Domácí úkol z 24. září 2015

Zapište podrobně následující kroky v důkazu věty ze semináře, v níž p je libovolné pevně zvolené prvočíslo.

Předpokládejme, že zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_p$ splňuje podmínku

$$\forall s \in \mathbb{N} \colon \exists t \in \mathbb{N} \colon \forall x \in \mathbb{N} \colon \forall y \in \mathbb{N} \colon |x-y|_p < p^{-t} \implies |f(x)-f(y)|_p < p^{-s}. \qquad (*)$$

1. Vysvětlete, proč pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel, která je Cauchyovská v metrice dané p-adickou normou, je posloupnost $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ také Cauchyovská.
2. Pro dvě v $\mathbb{Q}_p$ konvergentní posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel, které mají stejnou limitu, vysvětlete, proč také posloupnosti $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{f(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ jsou v $\mathbb{Q}_p$ konvergentní a mají zde stejnou limitu.
3. Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ zvolme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel splňujících $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ a definujme $g(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ (obě limity jsou vzhledem k p-adické metrice). Odvoďte podmínku

   $$\forall s \in \mathbb{N} \colon \exists t \in \mathbb{N} \colon \forall x \in \mathbb{Z}_p \colon \forall y \in \mathbb{Z}_p \colon |\alpha-\beta|_p < p^{-t} \implies |g(\alpha)-g(\beta)|_p < p^{-s}$$

   znamenající, že $g : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ je spojitá funkce.