Domáca úloha M5858 č. 6

Nájdite tvar partikulárneho riešenia príslúchajúcemu k daným lineárnym diferenciálnym rovniciam s konštantnými koeficientami $n-$tého rádu (iba všeobecne bez určenia koeficientov).

1. $$y'' + 2y' = 2x^3$$

2. $$y'' + 3y' = xe^{-3x}$$

3. $$y'' - 4y' + 4y = 1 + x^2e^{2x}$$

4. $$y'' - 4y = x^2 + 4e^{2x}$$

5. $$y'' + y' - 6y = xe^{-2x} + e^{-3x}$$

6. $$y'' - 3y' = 6x + e^{3x}\sin x$$

7. $$y'' + y = (x^2 + 1)\sin x$$

8. $$y'' - 6y' + 13y = 13e^{3x}\cos 2x$$

HINT: Na riešenie sa aplikuje **Metóda neurčitých koeficientov** (Veta o špeciálnej pravej strane). Alternatívne sa veta môže vysloviť nasledovne:

a) Pre rovnice s pravou stranou v tvare

$$f(x) = Q_m(x)e^{\alpha x}$$

kde $Q_m(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$, je partikulárne riešenie tvaru

$$Y_0 = x^\rho \overline{Q}_m(x)e^{\alpha x}$$

kde $\overline{Q}_m(x)$ je neznámy polynóm rovnakého stupňa ako polynóm $Q_m(x)$. Číslo $\rho = 0$ v prípade, ak α nie je koreňom charakteristickej rovnice. Ak α je koreň charakteristickej rovnice, potom ρ je rovné násobnosti tohto koreňa.

b) Pre rovnice s pravou stranou v tvare

$$f(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$$

je partikulárne riešenie v tvare

$$Y_0 = x^\rho e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),$$

kde $\rho = 0$, ak $\alpha + \beta i$ nie je koreň charakteristickej rovnice. V opačnom prípade je ρ rovné násobnosti koreňa $\alpha + \beta i$. Polynómy P_m, Q_m sú rovnakého stupňa m, kde m je rovné väčšiemu zo stupňa polynómov P, Q.

Neurčité koeficienty funkcie Y_0 v oboch prípadoch získame tak, že partikulárne riešenie Y_0 dosadíme do danej rovnice a porovnáme strany!

Nájdite riešenie **Eulerovej diferenciálnej rovnice**.

1.
$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

2.
$$x^3y''' + xy' - y = 0$$

3.
$$x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 15x^2y'' + 9xy' + 16y = 0$$

4.
$$x^3y''' + 6x^2y'' + 6xy' = 12\ln^2 x$$

HINT: Na tento typ rovnice najskôr aplikujte substitúciu $x = e^t$, ktorá príslušnú rovnicu prevedie na lineárnu s konštantnými koeficientami, tj.

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dot{y}(t)\frac{1}{x}$$

$$y''(x) = ... = \frac{1}{x^2}(\ddot{y}(t) - \dot{y}(t))$$

$$\vdots$$

doc. RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.
Mgr. Milan Bačík