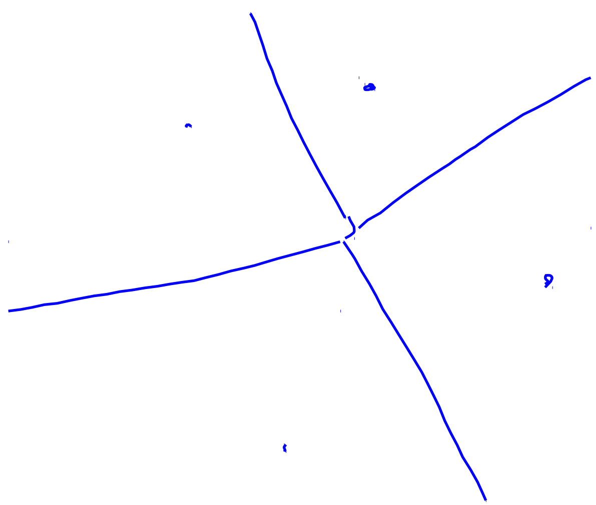
Diagramy Voronoia

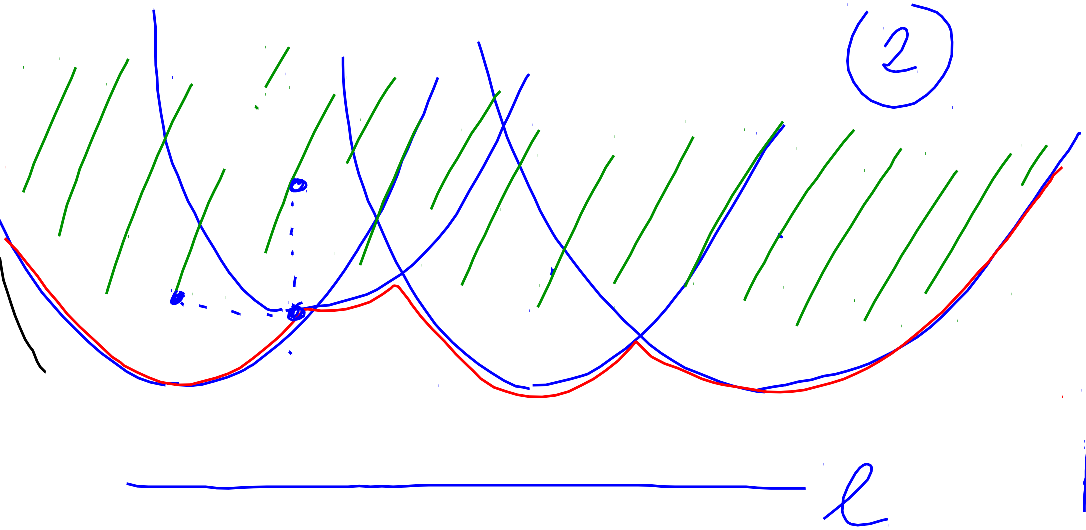
V rovině množina n bodů $P = \{p_1, \dots, p_n\}$

Diagram Voronoia je podrozdělení, kde v každé oblasti leží jeden z bodů množiny P a body této oblasti mají blíže k tomuto bodu, než k ostatním.



Algoritmus zametací přímky

– V-diagram je hotov nad zam. plážovou linií, která je tvořena oblouky parabol.



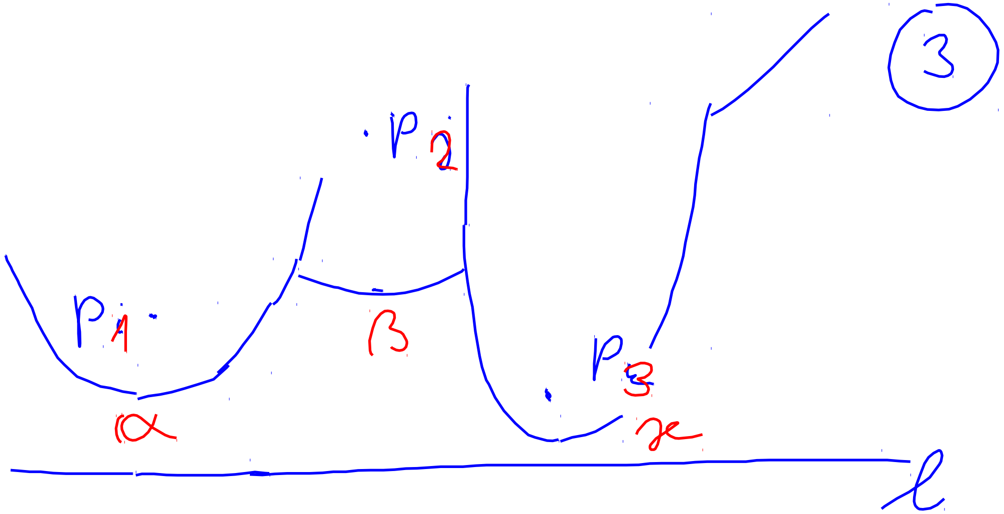
Vyznačený lineární zhora má v úsecích oblouky parabol. Každý oblouk je dán nějakým bodem $p_i \in P$ nad zametací mimikou l.

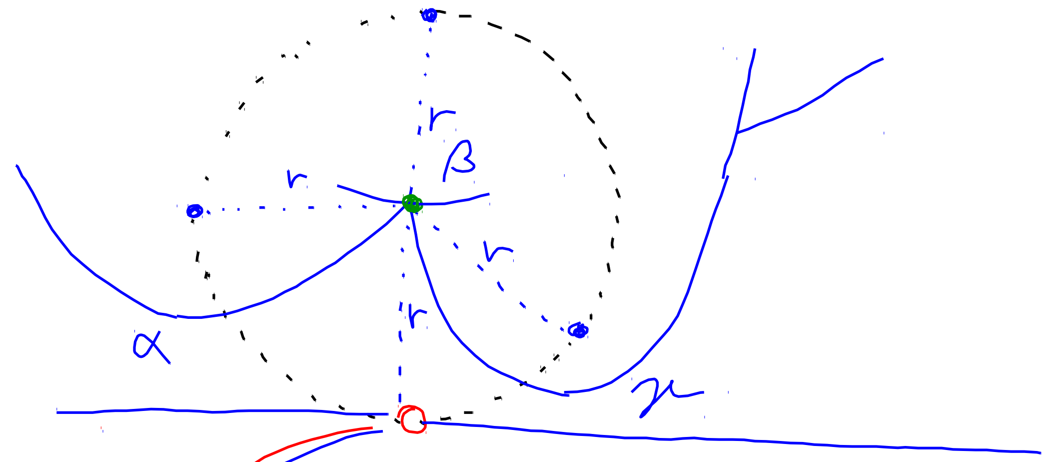
Tam, kde se oblouky parabol v plážové linii protínají, tak je bod hrany V-diagramu.

1 Jak vznikají nové oblouky v plážové linii
– přechodem zam. přímky bodem $p_i \in P$

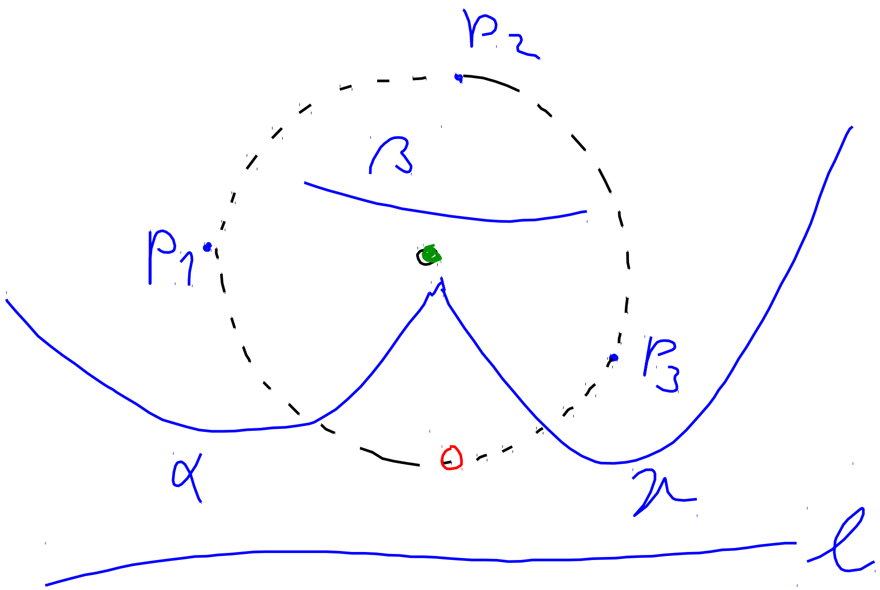
$p_i \in P$ místní událost (site event)

2 Jak zanikají oblouky parabol v plážové linii
– přechodem zam. přímky přes tzv. kruhové události (circle event)





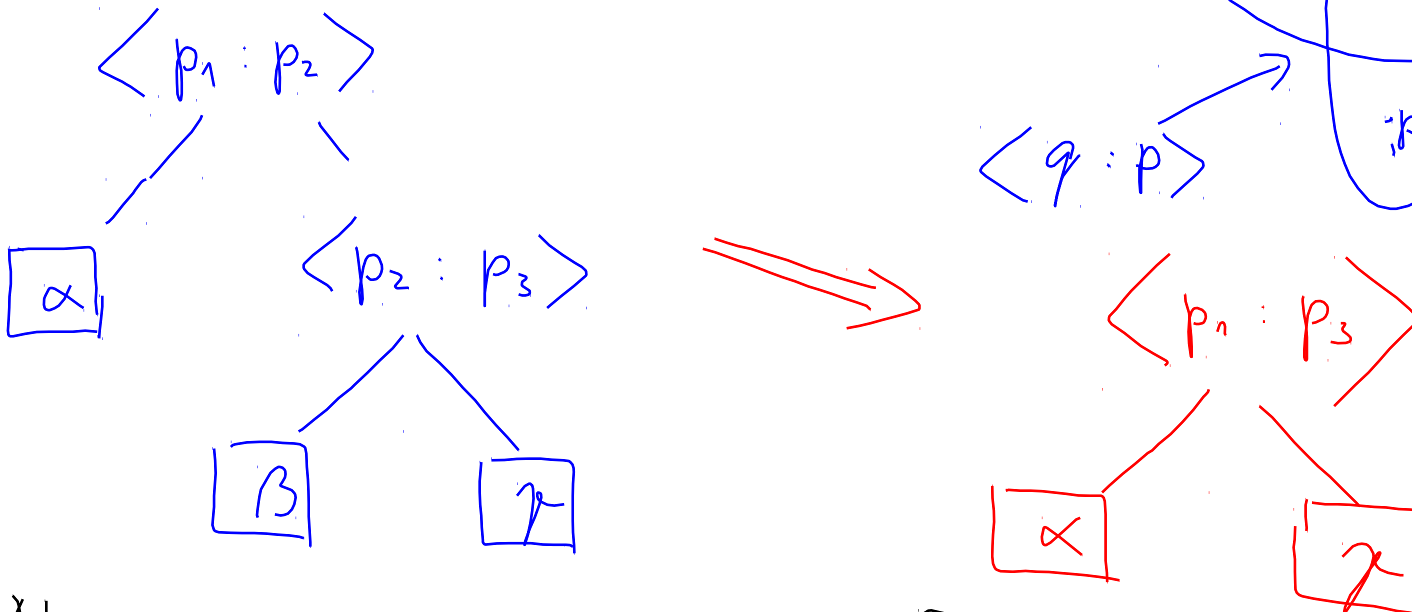
Střed kružnice leží na všech 3 parabolách α, β, γ → kruhová událost

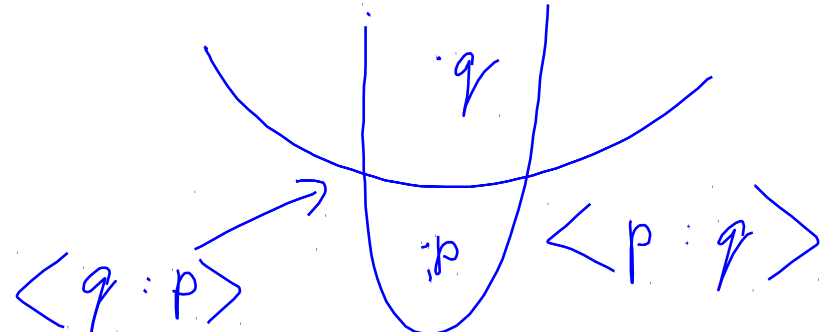


Vezmeme 3 po sobě jdoucí oblouky v plážové linii. Řídícím bodům těchto oblouků opíšeme kružnici. Bod této kružnice s minimální souřadnicí y se nazývá KRUHOVÁ UDÁLOST na oblouk β při dané poloze zametací přímky.

Lemma: Oblouky parabol mizí z plážové linie právě když zametací přímka projde přes jejich kruhovou událost.

Změna ve stromu T





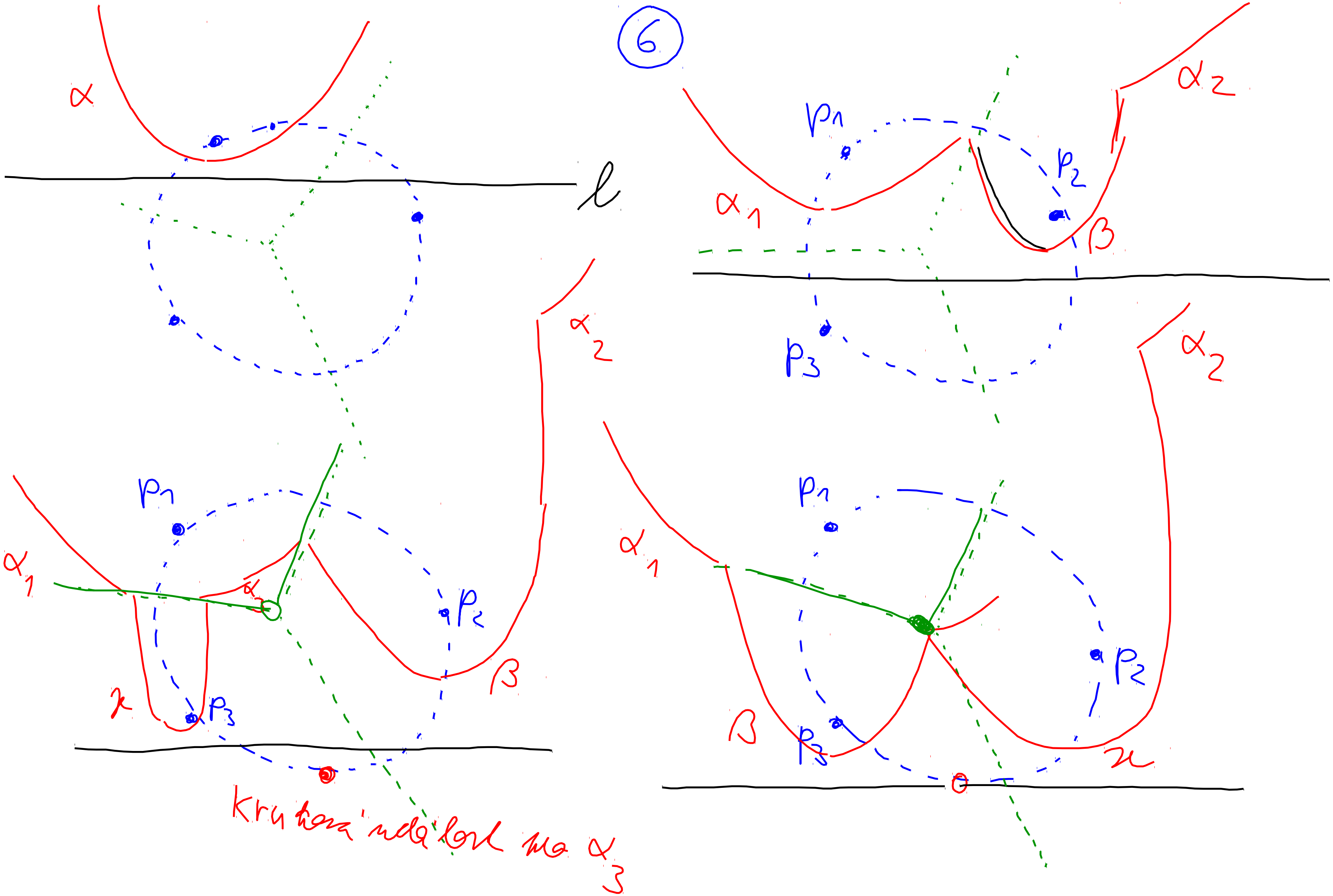
Střed kružnice určující kruhovou událost je uzel V-diagramu.

Algoritmus – na začátku T prázdný strom, fronta událostí bude obsahovat body z množiny P.

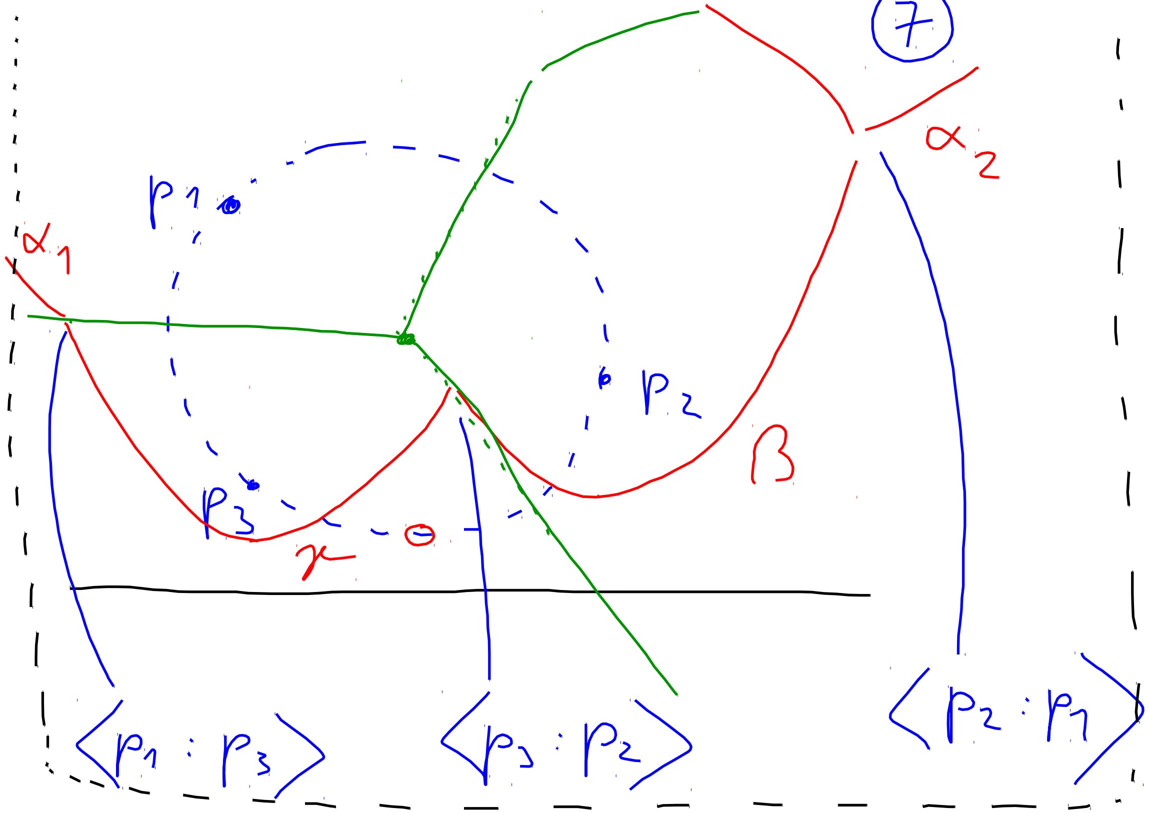
– při příchodu události – v závislosti na tom, zda je místní nebo kruhová – provedeme následující

- přidáme nebo vezmeme oblouk (oblouky) ze stromu T, přibývají hrany ve V-diagramu, nebo uzly.
- z fronty Q odebíráme některé kruhové události jiné tam zase přidáváme. Mění se totiž pořadí oblouků a kruhová událost se váže na 3 po sobě jdoucí oblouky.
- událost, kterou prošla zam. přímka z fronty vypustíme.

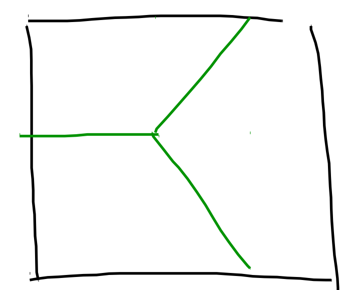
To provádíme tak dlouho, až je fronta Q prázdná.
Strom T však prázdný není.
Aktuální vnitřní uzly stromu T určují hrany V-diagramu, které jsou polopřímky. Ty umožní najít čtverec R, ve kterém leží všechny uzly V-diagramu.


6
α
ℓ
p1
p2
p3
α1
α2
α3
β
γ
Kruhová nedolehl na α3
p1
p2
p3
α1
α2
β
p1
p2
p3
α1
α2
β
γ

7



V-diagram má 1 uzel
a 3 hrany – polopřímky



Algoritmy v zvuk(?)do.pdf

Časová náročnost

Jaký je maximální počet oblouků v plážové linii?

Když procházíme místní událostí přibudou maximálně 2 oblouky

Maximálně bude počet oblouků $2n-1$.

Ve stromu s $2n-1$ uzly, trvají příslušné operace čas

$$O(\log(2n-1)) = O(\log n)$$

Kolik zpracujeme událostí

– každý oblouk jedno vznikne a jedno zanikne

Realizovaných událostí bude řádově n.

V každé události provedeme konečný počet kroků, které trvají čas maximálně $O(\log n)$.

Celková časová náročnost bude $O(n \log n)$.

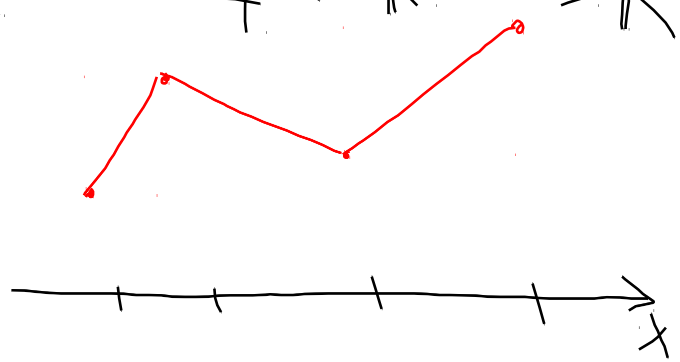
Delaunayova triangulace

Funkce $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

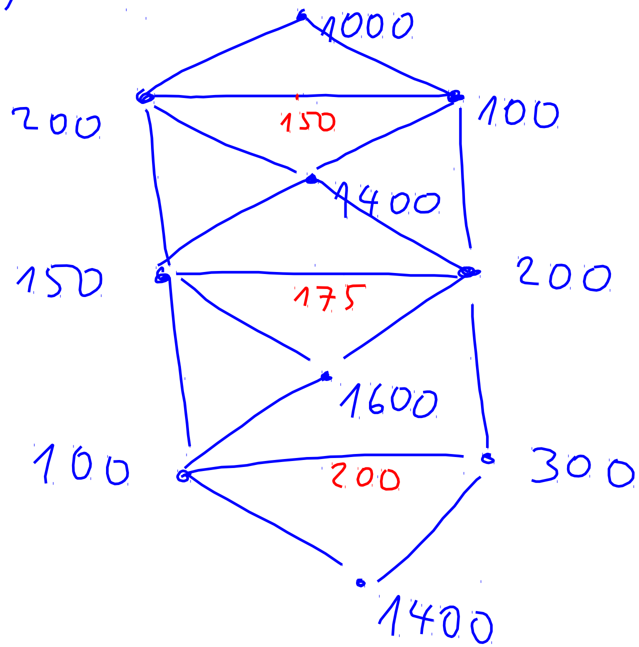
konv. množina omezená

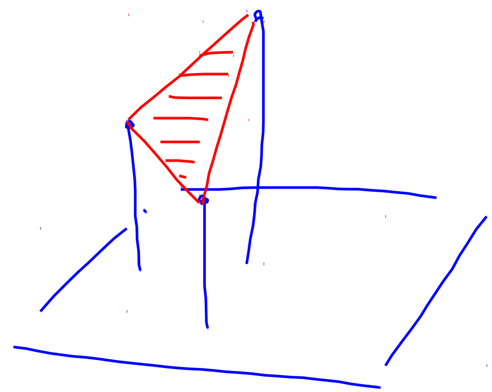
Známe f v mnoha bodech a chceme provést lineární aproximaci.

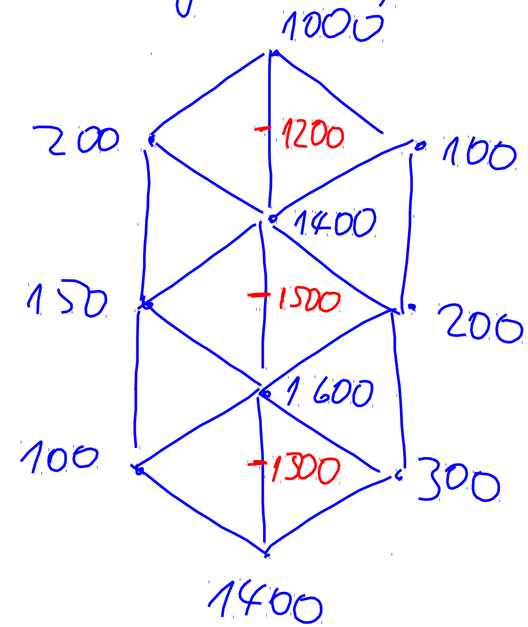
Situace v $\mathbb{R}^1$ $\qquad f : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$



V rovině: rozdělíme konv. oblast na Δ s vrcholy v daných bodech – lze mnoha způsoby







<u>Věta:</u> P množina n bodů v rovině, jejíž konvexním obalem je k-úhelník. Pak každá triangulace tohoto konvexního k-úhelníka s trojúhelníky v bodech množiny P má

$$2n-k-2 \text{ trojúhelníků}$$

a

$$3n-3-k \text{ hran}$$

Důkaz:

Eulerova věta   počet vrcholů n

počet oblastí $= \underbrace{\text{počet } \Delta + 1 = m+1}_{=}$

počet hran $= h$

$$n - h + m + 1 = 2$$

Hrana je sdílena se $2\,\Delta$. Každý Δ má 3 hrany.
Konv. obal má k hran

$$h = \frac{3m+k}{2}$$

Dosadíme do Eul. věty.

$$n - \frac{3m+k}{2} + m = 1$$

$$2n - 3m - k + 2m = 2 \Rightarrow 2n - k - 2 = m$$

Počet hran

$$h = \frac{3m+k}{2} \quad \text{dosadíme za } m \quad = \frac{3(2n-k-2)+k}{2} = 3n-k-3.$$

Vezměme všechny triangulace T konv. mnohoúhelníka, který je konvexním obalem množiny P, která obsahuje n bodů. Všechny triangulace mají STEJNÍ POČET (m) trojúhelníků. Triangulaci T přiřadíme posloupnost $3m$ čísel, což jsou velikosti úhlů v trojúhelnících uspořádané od nejmenšího k největšímu

$$a(T) = \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \leq \ldots \leq \alpha_{3m}.$$

Mezi triangulacemi zavedeme uspořádání, které je dáno lexikografickým uspořádáním $3n$ úhlů $A(T)$

$T < T'$, kde $A(T) := \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{3n}$

$A(T') := \alpha_1' \leq \alpha_2' \leq \dots \leq \alpha_{3n}'$

jestliže

$\alpha_1 = \alpha_1', \alpha_2 = \alpha_2', \dots \alpha_k = \alpha_k'$ a $\alpha_{k+1} < \alpha_{k+1}'$.

Hledaná optimální triangulace je triangulace v tomto uspořádání MAXIMÁLNÍ.

Není dána jednoznačně.