



ČASOVÉ ŘADY (SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY)



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

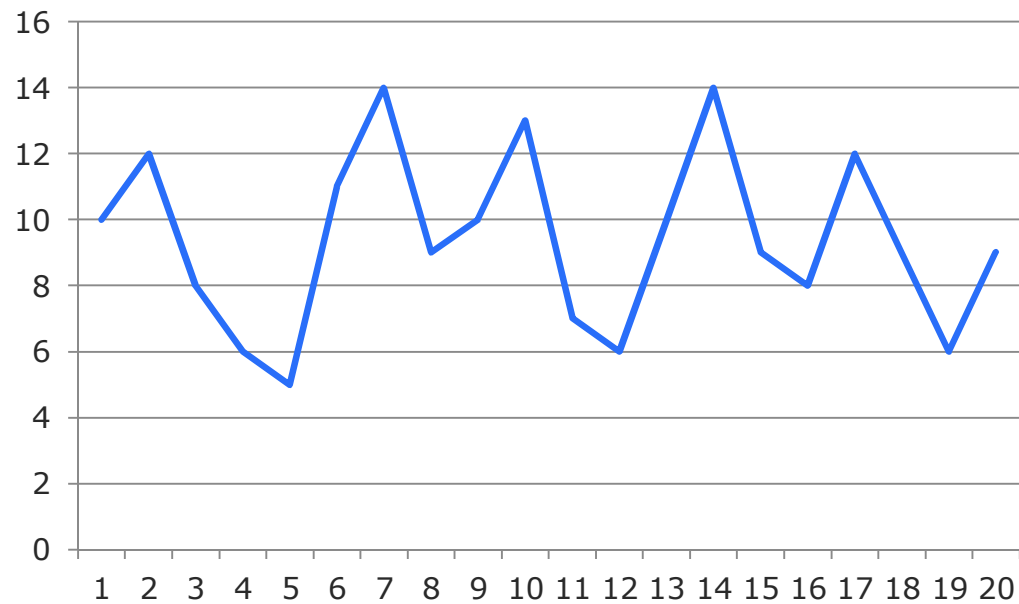
**UKB, A29 – RECETOX, dv.č.112
holcik@iba.muni.cz**

III. ČASOVÉ ŘADY

PŘÍKLAD TAK TROCHU NA VYSVĚTLENOU

ZADÁNÍ

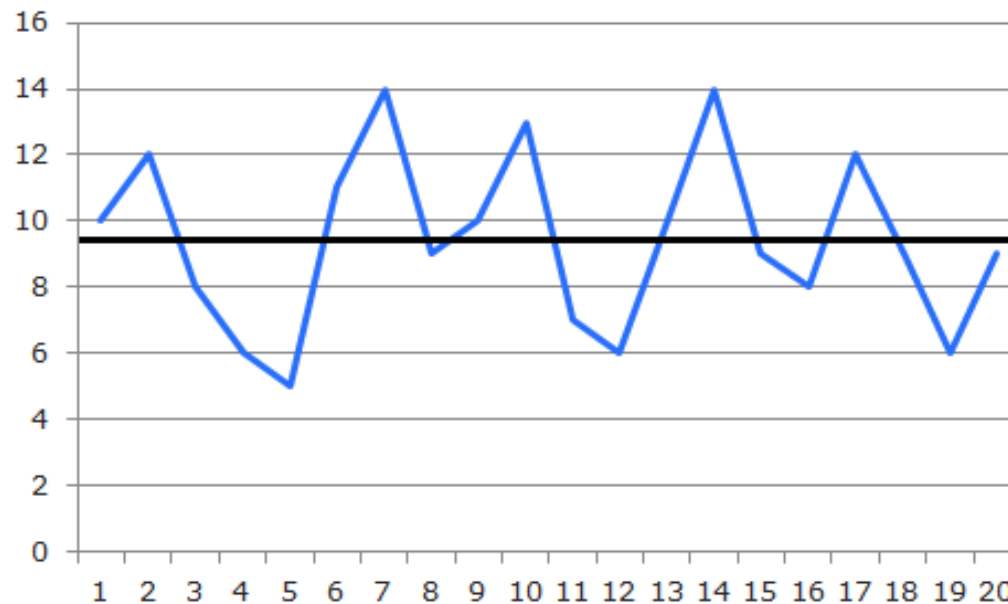
10 12 8 6 5 11 14 9 10 13 7 6 10 14 9 8 12 9 6 9



ZADÁNÍ

☑ průměrná hodnota:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \cdot x(k) = \sum_{k=1}^N a_n \cdot x(k)$$



ZADÁNÍ

- ☑ průměrná hodnota:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \cdot x(k) = \sum_{k=1}^N a_n \cdot x(k)$$

- ☑ klouzavý průměr:

pro m liché

$$\bar{x}(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=k-(m-1)\text{div}2}^{k+(m-1)\text{div}2} x(k) = \sum_{i=k-(m-1)\text{div}2}^{k+(m-1)\text{div}2} \frac{1}{m} \cdot x(k) = \sum_{i=k-(m-1)\text{div}2}^{k+(m-1)\text{div}2} a_m \cdot x(k)$$

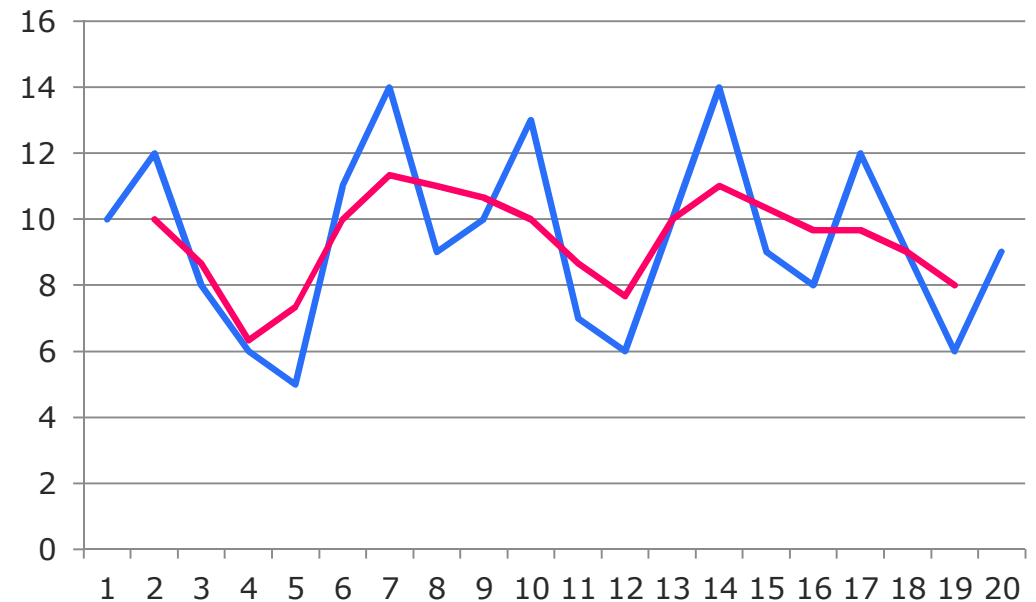
pro m sudé třeba

$$\bar{x}(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=-m\text{div}2+1}^{(m\text{div}2)} x(k-i) = \sum_{i=-m\text{div}2+1}^{(m\text{div}2)} \frac{1}{m} \cdot x(k-i) = \sum_{i=-m\text{div}2+1}^{(m\text{div}2)} a_i \cdot x(k-i)$$

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

$m = 3$

1	10	
2	12	10,0
3	8	8,7
4	6	6,3
5	5	7,3
6	11	10,0
7	14	11,3
8	9	11,0
9	10	10,7
10	13	10,0
11	7	8,7
12	6	7,7
13	10	10,0
14	14	11,0
15	9	10,3
16	8	9,7
17	12	9,7
18	9	9,0
19	6	8,0
20	9	

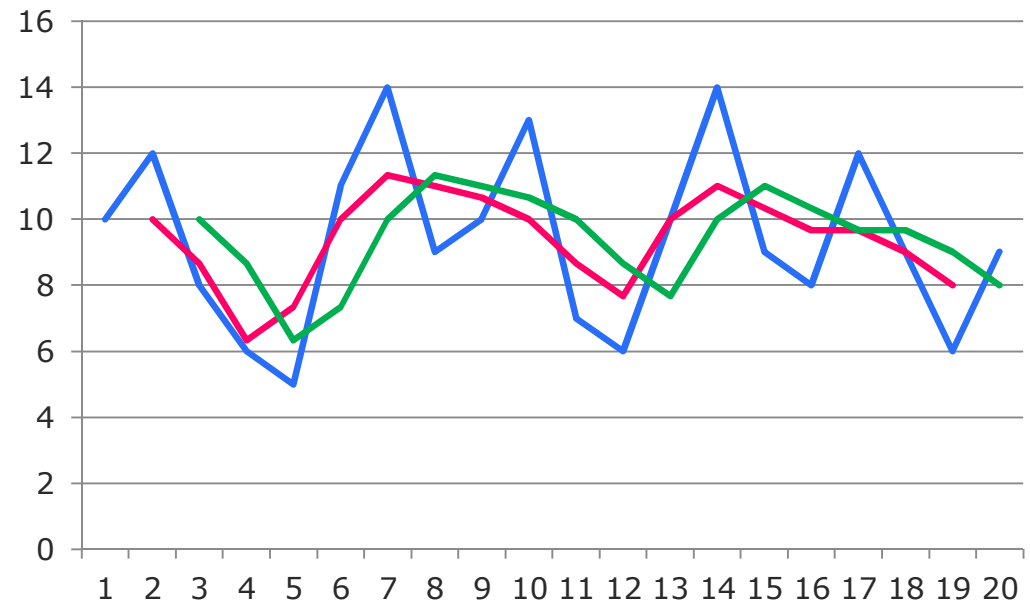


KLOUZAVÝ PRŮMĚR

m = 3

1	10	?	?
2	12	10,0	?
3	8	8,7	10,0
4	6	6,3	8,7
5	5	7,3	6,3
6	11	10,0	7,3
7	14	11,3	10,0
8	9	11,0	11,3
9	10	10,7	11,0
10	13	10,0	10,7
11	7	8,7	10,0
12	6	7,7	8,7
13	10	10,0	7,7
14	14	11,0	10,0
15	9	10,3	11,0
16	8	9,7	10,3
17	12	9,7	9,7
18	9	9,0	9,7
19	6	8,0	9,0
20	9	?	8,0

přechodný děj



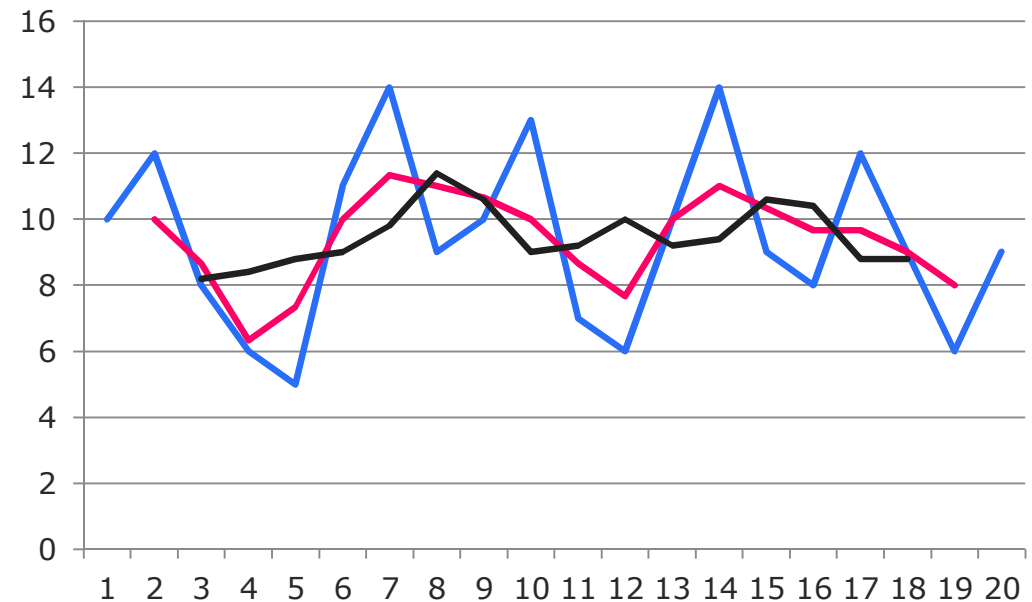
$$\bar{x}(k) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m} \cdot x(k-i)$$

**KAUZALITA ≡
≡ PŘÍČINNOST**

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

$m = 3$ $m = 5$

1	10		
2	12	10,0	
3	8	8,7	8,2
4	6	6,3	8,4
5	5	7,3	8,8
6	11	10,0	9,0
7	14	11,3	9,8
8	9	11,0	11,4
9	10	10,7	10,6
10	13	10,0	9,0
11	7	8,7	9,2
12	6	7,7	10,0
13	10	10,0	9,2
14	14	11,0	9,4
15	9	10,3	10,6
16	8	9,7	10,4
17	12	9,7	8,8
18	9	9,0	8,8
19	6	8,0	
20	9		

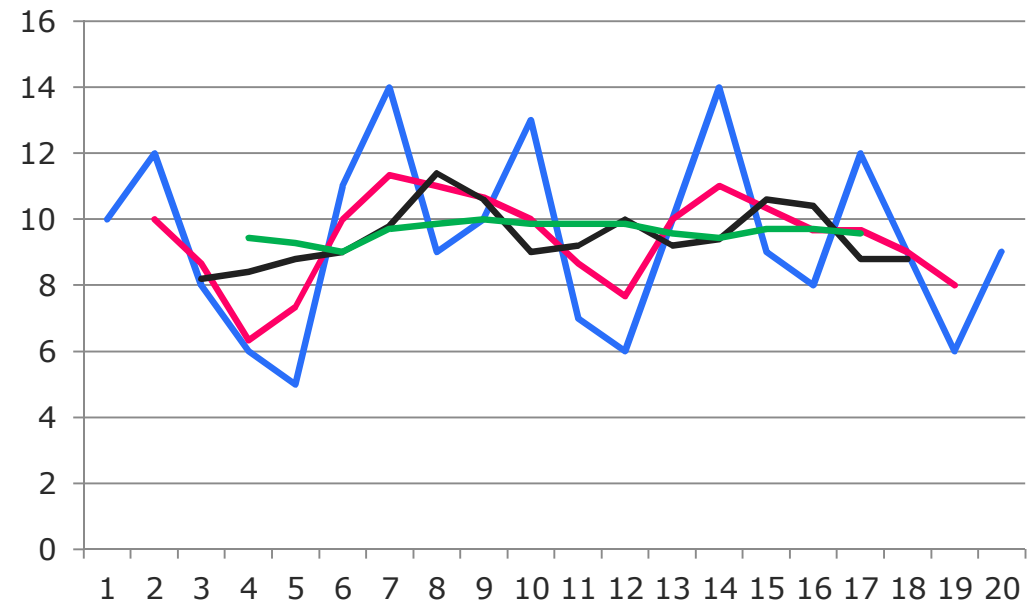


$$\mathbf{a} = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$$

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

m = 3 m = 5 m = 7

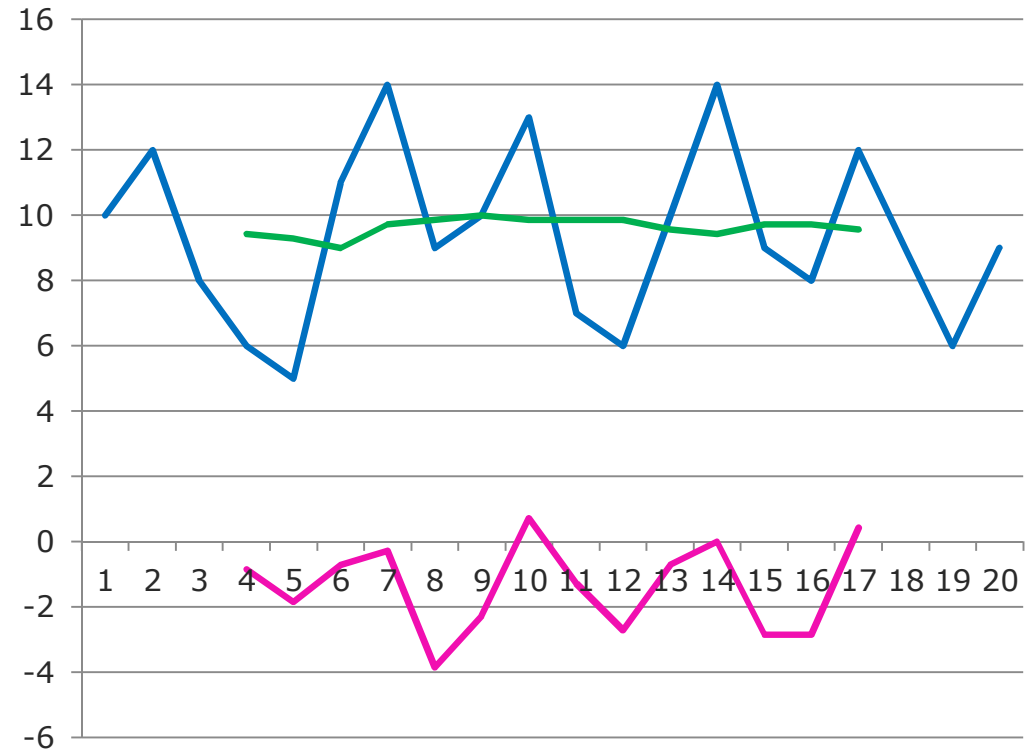
1	10			
2	12	10,0		
3	8	8,7	8,2	
4	6	6,3	8,4	9,4
5	5	7,3	8,8	9,3
6	11	10,0	9,0	9,0
7	14	11,3	9,8	9,7
8	9	11,0	11,4	9,9
9	10	10,7	10,6	10,0
10	13	10,0	9,0	9,9
11	7	8,7	9,2	9,9
12	6	7,7	10,0	9,9
13	10	10,0	9,2	9,6
14	14	11,0	9,4	9,4
15	9	10,3	10,6	9,7
16	8	9,7	10,4	9,7
17	12	9,7	8,8	9,6
18	9	9,0	8,8	
19	6	8,0		
20	9			



$$\mathbf{a} = (1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7)$$

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

		$m = 3$	$m = 7$	
1	10			
2	12	10,0		
3	8	8,7		
4	6	6,3	9,4	-0,9
5	5	7,3	9,3	-1,9
6	11	10,0	9,0	-0,7
7	14	11,3	9,7	-0,3
8	9	11,0	9,9	-3,9
9	10	10,7	10,0	-2,3
10	13	10,0	9,9	0,7
11	7	8,7	9,9	-1,3
12	6	7,7	9,9	-2,7
13	10	10,0	9,6	-0,7
14	14	11,0	9,4	0,0
15	9	10,3	9,7	-2,9
16	8	9,7	9,7	-2,9
17	12	9,7	9,6	0,4
18	9	9,0		
19	6	8,0		
20	9			



$$\mathbf{a} = (1/7, -1/7, -1/7, 1/7, -1/7, -1/7, 1/7)$$

ZPŮSOB VÝPOČTU

uvažujme třeba kauzální výpočet (tj. pouze ze zpožděných známých hodnot):

1.
$$\bar{x}(k) = y(k) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m} \cdot x(k-i) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \cdot x(k-i)$$

2.
$$\bar{x}(k) = y(k) = \frac{1}{m} (m \cdot y(k-1) + x(k) - x(k-m))$$

rekurze – používá staré hodnoty výstupních vzorků

$$y(k) = \sum_{j=1}^n b_j \cdot y(k-j) + \sum_{i=0}^m a_i x(k-i)$$

NOVÉ POJMY

- ☑ koeficienty odpovídající žádanému průběhu časové řady (model);
- ☑ přechodný děj (odezva na počáteční podmínky);
- ☑ kauzalita;
- ☑ rekurze.

IV. ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD

ZÁKLADNÍ POJMY

VELIČINY ✨ MATEMATICKÉ MODELY

- ☑ abychom mohli úspěšně řešit praktické problémy (analýza, syntéza), potřebujeme reálné veličiny vyjádřit **matematicky jejich** (abstraktními) **modely**;
- ☑ model veličiny by měl splňovat dva základní požadavky:
 - výstižnost, přesnost;
 - jednoduchost, snadná manipulace;

KLASIFIKACE VELIČIN

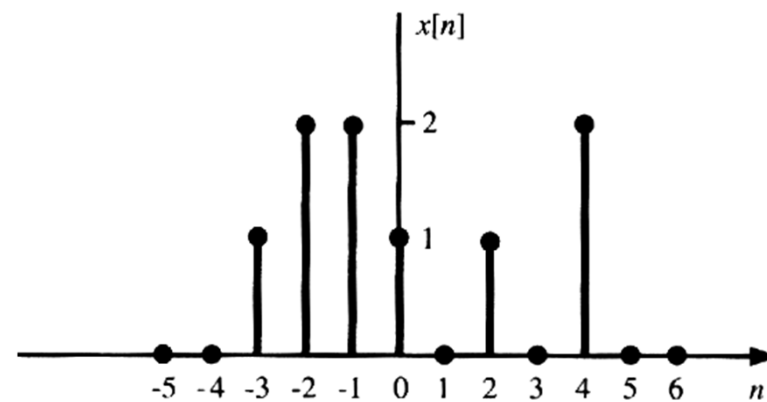
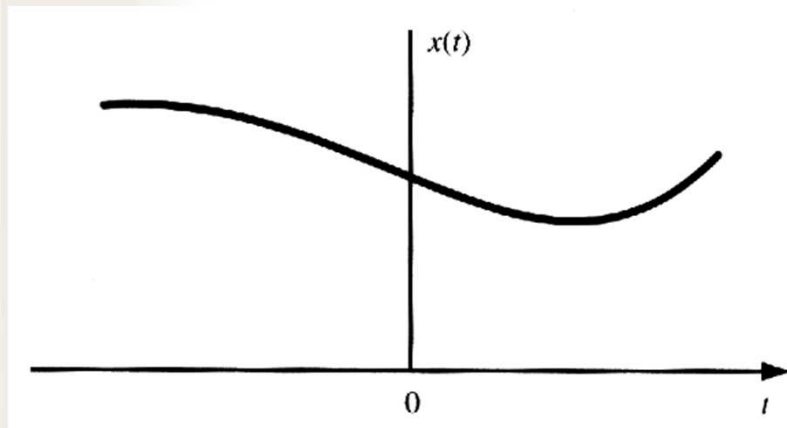
(A JEJICH MATEMATICKÝCH MODELŮ)

- A) spojité a diskrétní
- B) reálné a komplexní
- C) deterministické a nedeterministické
(náhodné?)
- D) periodické a neperiodické
- E) sudé a liché

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

- ✓ **Spojité veličina** (přesněji **veličina se spojitým časem**) je taková veličina $x(t)$, kde čas t je spojitá proměnná.
- ✓ **Diskrétní veličina** (přesněji **veličina s diskrétním časem**) je taková veličina $x(t)$, kde čas t je definován v diskrétních časových okamžicích. Diskrétní veličinu proto často zapisujeme jako **posloupnost** $\{x_n\}$, kde n je celé číslo, resp. $x(nT)$.

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY



A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu **hodnot** funkce nikoliv času. V tomto smyslu reálná nespojitá veličina (signál) v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál

Typy dat (Biostatistika, str.12):

- ☑ kvalitativní:
 - nominální – kategorie nelze seřadit;
 - ordinální – kategorie je možné seřadit;
 - binární
- ☑ kvantitativní:
 - spojitá;
 - diskrétní;

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu **hodnot** funkce nikoliv času. V tomto smyslu reálná nespojitá veličina (signál) v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál

Typy dat (Biostatistika, str.12):

- ☑ **kvalitativní:**
 - nominální – kategorie nelze seřadit;
 - ordinální – kategorie je možné seřadit;
 - binární
- ☑ **kvantitativní:**
 - spojitá
 - **diskrétní**

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu **hodnot** funkce nikoliv času. V tomto smyslu reálná nespojitá veličina (signál) v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál

Typy dat (Biostatistika, str.12):

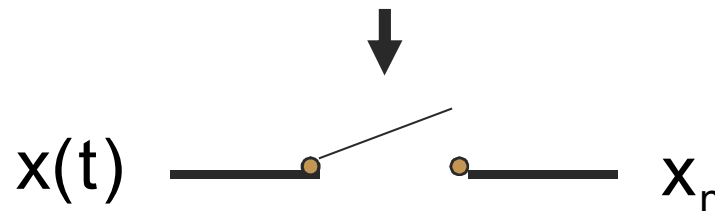
- ☑ **kvalitativní:**
 - nominální – kategorie nelze seřadit;
 - ordinální – kategorie je možné seřadit;
 - binární
- ☑ **kvantitativní:**
 - spojitá
 - **diskrétní**

Délka dat

budeme se zabývat posloupnostmi s desítkami vzorků

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

- ☑ U diskrétní veličiny není její hodnota mezi jednotlivými diskrétními časovými okamžiky definována.
- ☑ Diskrétní veličinu lze také získat **vzorkováním** spojité veličiny: $x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n), \dots$ (též značení $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$). Hodnoty $x_i = x_i(t)$ se nazývají **vzorky**.



A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

☑ diskrétní veličinu můžeme zapsat

→ funkčním předpisem, např.

$$x_n = \begin{cases} 2^n & \text{pro } n \geq 0 \\ 0 & \text{pro } n < 0 \end{cases}$$

→ explicitně seznamem hodnot, např.

$$x_n = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(zde se implicitně předpokládá, že pořadí prvků je číslováno od nuly a pro záporné indexy n jsou hodnoty nulové)

B) REÁLNÉ A KOMPLEXNÍ VELIČINY

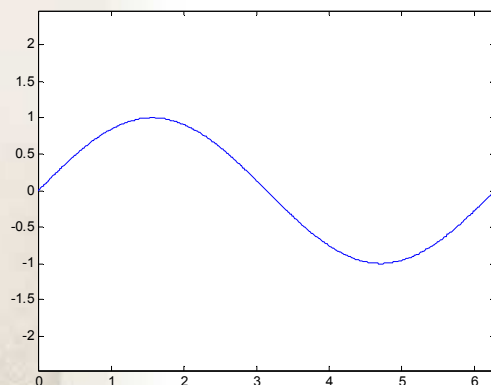
- ☑ **Reálná veličina (model)** je taková, která nabývá reálných hodnot. (V praxi skutečně měřitelný.)
- ☑ **Komplexní veličina (model)** je taková, která nabývá komplexních hodnot. (Hypotetická, v praxi neměřitelná.)

$$x(t) = x_1(t) + ix_2(t), \text{ resp. } x(t) = x_1(t) + jx_2(t)$$

Čas t je spojitý nebo diskrétní.

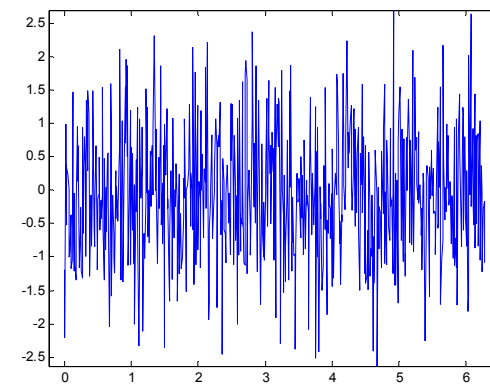
C) DETERMINISTICKÉ A NEDETERMINISTICKÉ (NÁHODNÉ) VELIČINY

- ☑ **Deterministická veličina** je taková, jejíž hodnoty jsou v daném čase jednoznačně určeny. Taková veličina může být popsána analytickou funkcí času t .
- ☑ **Náhodná (stochastická) veličina** je taková, jejíž hodnoty jsou náhodné (tj. tak složité, že jim nerozumíme). Takové veličiny popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum, definované rozložení, momenty.



$$x(t) = \sin t$$

$$N(0,1)$$



C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ VELIČINY

- ☑ **Náhodná (stochastická) veličina** je taková, jejíž hodnoty jsou náhodné (tj. tak složité, že jim nerozumíme). Takové veličiny popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

!!! POZOR POZOR !!!

Náhodnost není generickou vlastností dané veličiny, tuto vlastnost jí přisuzuje předpokládaný matematický nástroj.

! POHOV !

C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ VELIČINY

Náhodná (stochastická) veličina je taková, jejíž hodnoty jsou náhodné (tj. tak složité, že jim nerozumíme). Takové veličiny popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

Náhodný proces

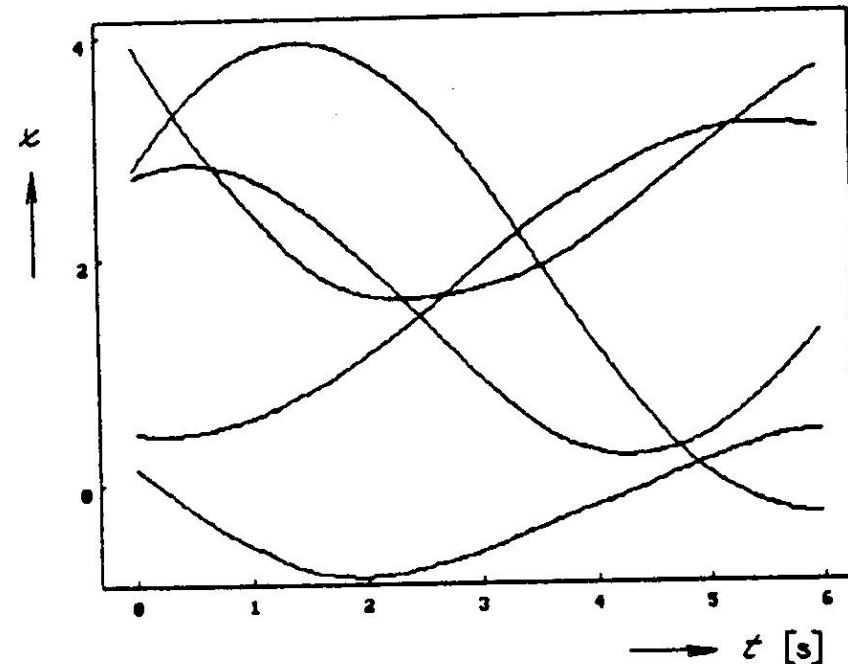
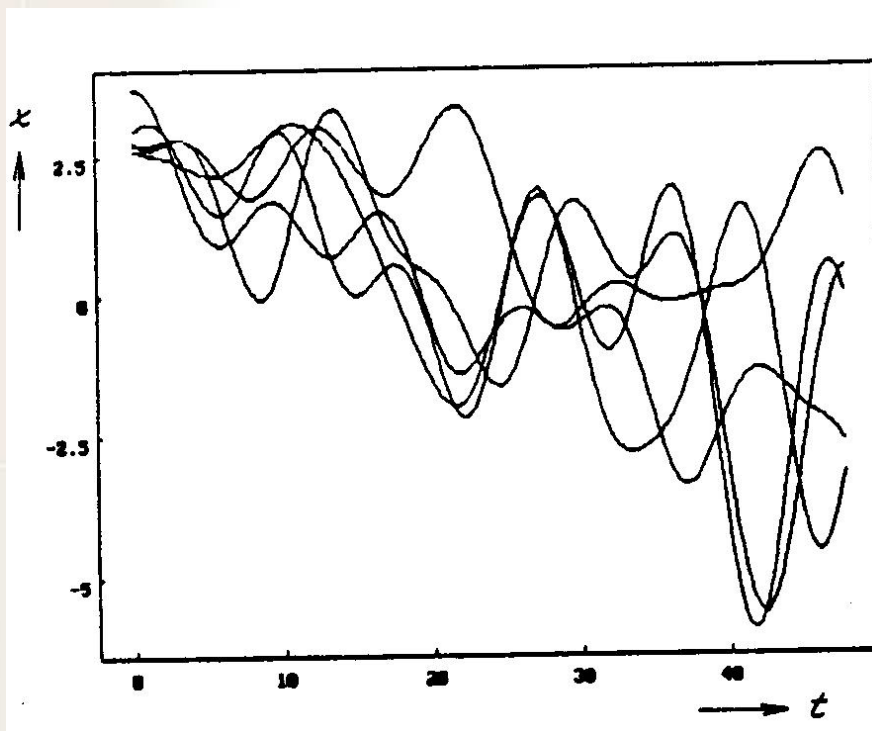
System $\{\xi_i\}$ náhodných veličin ξ_i , definovaných pro všechna $t \in \mathbb{R}$ se nazývá náhodný proces (*random process*) a označuje se $\xi(t)$. Nezávislá veličina t je zpravidla čas.

- ❖ stacionarita;
- ❖ ergodicita

STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

zhruba:

- ☑ **stacionární náhodný proces** (*stationary random process*) je proces se stálým chováním



STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

přesněji:

- ☑ **stacionární náhodný proces** je takový proces, jehož libovolné statistické charakteristiky nejsou závislé na poloze počátku časové osy (nezávisí na absolutních hodnotách času, jen na délkách časových intervalů mezi okamžiky t_1 a t_2)

Z praktického hlediska často vnímáme pojem stacionarity v tzv. širším slova smyslu, kdy stačí, aby se s nezávisle proměnnou neměnily pouze statistické momenty 1. a 2. řádu, střední hodnota, rozptyl a autokorelační, resp. autokovarianční funkce.

ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

Ergodický náhodný proces (*ergodic random process*) se vyznačuje tím, že všechny jeho realizace mají stejné statistické vlastnosti (stejně chování) – to umožňuje odhadovat parametry náhodného procesu z jediné libovolné realizace.

Zpravidla požadujeme (je to z hlediska analýzy pohodlnější), aby byl analyzovaný proces jak stacionární, tak i ergodický, ale obecně ergodický proces nemusí být nezbytně i stacionární a samozřejmě i naopak.

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY

- ☑ Spojitá veličina $x(t)$ je **periodická s periodou T** , jestliže existuje hodnota T taková, že pro všechna t platí

$$x(t + T) = x(t)$$

- Nejmenší kladná hodnota T , pro kterou platí uvedený vztah se nazývá **základní perioda**.
- Obecně lze psát

$$x(t + kT) = x(t),$$

kde k je celé číslo.

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY

Pozor!

- ✓ Pro konstantní veličinu není definována základní perioda. Konstantní veličina je periodická pro každou hodnotu T .
- ✓ Spojitá veličina, který není periodická se nazývá **neperiodická** nebo **aperiodická**.
- ✓ Reálné veličiny, např. biosignály nejsou zcela periodické – hovoříme o **repetičních veličinách signálech**.



řečový signál – samohláska „e“

Pohov!

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY

- Pro diskretní signál definujeme periodický signál s periodou N obdobně

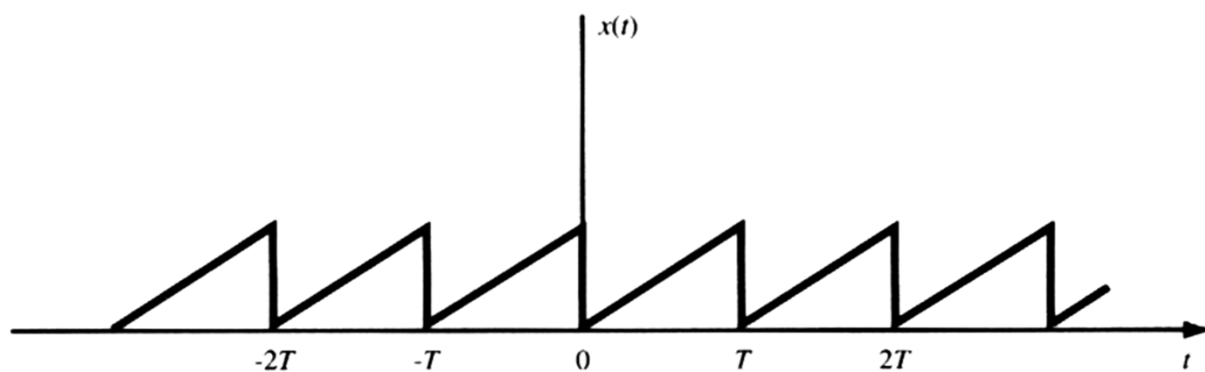
$$X_{n+N} = X_n \quad \text{a} \quad X_{n+kN} = X_n$$

Pozor!

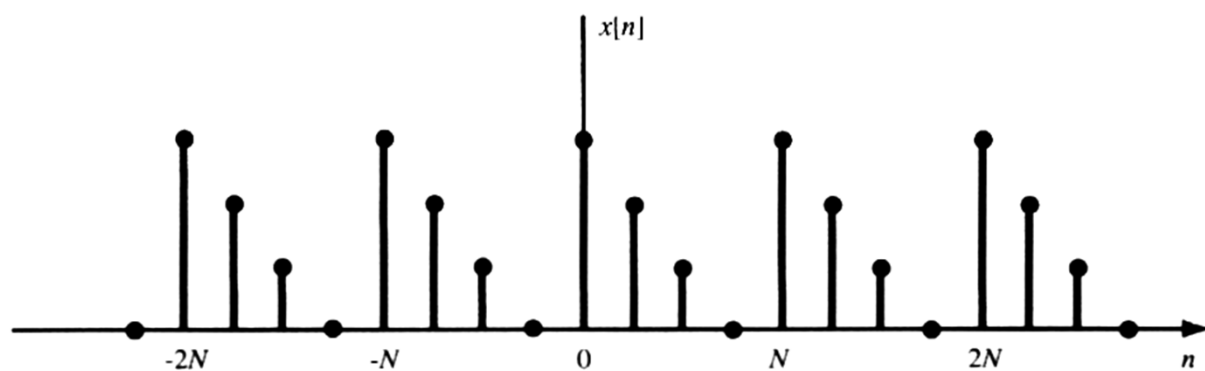
- ☑ Diskretní signál získaný rovnoměrným vzorkováním periodického spojitého signálu **nemusí** být periodický.
- ☑ Součet dvou spojitých periodických signálů **nemusí** být periodický signál.
- ☑ Součet dvou diskretních periodických signálů **je vždy** periodický signál.

Pohov!

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY



(a)



(b)

E) SUDÉ A LICHÉ VELIČINY

- ☑ **Sudá veličina** je taková, pro níž platí

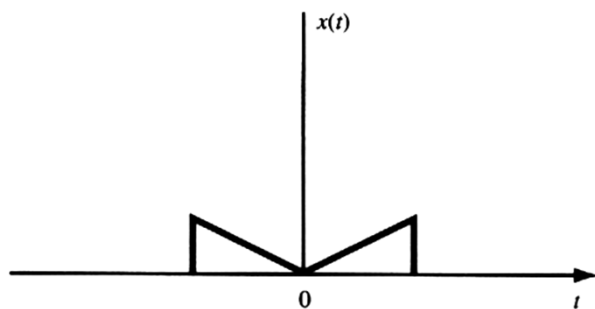
$$x(-t) = x(t), \quad X_{-n} = X_n$$

- **Lichá veličina** je taková, pro níž platí

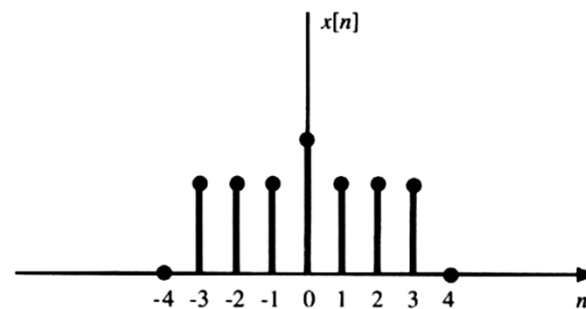
$$x(-t) = -x(t), \quad X_{-n} = -X_n$$

- Součin sudé a liché veličiny je lichá veličina.
- Součin dvou sudých nebo dvou lichých veličin je sudá veličina.

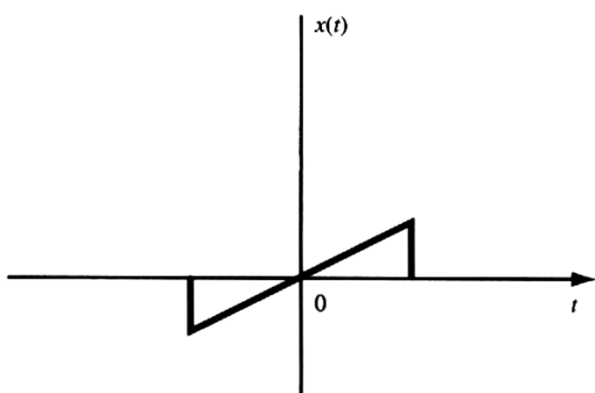
E) SUDÉ A LICHÉ VELIČINY



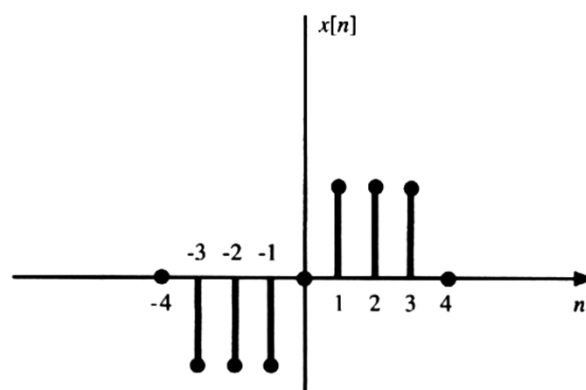
(a)



(b)



(c)



(d)

NĚCO MÁLO NAVÍC

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE & VÝKON SIGNÁLU

jsou odvozeny z primární představy signálu, reprezentovaného elektrickými veličinami, elektrickým napětím, příp. proudem. Na základě fyzikálních zákonitostí platí, že okamžitý výkon $p(t)$ v čase t na reálném odporu R je roven součinu okamžitého napětí na odporu a proudu, jím protékajícím, tedy

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Podle Ohmova zákona je

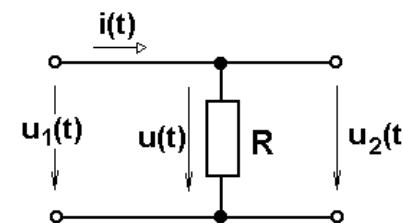
$$u(t) = R \cdot i(t)$$

a po dosazení můžeme psát, že

$$p(t) = R \cdot i(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = u(t) \cdot u(t) / R = u^2(t) / R.$$

Když je $R = 1 \Omega$, se vztah zjednoduší na

$$p_{R=1}(t) = i^2(t) = u^2(t)$$



JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE & VÝKON SIGNÁLU

celková práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za čas T na jednotkovém odporu je

$$A = \int_T p(t)dt = \int_T i^2(t)dt = \int_T u^2(t)dt.$$

Na základě této rozvahy definujeme obecně energii spojitě funkce $x(t)$ vztahem

$$E_s = \int_T x^2(t)dt$$

a pro diskrétní posloupnost $x(nT_{vz})$

$$E_d = \sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE & VÝKON SIGNÁLU

Výkon je práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za časovou jednotku, tj.

$$P = \frac{E}{T}$$

a z toho $P_s = \frac{1}{T} \int x^2(t) dt$ a $P_d = \frac{1}{NT_{vz}} \sum_n^N x^2(nT_{vz})$

Nebo v normalizovaném diskrétním tvaru

$$P_{dn} = \frac{1}{N} \sum_n^N x^2(n)$$

Pokud se energie kumuluje v nekonečně dlouhém časovém intervalu, pak se vztahy modifikují do tvaru

$$P_{s\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int x^2(t) dt \quad \text{a} \quad P_{d\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_{vz}} \sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

příp.

$$P_{dn\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_n^N x^2(n)$$

SHRNUTÍ

- ☑ jaké typy veličin známe (dle vlastností)?
- ☑ stacionarita, ergodicita;
- ☑ energie, výkon

ZA TÝDEN NASHLEDANOU