Domáca úloha M5858 č. 4

Stanovte typ diferenciálnych rovníc, tj. separovateľná, …, exaktná/int.faktor, Clairautova a nájdite ich obecné/singulárne riešenie.

1. $$y = (y' - 1)\exp(y').$$

2. $$y = \exp(\frac{xy'}{y}).$$

3. $$xy' - y = \ln y'.$$

4. $$y' = \frac{2x\cos^2 y}{x^2 \sin 2y - \sin y}.$$

5. $$y' = \frac{y\cos x - x\sin y}{\frac{x^2}{2}\cos y - \mathrm{tg} y - \sin x}.$$

6. $$\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\mathrm{d}x = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} + 1\right)\mathrm{d}y.$$

7. $$y + xy' = \frac{yy'}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

8. $$x^2 y^2 y' + xy^3 = 1.$$

9. $$y' + y + y^2 e^x = 0.$$

10. $$y' \cos x = (y + 2\cos x)\sin x.$$

11. $$2y\mathrm{d}x + (y^2 - 4x)\mathrm{d}y = 0.$$

12. $$(2x + y + 1)\mathrm{d}x - (4x + 2y - 3)\mathrm{d}y = 0.$$

13.

$$y' = -\frac{2xy^2}{3x^2y+4}.$$

HINT: Pokúste sa nájsť funkciu $R = R(x)$ $(R = R(y))$ ako integračný faktor, príslušnej "kvázi"exaktnej rovnice.

Postup: Zvoľte si ľubovoľnú závislosť funkcie R a prenásobte ňou príslušné funkcie F a G tejto rovnice zapísanej v tvare jedna-formy (vo vektorovom tvare). Nové funkcie $\overline{F}(x,y) := F(x,y)R(x/y)$, $\overline{G}(x,y) := G(x,y)R(x/y)$ musia spĺňať podmienku pre existenciu kmeňovej funkcie $\Phi(x,y) : \mathrm{d}\Phi = \overline{F}\mathrm{d}x + \overline{G}\mathrm{d}y$ plynúcej zo Schwartzovej vety (o zámene parciálnych derivácií pre spojité funkcie), tj.

$$\boxed{\frac{\partial\overline{F}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\overline{G}(x,y)}{\partial x}}$$

Táto identita vygeneruje diferenciálnu rovnicu pre neznámu funkciu $R = R(?)$. Jej riešenie (ak je možné ho explicitne odvodiť) je potom náš integračný faktor prevádzajúci pôvodnú rovnicu na **exaktnú**!

pozn. *Niekedy je možné odvodiť int. faktor v oboch prípadoch závislosti premenných funkcie R. Potom záleží už len na našej schopnosti vyriešiť integrály, ktoré sa touto cestou objavia.*

doc. RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.
Mgr. Milan Bačík