

Domáca úloha M5858 č. 5

Nájdite riešenia (homogénnych/nehomogénnych) lineárnych diferenciálnych rovníc n-tého rádu s konštantnými koeficientami.

Zaveďme označenie $y^{(n)}(x) := \frac{d^n y}{dx^n}$.

1.

$$y''' - 9y'' + 26y' - 24y = 0$$

2.

$$4y''' - 4y'' + y' = 0$$

3.

$$y^{(4)} + 6y^{(3)} + 9y^{(2)} = 0$$

4.

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y^{(3)} - 6y^{(2)} = 0$$

5.

$$y''' + 7y'' + 19y' + 13y = 0$$

6.

$$y'' + y = \frac{\sin x (2 + \cos^2 x)}{\cos^3 x}$$

7.

$$y'' - 2y' = -4e^{4x} \sin e^{2x}$$

8.

$$y'' - 2y' = 2 \cos 2x$$

9.

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1}$$

10.

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$$

11.

$$y'' + y = \frac{2}{\cos^3 x}$$

12.

$$y'' + 3y' + 2y = (e^x + 1)^{-1}$$

13. V elektrickom okruhu so striedavým prúdom je pri vhodne použitých jednotkách kapacity kondenzátora, ohmického odporu indukčnej cievky a samoindukčnosti hodnota elektrického prúdu v čase t zadaná diferenciálnou rovnicou:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = \sin t.$$

pozn. V špeciálnom prípade budú konštanty c_1, c_2 určené pomocou počiatočných podmienok, napríklad ak vieme hodnotu elektrického prúdu v čase t_0 a to, ako sa mení. Všimnime si ale, že obe fundamentálne riešenia tejto rovnice konvergujú pre rastúci čas t k nule a to pomerne rýchlo, tj.

$$c_1e^{-t} \ \& \ c_2e^{-3t} \longrightarrow 0 \ \text{pre } t \rightarrow \infty.$$

Takže pre akékoľvek hodnoty počiatočných podmienok stacionárny stav (ustálený stav pre $t \rightarrow \infty$) má tvar $\frac{1}{10} [\sin t - 2 \cos t]$.