Termín odevzdání: Jméno: Hodnocení:

Komplexní čísla - základy

Příklad 1. Uveďte příklad

1. dvou nenulových komplexních čísel, jejichž součtem bude nulové komplexní číslo.
2. dvou komplexních čísel, jejichž součinem bude nulové komplexní číslo.
3. komplexního čísla, jehož reálná složka bude dvojnásobkem imaginární složky.

Příklad 2. Jsou dána komplexní čísla $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 - 5i$, $z_3 = 4 + i$.

1. Určete

   (a) $z_1 + z_2$ (c) $\frac{1}{z_3}$ (e) $z_2 + \frac{z_1 - z_2}{z_3}$ (g) z_2^2 (i) $\frac{z_1 + z_2}{z_2 - z_3}$

   (b) $z_1 \cdot z_3$ (d) $\frac{z_3}{z_2}$ (f) $z_2 \cdot (z_1 + 2z_3)$ (h) z_1^3 (j) $\frac{(z_1 - i)^2}{(z_1 + i)^2}$

2. Znázorněte komplexní čísla z_1, z_2, z_3 v Gaussově rovině a určete obsah trojúhelníku, který je určen těmito komplexními čísly.

Příklad 3. Zjednodušte dané výrazy:

a) $7 + 3i - \frac{10 - 5i}{2 + i}$ c) $(1 + i) \cdot \frac{2 + i}{3 - i}$ e) $i - \frac{3 - \frac{10}{1 - 2i}}{i - \frac{i - 2}{2i - 3}}$

b) $\frac{1 - 2i}{1 + 3i} - \frac{1 + 3i}{1 - 2i}$ d) $1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{i}}$ f) $\frac{\frac{1 - i}{1 + i} - \frac{1 + i}{1 - i}}{\frac{i}{i - 1} + \frac{i + 1}{i}}$

Příklad 4. Je dáno komplexní číslo $z = \frac{a + 2i}{1 - 3i}$. Určete všechna reálná čísla a, pro která je

1. z reálné.
2. z ryze imaginární.
3. reálná složka dvojnásobkem imaginární složky.

Příklad 5. Jsou dána komplexní čísla $z_1 = \frac{a + bi}{1 + i}$, $z_2 = \frac{b - a + i}{2 - i}$. Určete, pro jaká reálná čísla a, b mají obě komplexní čísla stejnou reálnou i imaginární část.

Příklad 6. Určete reálná čísla a, b tak, aby:

a) $(7 + 3i) \cdot a - (2i - 3) \cdot b = 29 + 19i$ b) $\frac{a}{1 + i} + \frac{b}{2i - 1} = \frac{8 + i}{5}$

Příklad 7. Zjednodušte komplexní číslo $\frac{1 + ai}{a - i}$.

Příklad 8. Určete všechna reálná čísla a, pro která komplexní číslo $\frac{1 + 2i - ai}{2 - a - 3i}$

1. reálné číslo
2. ryze imaginární číslo

Příklad 9. Zjednodušte:

a) $1 + i + i^2 + i^3 + i^4$ c) $1 \cdot i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4$ e) $1 + i + i^2 + \cdots + i^{2015}$

b) $1 + i^2 + i^4 + i^6 + i^8 + i^{10}$ d) $1 \cdot i \cdot i^2 \cdot \cdots \cdot i^{2015}$ f) $1 - i + i^2 - i^3 + i^4 - i^5$

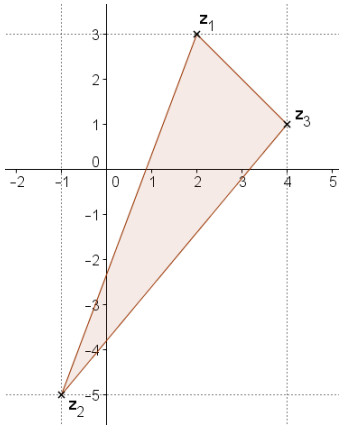
Výsledky

Příklad 1.

1. Například i a $-i$
2. Například 0 a $1+i$
3. Například $2+i$

Příklad 2.

1. (a) $1-2i$ (b) $5+14i$ (c) $\frac{4}{17}-i\frac{1}{17}$ (d) $\frac{-9}{26}+i\frac{19}{26}$ (e) $\frac{3}{17}-i\frac{56}{17}$ (f) $15-55i$ (g) $-24+10i$ (h) $-46+9i$ (i) $\frac{7}{61}+i\frac{16}{61}$ (j) $\frac{8}{25}-i\frac{6}{25}$
2. $S = 11\ j^2$



Příklad 3.

a) $4+7i$
b) $0{,}5-1{,}5i$
c) i
d) $2+i$
e) $\frac{7}{2}-\frac{i}{4}$
f) $\frac{2}{3}-i\frac{2}{3}$

Příklad 4.

1. $a=-\frac{2}{3}$
2. $a=6$
3. $a=-2$

Příklad 5. $a=-\frac{1}{3}$, $b=1$

Příklad 6.

a) $a=5$, $b=-2$
b) $a=2$, $b=-3$

Příklad 7. i

Příklad 8.

1. žádné takové a neexistuje
2. $a=2$

Příklad 9.

a) 1
b) 0
c) -1
d) 1
e) 0
f) $1-i$