Křivky kolem nás

Jaroška

10. května 2010

Přístup k funkcím

Funkce (zobrazení)

- Předpis, který přiřazuje jedné hodnotě x hodnotu $y = f(x)$
- Je to množina $\mathcal{F}$ uspořádaných dvojic (x, y) takových, že pokud $(x, y_1) \in \mathcal{F}$ a $(x, y_2) \in \mathcal{F}$, potom $y_1 = y_2$.

Příklady

- $f : y = x^2$, $f : y = 2^x$, $f : y = x + 3$
- $x = 1$ není funkce
- Množina $\mathcal{F} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ není funkce v našem slova smyslu.

Pohyb a křivka

Definice

Nechť je dán interval I (případně celá množina reálných čísel). Potom zobrazení $f : I \to \mathbb{R}^2$ nazýváme pohyb.

Definice

Množinu $\mathcal{C}$ bodů v rovině nazveme křivkou, jestliže existuje pohyb f takový, že $f(I) = \mathcal{C}$. Daný pohyb potom nazýváme parametrické vyjádření křivky $\mathcal{C}$

Poznámka

Uvědomme si, že uvedená definice nám nic neříká, kolik takových pohybů existuje. Může tedy existovat nekonečně mnoho parametrických vyjádření nějaké křivky, jak uvidíme na následujících příkladech.

Parametrické vyjádření

Příklady

1. Určete parametrické vyjádření přímky $y = x$.
2. Určete parametrické vyjádření přímky $x = 1$.
3. Určete parametrické vyjádření úsečky s krajními body $[1, 0]$ a $[3, 0]$
4. Určete parametrické vyjádření úsečky s krajními body $[1, 1]$ a $[3, 3]$
5. Určete parametrické vyjádření kružnice s poloměrem 1 a středem v počátku souřadnic.
6. Určete parametrické vyjádření funkce $f : y = x^2$.
7. Určete parametrické vyjádření libovolné funkce $f : y = f(x)$.

Polární souřadnice

Definice

Křivku v rovině můžeme také vyjádřit pomocí takzvaných polárných souřadnic ρ, φ. Kažý bod roviny $X = [x, y]$ totiž můžeme vyjádřit v souřadnicích $[\rho, \varphi]$, kde ρ značí vzdálenost bodu od počátku souřadnic 0 a φ značí odchylku kladné poloosy a polopřímky $0X$.

Archimedova spirála

Definice

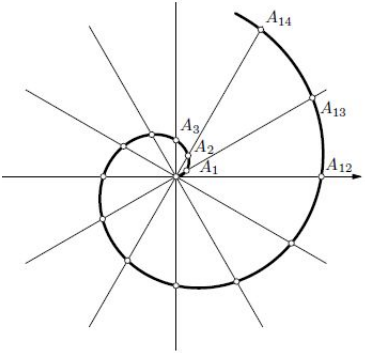
Jsou-li oba pohyby rovnoměrné, potom dostáváme spirálu, které říkáme Archimedova spirála.

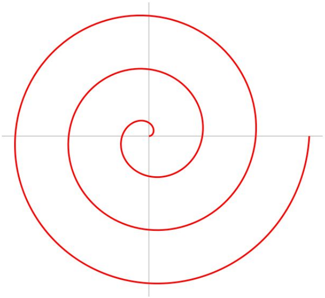
V polárních souřadnicích má Archimedova spirála rovnici:

$$\rho = a \cdot \varphi,$$

kde a je libovolné kladné reálné číslo.

Archimedova spirála





Sousední body na jednom paprsku jsou od sebe vzdáleny $2\pi a$

Hyperbolická spirála

Definice

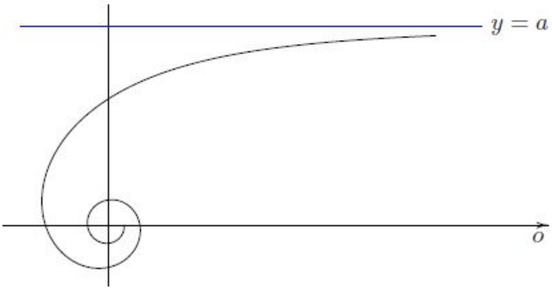
Je-li délka ρ nepřímo úměrná odchylce φ, potom mluvíme o takzvané Hyperbolické spirále

V polárních souřadnicích má Hyperbolická spirála rovnici:

$$\rho = \frac{a}{\varphi},$$

kde a je libovolné kladné reálné číslo.

Hyperbolická spirála



Logaritmická spirála

Definice

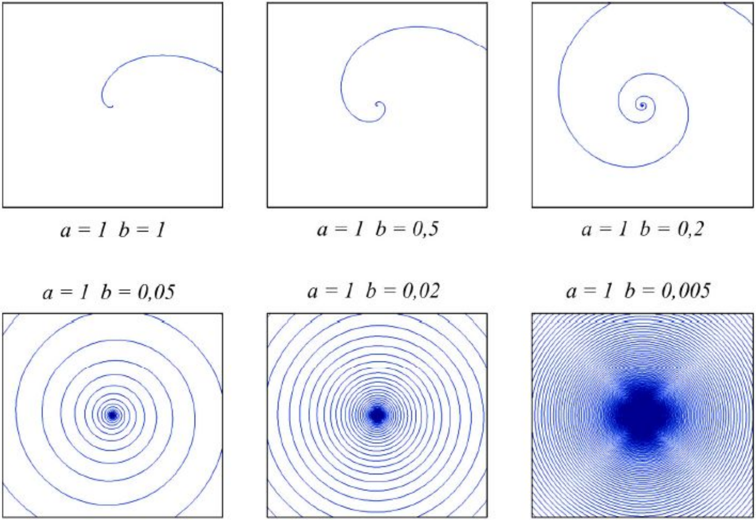
Křivku, jež má polární souřadnice

$$\rho = a^{b \cdot \varphi},$$

kde a, b jsou libovolná kladná reálná čísla.

- První, kdo ji objevil byl René Descartes
- Někdy též Bernoulliho spirála

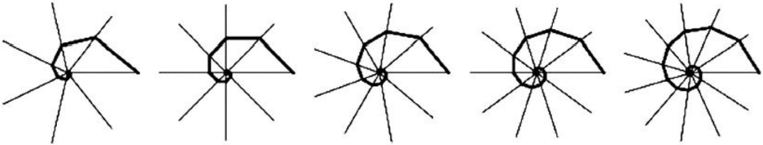
Logaritmická spirála



Logaritmická spirála

Konstrukce

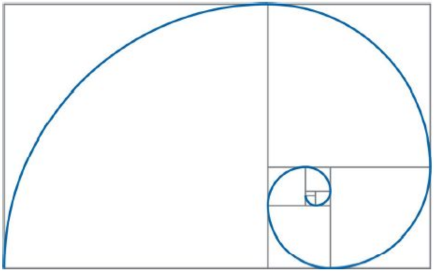
Rozdělíme na *n* částí. Poté konstruujeme kolmice k polopřímkám.



Logaritmická spirála

Zlatá spirála

Uvažujme obdélník s poměrem stran v poměru zlatého řezu. Vepisujme do něho čtvrtkružnice. Dostaneme tak spirálu, které se říká Zlatá spirála a která se blíží ke spirále logaritmické.



Logaritmická spirála

Kde najdeme logaritmickou spirálu

- Všude
- Myší problém: Do každého rohu pravidelného *n*-úhelníku dáme myš. V jeden okamžik se začnou myši pohybovat nejblíže k další myši týmž směrem. Putují tak po logaritmické spirále.
- Hmyz pohybující se kolem žárovky (svírá stále stejný úhel se zdrojem světla)
- Ulity měkkýšů
- Galaxie
- Tropické cyklóny

Logaritmická spirála

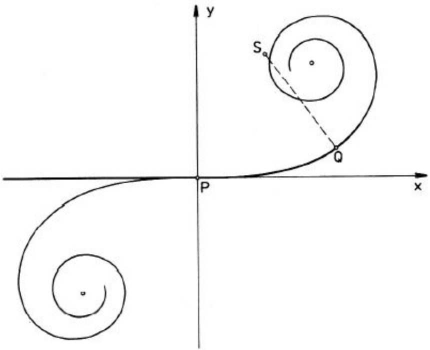





Klotoida

Definice

Klotoida je křivka, jejíž poloměr křivosti v daném bodě je nepřímo úměrný délce oblouku mezi tímto bodem a pevně zvoleným bodem O.

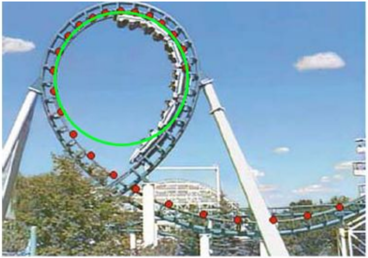


Klotoida

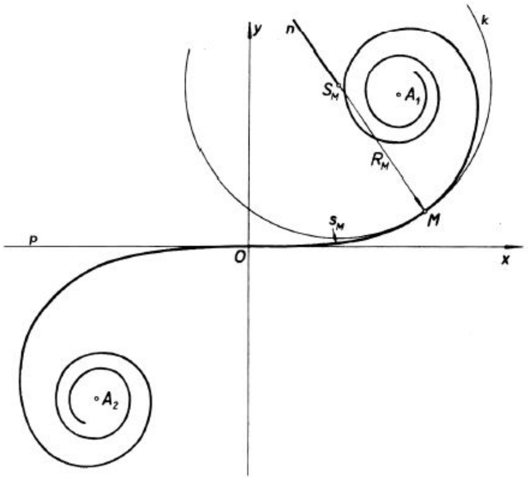
Vlastnosti

Klotoida je nejhladší křivka mezi kružnicí a přímkou. Používá se jako přechodová křivka. Je proto užitečná ve stavebnictví.

Klotoida



Klotoida



Klotoida



Evolventa kružnice

Představme si, že namotáme na útvar nit' a tu budeme odmotávat.Dostaneme tak křivku, které říkáme evolventa útvaru. Pro nás je důležitá evolventa kružnice.

Je třeba tedy umět rektifikovat útvary.

Definice

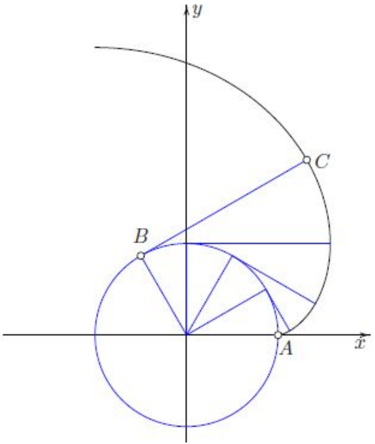
Křivku s parametrickými rovnicemi

$$x = r\cos t + rt\sin t$$

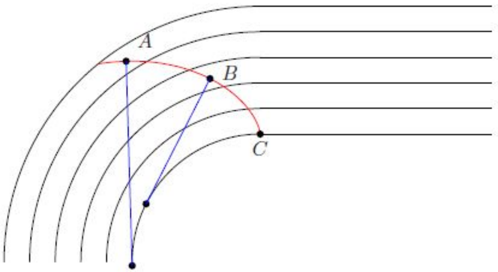
$$y = r\sin t - rt\cos t$$

nazýváme Evolventa kružnice.

Evolventa kružnice



Evolventa kružnice



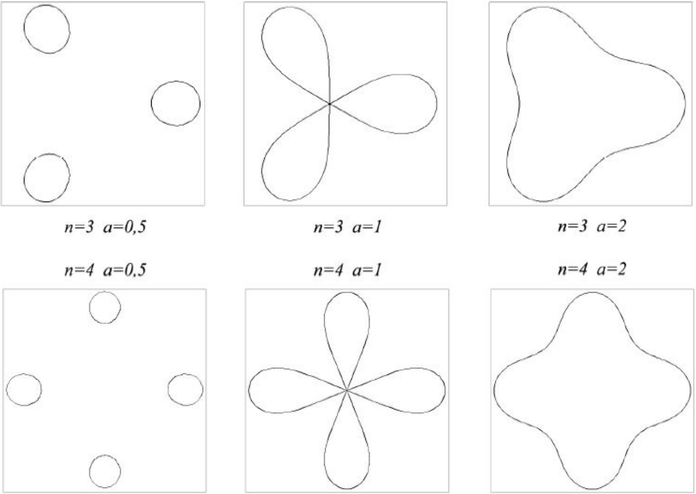
Cassiniho křivky

Definice

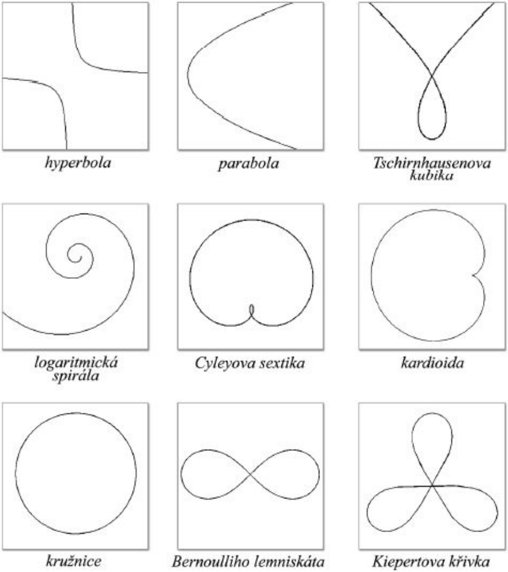
Cassiniho křivkou nazýváme křivku splňující polární rovnici:

$$\rho^n = 2\cos n\varphi + \frac{a-1}{\rho^n}$$

Cassiniho křivky



Cassiniho křivky pro a=1 Sinusoidové křivky



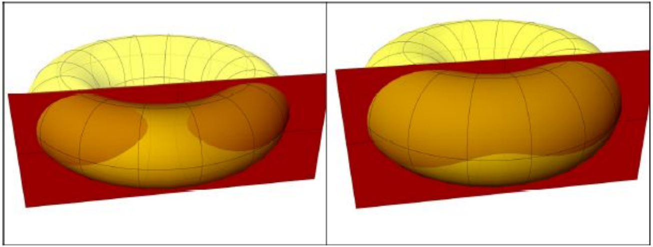
Bernoulliho lemniskáta

Definice

Bernoulliho lemnickáta je křivka s polární rovnicí

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

Cassiniho křivky



Cykloidy

Definice

Cykloida je křivka, kterou vytvoří bod pevně spojený s kružnicí, která se valí (kutálí) po přímce.

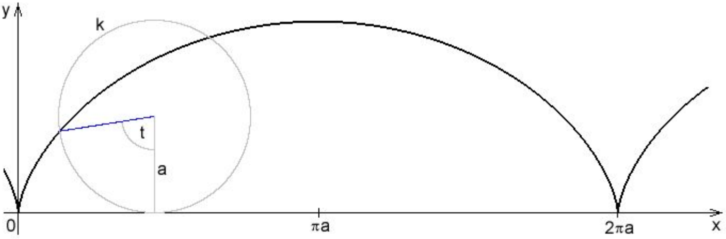
Typy

- Zkrácená
- Prodloužená
- Prostá

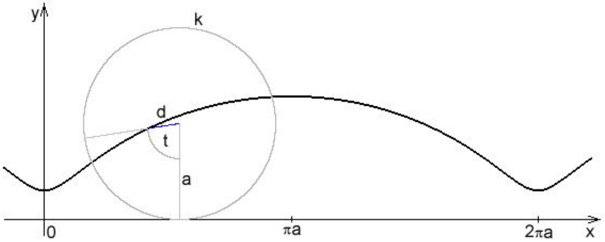
$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

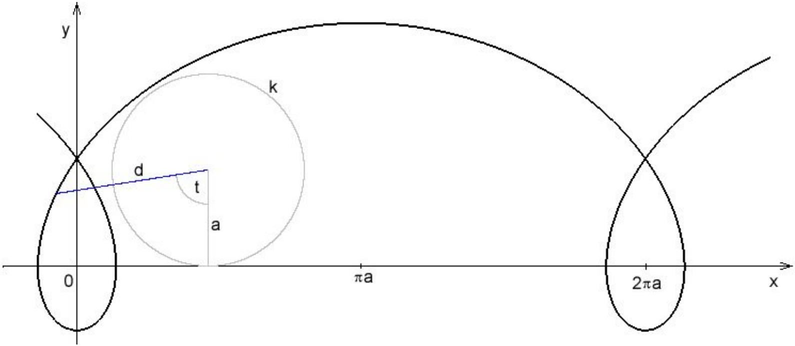
Prostá cykloida



Zkrácená cykloida



Prodloužená cykloida



Hypocykloida

Definice

Každý bod kružnice, která se kutálí (valí) po nehybné kružnici v její vnitřní oblasti, opisuje rovinnou křivku, která se nazývá prostá (obecná, obyčejná) hypocykloida.

Typy

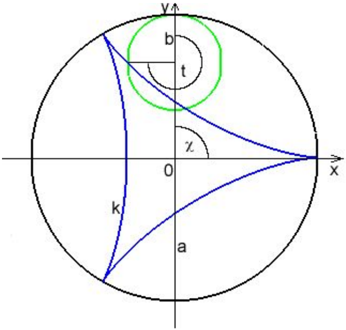
- Zkrácená
- Prodloužená
- Prostá

$$x = (a-b)\cos\frac{b}{a}t + b\cos\frac{a-b}{a}t$$

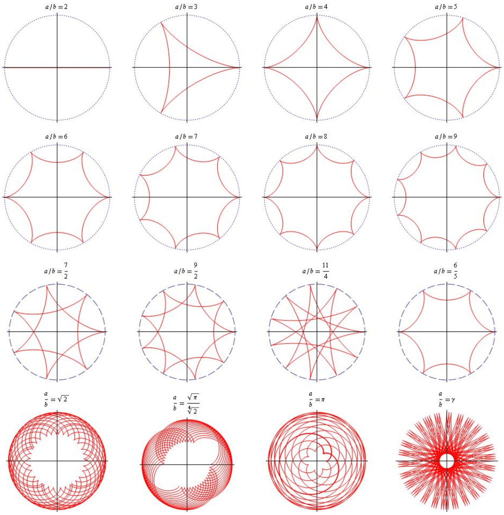
$$y = (a-b)\sin\frac{b}{a}t - b\sin\frac{a-b}{a}t$$

Poměr $\frac{a}{b}$ udává počet větví při jednom otočení.

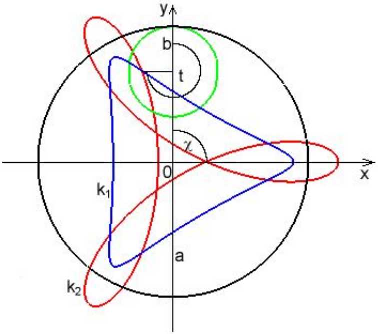
Prostá hypocykloida



Prostá hypocykloida



Prodloužená a zkrácená hypocykloida



Hypocykloida

Definice

Epicykloida je cyklická křivka, kterou vytvoří bod pevně spojený s kružnicí, která se valí (kotálí) po vnější straně nehybné kružnice.

Typy

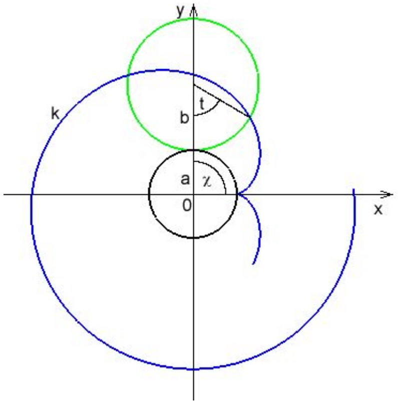
- Zkrácená
- Prodloužená
- Prostá

$$x = (a+b)\cos\frac{b}{a}t - b\cos\frac{a+b}{a}t$$

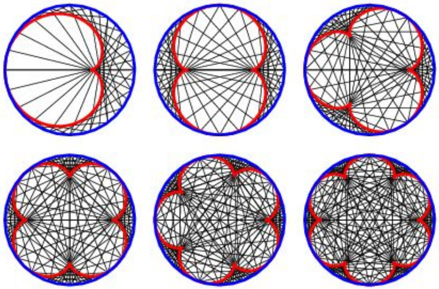
$$y = (a+b)\sin\frac{b}{a}t - b\sin\frac{a+b}{a}t$$

Poměr $\frac{a}{b}$ udává počet větví při jednom otočení.

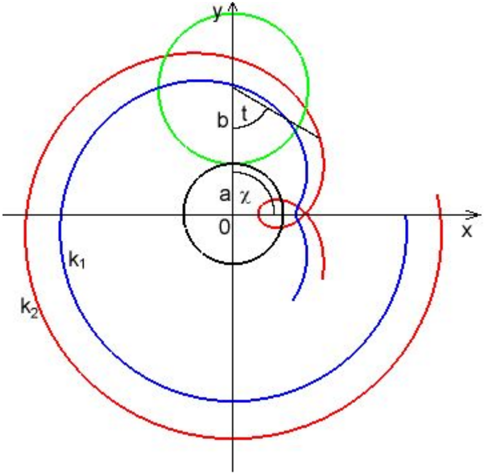
Prostá epicykloida



Prostá epicykloida



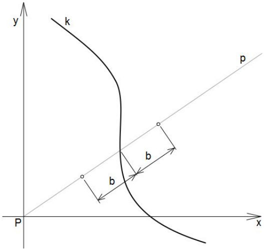
Prodloužená a zkrácená epicykloida



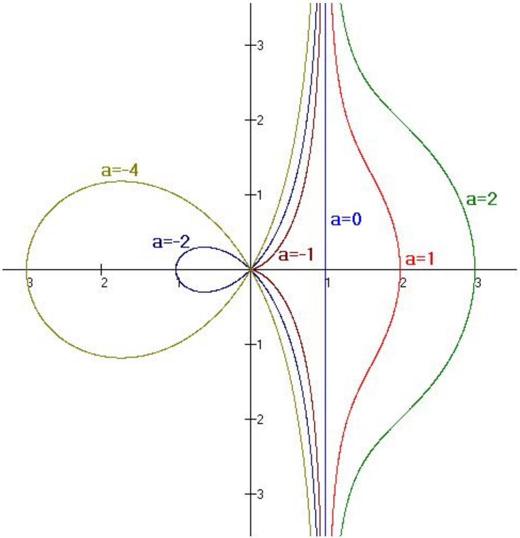
Konchoidy

Definice

Je dána křivka $\mathcal{C}$ a bod P mimo ní. Uvažme svazek přímek s vrcholem P. Nechť a je libovolné kladné reálné číslo. Potom na každou přímku svazku naneseme od jejího průsečíku s danou křivkou vzdálenost a na obě strany. Množina takovýchto bodů vytvoří křivku, kterou nazýváme Konchoida křivky $\mathcal{C}$.



Nikodemova konchoida - konchoida přímky



Pascalova závitnice - konchoida kružnice