Termín odevzdání: Jméno: Hodnocení:

Komplexní čísla - závěrečná směs

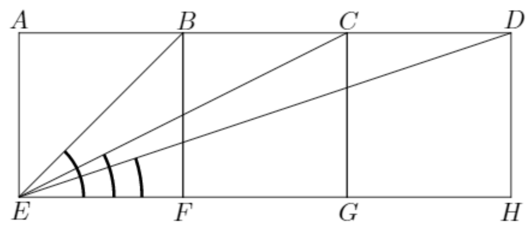
Příklad 1. Určete všechna celá čísla x tak, aby bylo $x^4 + 4$ prvočíslo.

Příklad 2. Uvažujme komplexní čísla a, b taková, že $|a| = |b| = 1$. Určete hodnotu výrazu $|a - b|^2 + |a + b|^2$.

Příklad 3. Nechť n je přirozené číslo. Určete, čemu je roven součet

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha.$$

Příklad 4. Máme vedle sebe tři čtverce $ABFE$, $BCGF$ a $CDHG$ jako na obrázku. Určete součet vyznačených úhlů.



Příklad 5. Určete, kolik existuje dvojic reálných čísel a, b takových, že

$$(a + bi)^{2014} = a - bi.$$

Příklad 6. V oboru komplexních čísel řešte soustavy rovnic s neznámými u, v

a) $(1 + i)u + 2v = 2$
$iu + (1 - 2v) = 1$

b) $(1 - i)u + v = 3 - i$
$u + (1 - i)v = 1 - i$

Příklad 7. Dokažte, že

$$\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^6 + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 2.$$

Příklad 8. Dokažte, že v pravidelném devítiúhelníku je délka strany rovna rozdílu délek nejdelší a nejkratší úhlopříčky.

Výsledky

Příklad 1. $x^4+4=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$, tedy jedna ze závorek musí být ± 1. Pro každé řešení pak ověříme, zda je druhá závorka prvočíslo.

Příklad 2. $a, b, -b$ leží na jednotkové kružnici. Dokonce je $b, -b$ průměrem této kružnice. Trojúhelník $a, b, -b$ je tedy pravoúhlý. Odtud úpravou výrazu dostaneme hodnotu výrazu 4.

Příklad 3. Sčítejme mocniny komplexního čísla v goniometrickém tvaru a určeme imaginární část.

Příklad 4. Zaveďme vhodně souřadný systém. Součet úhlů pak bude argument komplexního čísla, které je rovno součinu komplexních čísel z vrcholů čtverců ($\frac{\pi}{2}$).

Příklad 5. Vynásobme obě strany číslem $a+bi$. Dostáváme, že velikost komplexního čísla $a+bi$ může být 0 nebo 1. Odtud pak dostaneme jedno a 2015 řešení. Celkem tak existuje 2016 takových dvojic.

Příklad 6.

a) $u=\frac{2}{5}-\frac{4i}{5}$, $v=\frac{2}{5}+\frac{i}{5}$

b) $u=1+i$, $v=1-i$

Příklad 7. Oba sčítance po umocnění na třetí dají jedničku.

Příklad 8. Uvažujme devítiúhelník jako množinu řešení binomické rovnice $x^9-1=0$. Délky pak vyjádřeme pomocí řešení dané rovnice.