ÚLOHA LIN. PROGRAMOVÁNÍ V ROVINĚ

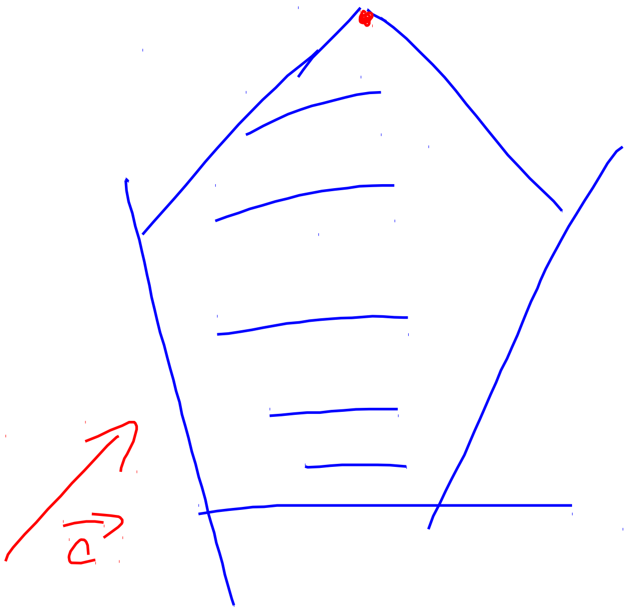
Najít bod, kde funkce $f(x,y) = c_1 x + c_2 y$ nabývá svého maxima při podmínkách

$$a_{11}x + a_{12}y \geq b_1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n1}x + a_{n2}y \geq b_n \quad n$$

<u>Geometricky</u>: v průniku polorovin $\bigcap_{i=1} h_i$ hledáme maximum funkce f dané vektorem $\vec{c}$.



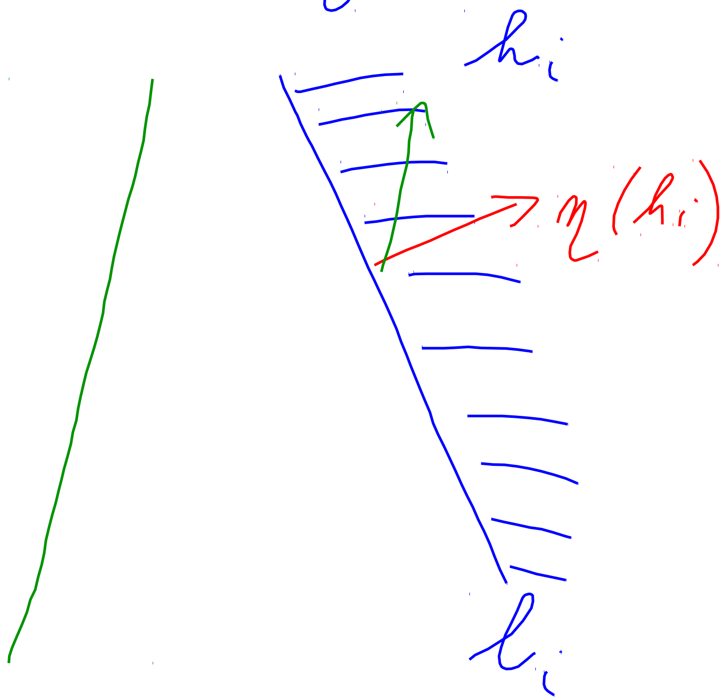
Varianta omezené byla minule.

Předpoklad: existují poloroviny h_1 a h_2 taky, že f je omezená na $h_1 \cap h_2$.

Neomezená úloha lin. programování může mít jako výstup polopřímku v průniku $\bigcap_{i=1}^{n} h_i$, na které f roste. Tato polopřímka je dána směrovým vektorem $\vec{d}$ a nejnižším počátečním bodem p_n.

Označme: $\eta(h_i)$ je vnitřní normála hraniční přímky poloroviny h_i

$H = \{h_1, h_2, \dots h_n\}$



Věta: Úloha lin. programování je neomezená (tj. v $\bigcap_{i=1}^{n} h_i$ existuje polopřímka ve směru vektoru $\vec{d}$, na které f roste) právě když existuje vektor $\vec{d}$ s vlastnostmi

(1) $\langle \vec{d}, \vec{c} \rangle > 0$

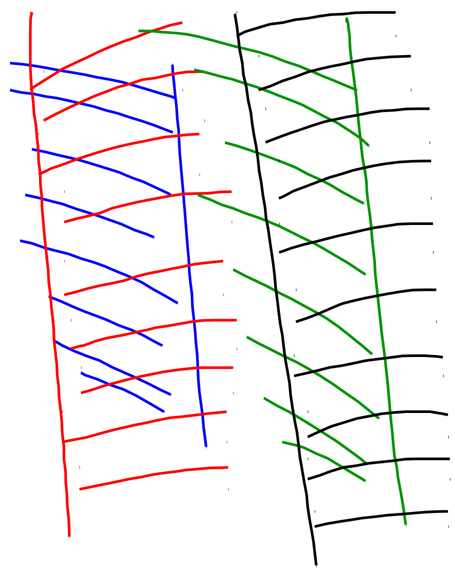
(2) $\langle \vec{d}, \eta(h_i) \rangle \geq 0$

pro všechna $i = 1, 2, \dots n$.

(3) Uvažujme $H' = \{h_i \in H;\ \langle \eta(h_i), \vec{d}\rangle = 0\}$

pak $\bigcap H' \neq \emptyset$

Mějme $\vec{d}$. H' jsou poloroviny, kde hraniční přímky jsou rovnoběžné s $\vec{d}$.

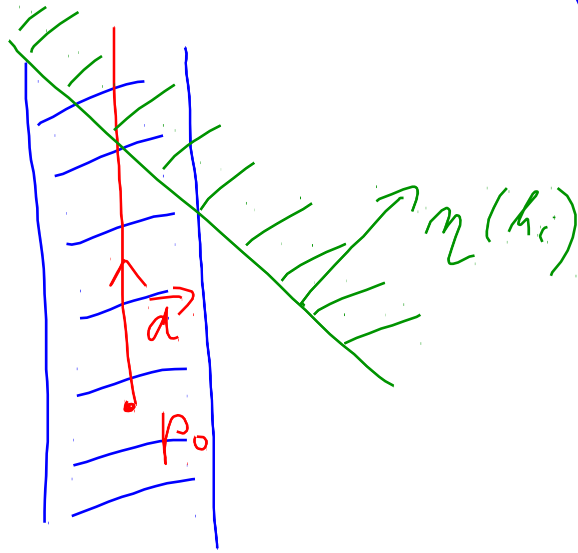


Je-li $\bigcap H' \neq \{\}$, vezmeme $p_0 \in \bigcap H'$.

Potom polopřímka

$$p_0 + \lambda \vec{d},\ \lambda \geq 0$$

leží v $\bigcap H'$, a že pro $\lambda \gg 0$ protíná ostatní poloroviny.



Od určitého λ_0 je

$$p_0 + \lambda \vec{d}, \quad \lambda \geq \lambda_0$$

podmnožina ležící v průniku $\bigcap H$ všech polrovin.

$\bigcap H'$

Jestliže $\vec{d}$ zvolíme a $\bigcap H' = \emptyset$, pak $\bigcap H = \emptyset$.

Jestliže $\vec{d}$ neexistuje, pak při jeho hledání narazíme na polroviny h_i, h_j takové, že f je omezená na $h_i \cap h_j$ a můžeme řešit omezenou úlohu.

Hledání $\vec{d}$, které splňuje $\langle \vec{d}, \vec{c} \rangle > 0$

a $\langle \vec{d}, \eta(h_i) \rangle \geq 0$,

převádíme řešením 1-D úlohy lin. programování.

Při hledání vektoru $\vec{d}$ nezáleží na jeho velikosti.

Proto hledejme $\vec{d}$ ve tvaru

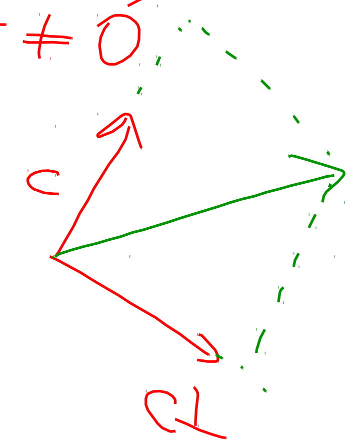
$$\vec{d} = s\vec{c} + t\,\vec{c}^{\perp}$$

$$\vec{c}^{\perp} \perp \vec{c}$$

$$\vec{c}^{\perp} \neq \vec{0}$$

Musí platit $\langle \vec{d}, \vec{c} \rangle > 0$

$$\langle s\vec{c} + t\,\vec{c}^{\perp}, \vec{c} \rangle = s\,\langle \vec{c}, \vec{c} \rangle > 0$$



Stačí brát $s > 0$, konkrétně $s = 1$.

Proto hledáme $\vec{d} = \vec{c} + t\,\vec{c}^{\perp}$

Pro h musí platit

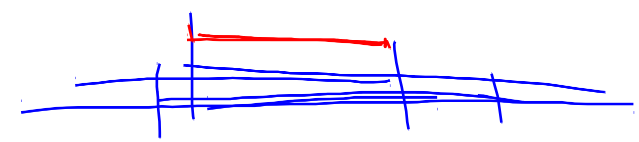
$$\langle \vec{c} + t\,\vec{c^{\perp}},\ \eta(h_i) \rangle \geq 0$$

Toto vede na nerovnosti

$$A_i t + B_i \geq 0$$

Takže hledáme nejmenší t splňující $A_i t + B_i \geq 0$

$$\max t$$
$$A_i t + B_i \geq 0$$



Najít t je úloha 1-D lin. programování.

Jestliže je množina přípustných $A_i t + B_i \geq 0$ prázdná, dostaneme dvě poloroviny h_j, h_k ~~pro~~ char. vlastností, že množina

$$A_j t + B_j \geq 0$$
$$A_k t + B_k \geq 0$$

je prázdná.

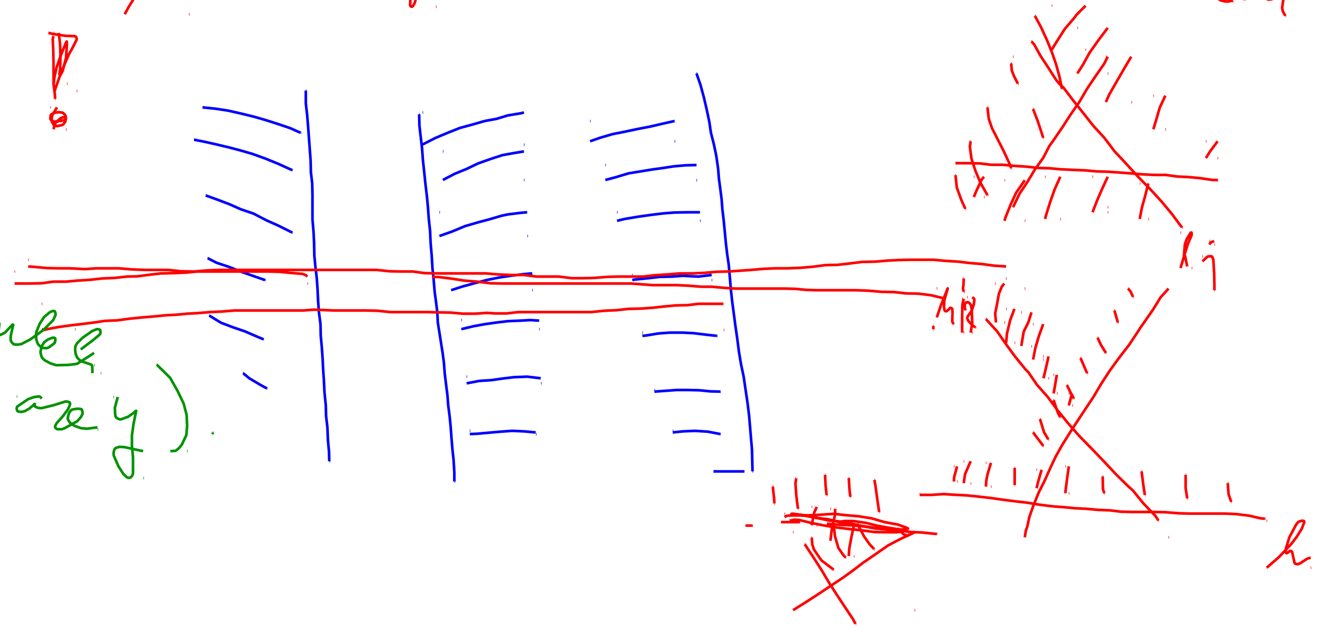
Na příkladu lehčího 2 problému je původní úloha omezená.

Nechť $\vec{d}$ je nalezeno, k němu určíme

$$H'(\vec{d}) = \{ h_i \in H, \langle \vec{d}, \eta(h_i) \rangle = 0 \}.$$

Zjistíme, zda $\cap H' = \emptyset$. To je opět úloha lin. programování v dimenzi 1!

Lze převést na příklad položíme na ose x (na ose y).



ORTOGONÁLNÍ VYHLEDÁVÁNÍ

Databáze .... jednoduché údaje (nechť je jich d)
znázorníme na osy $x_1, x_2, \dots x_d$ v $\mathbb{R}^d$.

Databáze = množina bodů v $\mathbb{R}^d$

Obecná úloha ort. vyhledávání v $\mathbb{R}^d$

Je dána množina P bodů v $\mathbb{R}^d$. Najít strukturu na této množině, která pro zadání intervalů

$$[x_1, x_1'],\ [x_2, x_2'],\ \dots\ [x_d, x_d']$$

najde rychle všechny body z P, které leží v

$$[x_1, x_1'] \times [x_2, x_2'] \times \dots \times [x_d, x_d'].$$

Dvě metody

kd-trees   kd-stromy

range trees   range trees

V dimenzi 1 obě metody splývají. Nejdříve se podíváme na tuto dimenzi.

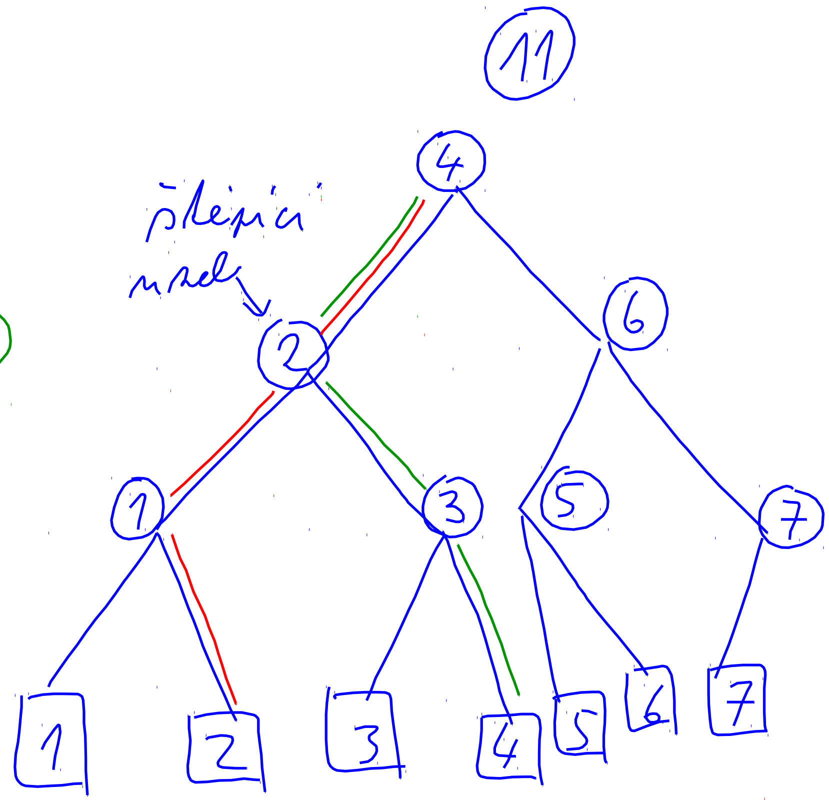
$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ je množina reálných čísel

Pro tuto množinu můžeme postavit vyvážený binární strom, v jehož listech jsou uspořádané (podle velikosti) prvky této množiny.

Dostaneme zadáno x a x', $x \leq x'$, a hledáme prvky P, které leží v $[x, x']$.

$x = 1{,}5$

$x' = 3{,}5$



Každé $x \in \mathbb{R}$ zadává cestu v tomto stromu. x a x' zadávají 2 cesty. Tyto cesty mohou mít společnou část. Poslední uzel na společné části se nazývá <u>štěpící uzel</u>.

ALGORITMUS PRO NALEZENÍ ŠTĚPÍCÍHO UZLU

12

Na obrázku 3 máme

$m = x = 18$

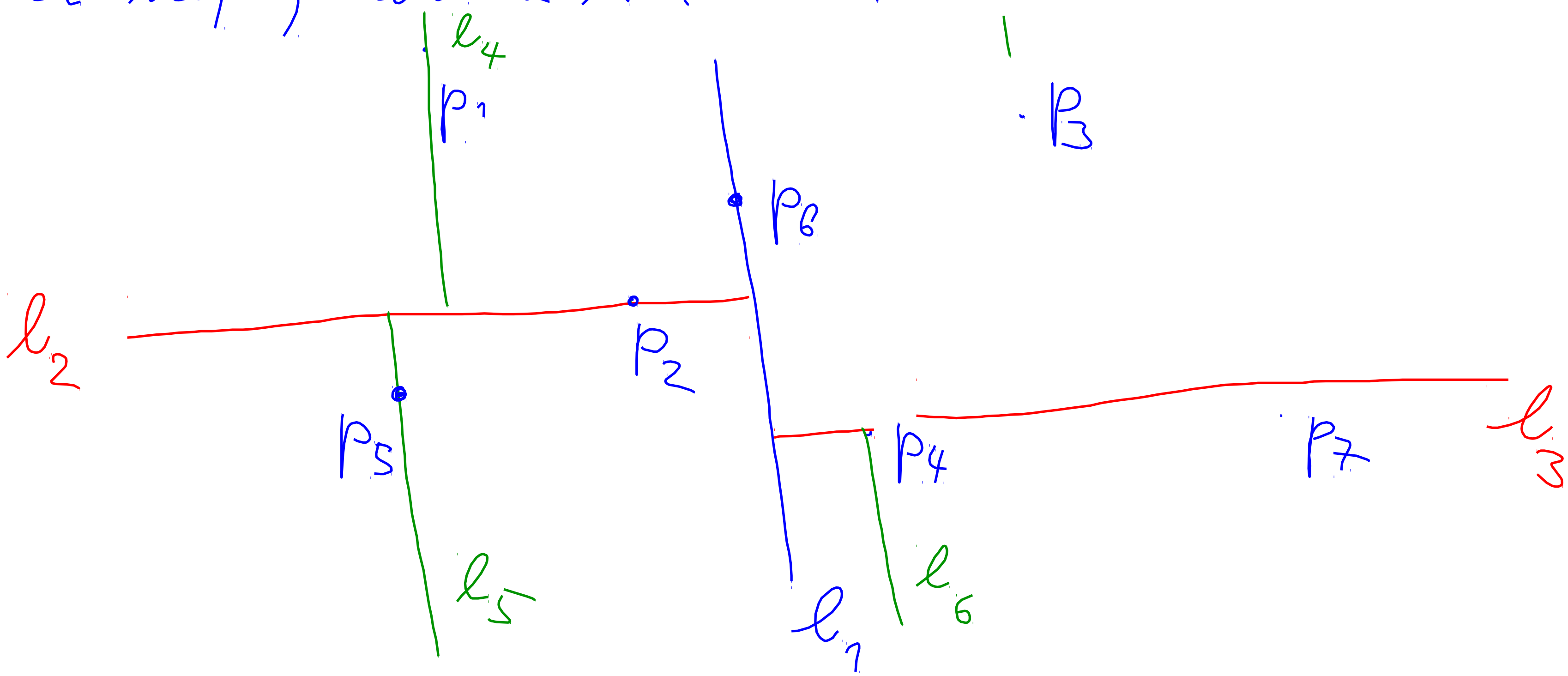
$m' = x' = 85$

Vyhledávací algoritmus na dimenzi 1 je popsán na 23 předn. pdf.

kd – strom v dimenzi 2

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Jedním z těchto bodů vedeme vertikální přímku, která dělí množinu na dvě podmnožiny, jejichž počet prvků je buď stejný nebo se liší o 1.



$P_l = \{p_1, p_2, p_5, p_6\}$ $\quad$ $P_r = \{p_3, p_4, p_7\}$

Dělení z tabule 13 vede ke vzniku kd-stromu: