_e$ ke konečné hodnotě r_m v konečném čase $\tau = \omega_e$ a její derivace přitom klesá z nekonečna k nule. Rovnost (5.73) tedy nepopisuje úplné řešení úlohy (5.69), (5.68).

Řešení úlohy (5.69), (5.68) se $\sigma > 1$ prodloužíme za bod ω_e tak, že budeme řešit rovnici (5.69) s novou počáteční podmínkou

$$t(\omega_e) = r_m, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(\omega_e) = 0. \tag{5.75}$$

Pro zjednodušení zápisu nejprve posuneme počátek času do bodu ω_e, tj. zavedeme novou nezávisle proměnnou s vztahem $s = \tau - \omega_e$. Pak je

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}^2\tau}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}\right)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{\sigma}{2r^2}.$$

Úloha (5.69), (5.75) se tedy transformuje na úlohu

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{\sigma}{2r^2}, \quad r(0) = r_m, \ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}(0) = 0. \tag{5.76}$$

Uvažujme nyní funkci q nezávisle proměnné s definovanou vztahem $q(s) = r(-s)$. Pak je $q'(s) = -r'(-s)$, $q''(s) = r''(-s)$, takže funkce q splňuje vztahy

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{\sigma}{2q^2}, \quad q(0) = r_m, \ \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}(0) = 0.$$

Funkce $q = q(s)$ je řešením stejné počáteční úlohy (5.76) jako funkce $r = r(s)$. Z jednoznačnosti řešení úlohy (5.76) nyní plyne, že $r(s) = q(s) = r(-s)$, tedy že řešení této úlohy je funkce sudá.

Z provedené úvahy můžeme usoudit, že řešení $r = r(\tau)$ úlohy (5.69), (5.68) se $\sigma > 1$ lze prodloužit na interval $[\omega_e, 2\omega_e + \alpha_e)$ a přitom bude platit $r(\omega_e + s) = r(\omega_e - s)$ pro každé $s \in (0, \alpha_e + \omega_e)$, tj. graf funkce r bude symetrický kolem osy $\tau = \omega_e$.

Úplné řešení $r = r(\tau)$ úlohy (5.69), (5.68) se $\sigma > 1$ je tedy definováno na intervalu $(-\alpha_e, 2\omega_e + \alpha_e)$. Přitom

$$r(-\alpha_e) = 0 = r(2\omega_e + \alpha_e), \quad r(\omega_e) = r_m,$$

funkce r je konkávní, rostoucí na intervalu $(-\alpha_e, \omega_e]$ a klesající na intervalu $[\omega_e, 2\omega_e + \alpha_e)$. Dostáváme tak stáří Vesmíru, dobu jeho expanze a dobu jeho existence

$$A_e = \frac{\alpha_e}{H}, \quad \Omega_e = \frac{\omega_e}{H}, \quad \text{a} \quad T_e = \frac{2(\alpha_e + \omega_e)}{H}$$

(v uvedeném pořadí).

Je-li současná hustota Vesmíru větší než hustota kritická, pak Vesmír expanduje z počáteční singularity v čase A_e před současností. Jeho expanze se zpomaluje, v jistém okamžiku v budoucnosti se zastaví a vesmír se bude smršťovat až do singularity konečné (big crunch). Doba trvání tohoto procesu je T_e. Takový Vesmír se nazývá *eliptický*.

Počáteční úlohu (5.70) pro implicitní diferenciální rovnici jsme řešili vyřešením rovnice vzhledem k derivaci, tj. převedením implicitní rovnice na explicitní. Alternativně bychom úlohu (5.70) mohli řešit bezprostředně metodou 2.1.1 pro řešení implicitní rovnice. Řešení bychom pak dostali v parametrickém tvaru.

Povšimněme si, že znalost gravitační konstanty G, současné hodnoty Hubbleovy konstanty H a současné hustoty Vesmíru ϱ_0 umožňuje odhadnout stáří Vesmíru a v případě Vesmíru eliptického i dobu jeho trvání. O velikosti Vesmíru však studovaný model neříká nic; tu lze odhadovat až při použití rovnic obecné relativity.

Skutečnost, že expanzi Vesmíru a Hubbleovu zákonu vzdalování galaxií, obvykle vysvětlovaným na základě Einsteinových rovnic obecné relativity, lze v hlavních rysech porozumět již v rámci Newtonovy teorie gravitace, ukázali angličtí kosmologové Arthur Milne (1896–1950) a William McCrea (1904–1999):

Milne E.A. A Newtonian Expanding Universe. *Quaterly Journal of Mathematics* 1934, vol. 5, p. 64–72.
McCrea W.H., Milne E.A. Newtonian Universes and the Curvature Space. *Quaterly Journal of Mathematics* 1934, vol. 5, p.73–80

Za zmínku stojí také to, že E. A. Milne výrazně preferoval nekonečný vesmír, který dává prostor neomezenému počtu evolučních experimentů, které Bůh (nebo božská bytost) provádí. Tomuto tématu věnoval např. knihu

Milne E.A. *Modern Cosmology and the Christian Idea of God.* Clarendon, Oxford 1952.