Domáca úloha M5858 č. 9

Nájdite singulárne body lineárneho diferenciálneho systému (obecne nehomogénneho)

$$\mathbf{x}' = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}; \quad \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2,$$

a za pomoci Jacobiho matice určte o aký singulárny bod sa jedná v prípade, že matica tohto systému je regulárna.

1.
$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 - 18x_2 \\ x_2' &= 2x_1 - 9x_2 \end{aligned}$$

čo je možné ekvivalentne prepísať v maticovej notácii

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{tj.} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$$

2.
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4.
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Transformujte súradnice tohto lineárneho nehomogénneho dif. systému tak, aby sa singulárny bod previedol do počiatku súradnej sústavy.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = (-1, -2, 3, 6)^T$$

Rozhodnite o existencii a jednoznačnosti riešenia systému dif. rovníc(obecne nelineárnych), určte nulkliny, typ singulárnych bodov a načrtnite ich fázový portrét.

1.

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= y^2 - 6x^2y + x^4 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x' &= 4 - 2y \\ y' &= 12 - 3x^2 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x^2 \\ y' &= by, \qquad\qquad \lambda, b > 0 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

HINT: Na znázornenie fázového portrétu pre tento systém si pomôžte stanovením definičného oboru rovnice trajektórie určenej vzťahom:

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

5. Nech funkcia x je riešením počiatočnej úlohy

$$x' = x, \quad x(\alpha) = \beta.$$

Pre aké parametre α a β reálne, je riešenie x tejto rovnice klesajúce, rastúce, periodické?

HINT: Nie je nutné rovnicu riešiť(často ani nedokážeme!). Stačí si nakresliť funkciu zostavenú z pravej strany našej diferenciálnej rovnice, tj. $y = x$. Odtiaľ je zrejmé, že riešenie x tejto rovnice klesá pre $\beta < 0$ a naopak rastie pre $\beta > 0$, čo je zrejmé z grafu $y = x$. V prípade $\beta = 0$ je riešenie $x \equiv 0$. Dokážte, že parameter α nehrá pre asymptotiku riešenia x, žiadnu rolu. Vysvetlite, čím je táto skutočnosť spôsobená. Položte si otázku! Bolo by možné postupovať obdobne i v prípade, že uvažovaná rovnica by mala tvar

$$x' = x + t?$$

Uvažujme model **spoločenstva dravec-korisť s vnútrodruhovou konkurenciou**.

Zaveďme označenie:

N_1 ⋯ veľkosť populácie koristi

N_2 ⋯ veľkosť populácie dravca

ϵ_1 ⋯ špecifická miera rastu populácie koristi

ϵ_2 ⋯ špecifická miera mortality populácie dravca

α ⋯ miera vnútrodruhovej konkurencie koristi

γ_1 ⋯ špecifická miera ničenia populácie koristi dravcom

κ ⋯ efektívnosť premeny zničenej koristi na populáciu dravca

Predpokladáme, že všetky konštanty sú kladné a nech $\gamma_2 := \kappa\gamma_1$. Rovnako ako u klasického Lotka-Volterrovho modelu dravec-korisť sa predpokladá, že dravec a korisť žijú izolovane od ostatných druhov a že dravec sa živí výhradne korisťou. Keby bol od koristi izolovaný, postupne by vymrel, tj. $\epsilon_2 > 0$. Tiež predpokladáme, že korisť má dostatočné množstvo potravy na prežitie, tj. $\epsilon_1 > 0$.

Potom model spoločenstva dravec-korisť s vnútrodruhovou konkurenciou má tvar

$$\begin{aligned} N_1' &= N_1(\epsilon_1 - \alpha N_1 - \gamma_1 N_2), \\ N_2' &= N_2(-\epsilon_2 + \gamma_2 N_1). \end{aligned}$$

ZADANIE: Rozhodnite o existencii a jednoznačnosti riešenia tohoto systému, určte nulkliny/sing. body, typ singulárnych bodov a načrtnite fázový portrét za predpokladu:

$$\alpha\epsilon_2 > \epsilon_1\gamma_2.$$

Pokúste sa túto situáciu zachytenú na fázovom portréte interpretovať na biologickej úrovni.

Preveďte lineárny systém

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

do polárnych súradníc (polárne súradnice $x(t) = \rho(t)\sin\varphi(t)$, $y(t) = \rho(t)\cos\varphi(t)$).

Pokúste sa stanoviť typ singulárneho bodu $[0,0]$ rozborom všetkách možností, ktoré môžu nastať pri rôznych voľbách konštant $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Poznámka. V prípade, že $c = -b$ a $d = a$, systém má singulárny bod typu OHNISKO.

1. Stanovte typ singulárneho bodu systému:

$$\begin{aligned} x' &= x^2 - y^2 \\ y' &= 2xy \end{aligned}$$

   HINT: Preveďte systém do polárnych súradníc a následne vypočítajte rovnicu trajektórie, ktorá ukáže typ singulárneho bodu (sing. bod je typu **dipól**).

Transformujte súradnice tohto lineárneho nehomogénneho dif. systému tak, aby sa singulárny bod previedol do počiatku súradnicovej sústavy a následne určte typ tohto singulárneho bodu.

2.

$$\begin{aligned} x' &= x - 2y - 1 \\ y' &= 5x - y - 23 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} x' &= x + y - 2 \\ y' &= -2x + 3y - 1 \end{aligned}$$

4. Nakreslite fázový portrét pre systém

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x^2 \end{aligned}$$

   HINT: Vypočítajte rovnicu trajektórie a určte jej definičný obor.

5. Dokážte, že singulárny bod $[0, 0]$ je izolovaný a následne určte jeho typ.

   a)

$$\begin{aligned} x' &= e^{x+y} - \sin x - 1 \\ y' &= \ln(1 - x^2) + x + y \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} x' &= x - y + 1 \\ y' &= -\sin x \end{aligned}$$

   HINT: Na príklad 5. aplikujte vetu o variačnej matici(linearizácia všeobecného systému pomocou Jacobiho matice vyčíslenej v singulárnom bode)!

6. Rozhodnite o existencii a jednoznačnosti riešenia, určte nulkliny, singulárne body, smerové vektorové pole a načrtnite tvar trajektórii systému

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x^3 + 4xy \end{aligned}$$

   Ďalej dokážte, že množiny

$$\begin{aligned} P_1 : &\quad y = \tfrac{x^2}{2+\sqrt{2}} \\ P_2 : &\quad y = \tfrac{x^2}{2-\sqrt{2}} \end{aligned}$$

   sú invariantné, na druhú stranu ukážte, že množina $P_3 : y = 0$ invariantná nieje.

   HINT: Pre množinu P_3 stačí ukázať, že po dosadení do systému za $y = 0$ je pre $x \in \mathbb{R}$ systém nenulový. Množiny P_i, $i = 1, 2$ sa dokážu analogicky. Stači ukázať, že

$$(y - kx^2)' = y' - 2kxx' = -x^3 + 4xy - 2kxy = 0$$

   pre $y = kx^2 \quad \& \quad k_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. □

   Poznámka: Tento príklad ukazuje, ako je niekedy možné z tvaru kriviek nulklín odhadnúť všeobecný tvar invariantnej množiny, ktorá následným dosadením do systému vygeneruje podmienky kladené na koeficienty invariantnej množiny(tj. množina v ktorej $\forall$každá trajektória ktorá začne, alebo sa do tejto množiny dostane, už ju neopustí pre čas $t \to \pm\infty$).

Nájdite prvých pár členov Picardovej postupnosti postupných aproximácii pre systém:

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 - 18x_2 := F(x,y), \\ x_2' &= 2x_1 - 9x_2 := G(x,y), \end{aligned}$$

s počiatočnými podmienkami $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2$.

HINT: Použite rekurentné Picardove formulky pre system:

$$\begin{aligned} X_{n+1}(t) &= x_0 + \int_{x_0}^{t} F(x_n(s), y_n(s), s)\mathrm{d}s, \\ Y_{n+1}(t) &= y_0 + \int_{y_0}^{t} G(x_n(s), y_n(s), s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Zamyslite sa nad tým, ako by sa hľadala Picardova postupnosť postupných aproximácii pre rovnicu druhého rádu:

$$ax'' + bx' + cx = t, \quad a, b, c > 0,$$

spĺňajúca počiatočné podmienky $x(0) = 0 = x'(0)$.

HINT: Preveďte túto rovnicu na systém za pomoci substitúcie $y = x'$ a riešte rovnako ako v predchádzajúcom príklade.

Hodně štěstí u zkoušek.

☺

Mgr. Milan Bačík
doc. RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.