

# Domáca úloha M5858 č. 8

## 1. Singulárne body autonómnych systémov

Nájdite singulárne body lineárneho diferenciálneho systému (všeobecne nehomogénneho)

$$\mathbf{x}' = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}; \quad \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2.$$

Prostredníctvom Jacobiho matice určte o aký singulárny bod sa jedná v prípade, že matica tohto systému je regulárna. Určte vektorové pole na nulkinách u týchto systémov.

$\alpha)$

$$\begin{aligned}x_1' &= 3x_1 - 18x_2 \\x_2' &= 2x_1 - 9x_2\end{aligned}$$

čo je možné ekvivalentne prepísať v maticovej notácii

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{tj. } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$$

$\beta)$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\gamma)$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\delta)$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon)$  Transformujte súradnice tohto lineárneho nehomogénneho dif. systému tak, aby sa singulárny bod previedol do počiatku súradnej sústavy.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (-1, -2, 3, 6)^T$$

## 2. Modifikácia základného rastového modelu

Uvažujme rastový model populácie  $N = N(t)$  pre  $t \geq 0$  v tvare

$$N'(t) = \mu(N)N(t).$$

Funkcia  $\mu$  predstavuje špecifickú mieru rastu nejakej populácie  $N$ .

- a) Vymyslite funkciu  $\mu$  tak, aby spĺňala vami vopred dané predpoklady, ktoré by navyše mohli byť realistické (tj. skutočne by sa tak mohla istá populácia správať!).
- b) Pokúste sa nájsť analytickú funkciu  $\mu$  tak, aby spĺňala vami dané predpoklady z bodu a).

V oboch prípadoch potom urobte kvalitatívnu analýzu modelu rozborom stacionárnych bodov a načrtnite fázový portrét pre tento model.

### **HINT:**

Postupujte obdobne ako u rastového modelu klimaxovej populácie preberanom na cvičeniach.