



ČASOVÉ ŘADY (SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY)



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

**UKB, A29 – RECETOX, dv.č.112
holcik@iba.muni.cz**

V. MATEMATICKÉ MODELY VELIČIN

MATEMATICKÉ MODELY VELIČIN SPOJITÝCH V ČASE

HARMONICKÁ FUNKCE

HARMONICKÁ FUNKCE

☑ **harmonická funkce** je dána vztahem

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0),$$

kde

$A > 0$ je **amplituda** harmonické funkce

$\omega > 0$ je **úhlový kmitočet** h.f., **úhlová rychlost**

φ_0 je **počáteční fáze**, tj. fáze (počáteční úhel, posun) v čase $t=0$

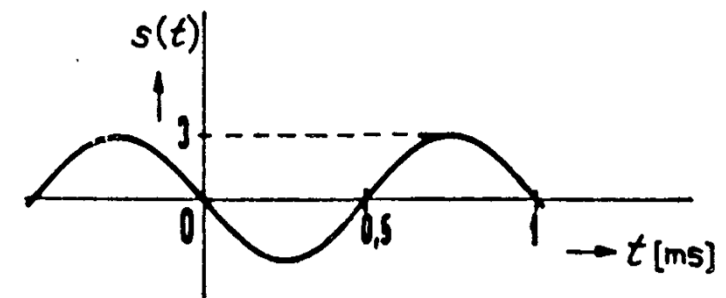
$\omega t + \varphi_0$ je **fáze** harmonické funkce

Perioda harmonické funkce je dána vztahem

$$T = 2\pi/\omega$$

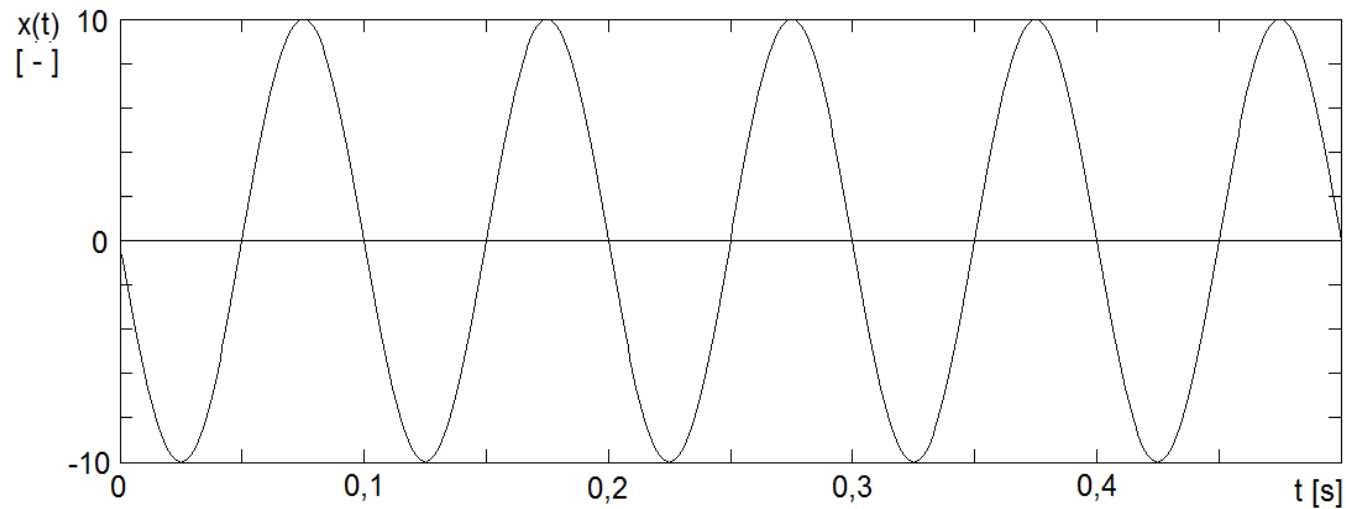
kmitočet h.f. je definován

$$f = 1/T = \omega/2\pi$$



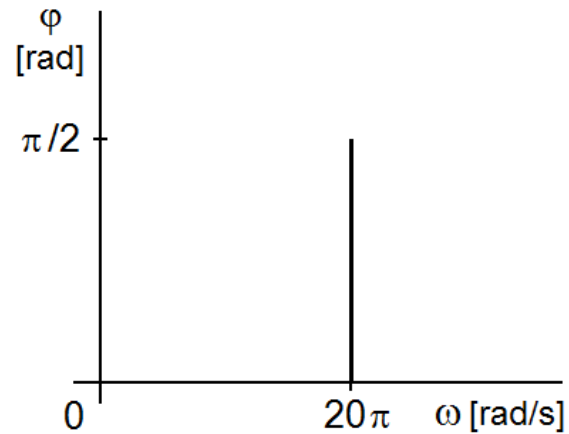
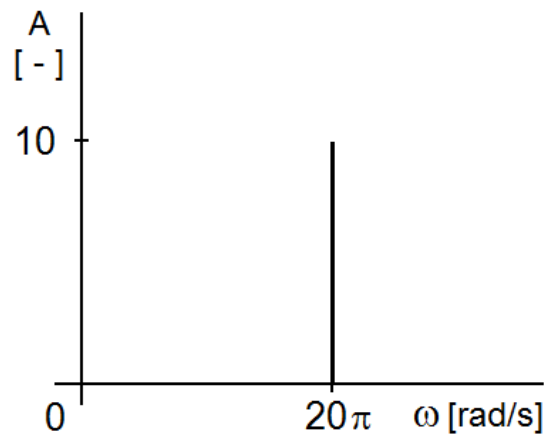
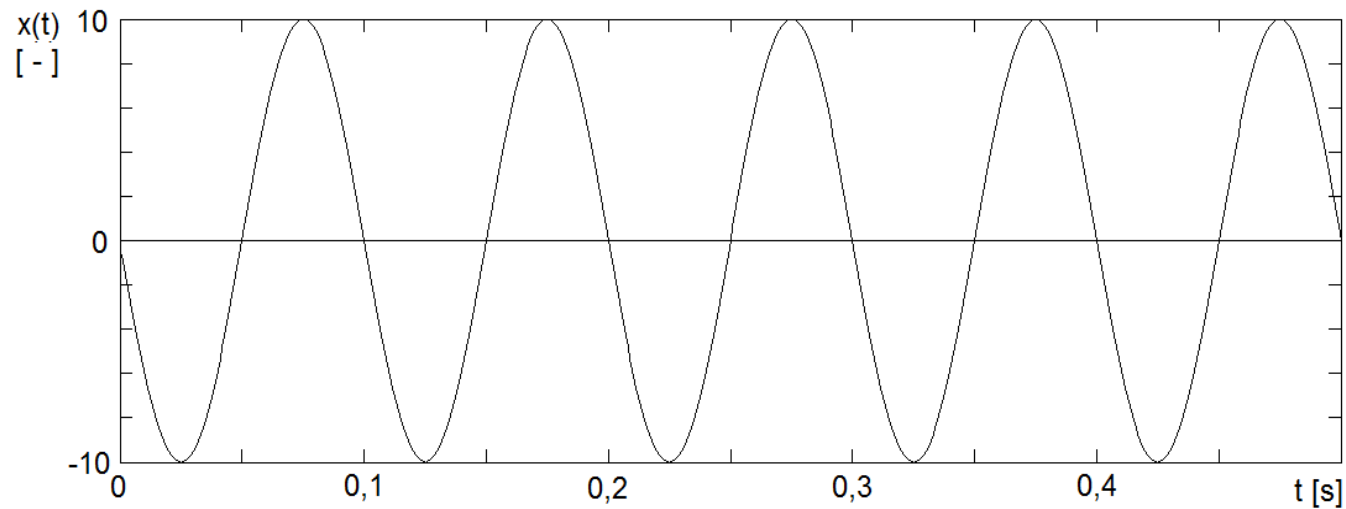
HARMONICKÁ FUNKCE

$$x(t) = 10 \cdot \cos(2\pi \cdot 10t + \pi/2).$$



HARMONICKÁ FUNKCE

$$x(t) = 10 \cdot \cos(2\pi \cdot 10t + \pi/2).$$



HARMONICKÁ FUNKCE

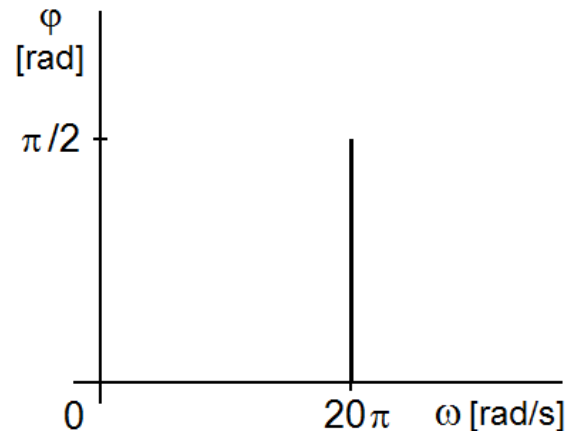
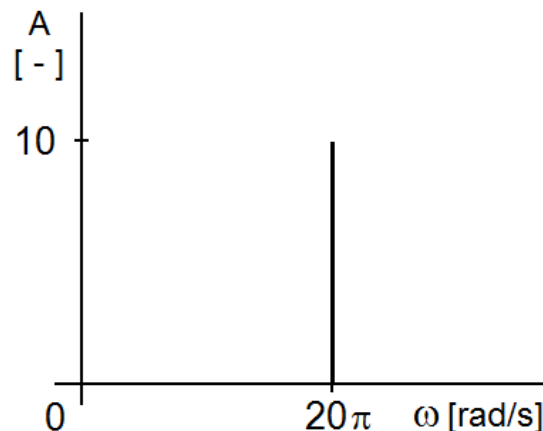
$$x(t) = 10 \cdot \cos(2\pi \cdot 10t + \pi/2).$$

- ☑ tříparametrickou harmonickou funkci lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách

amplituda x (úhlový) kmitočet a

počáteční fáze x (úhlový) kmitočet:

$$A = A(\omega) \quad a \quad \varphi_0 = \varphi_0(\omega);$$



spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází

!!! FREKVENČNÍ SPEKTRUM !!!



Frekvenční spektrum signálu je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se signál skládá, v závislosti na frekvenci.

! ZAPAMATOVAT! ! NA VĚKY !

HARMONICKÁ FUNKCE

☑ další definice

$$x(t) = \operatorname{Re}\{\dot{x}(t)\} = \operatorname{Re}\{A \cdot \exp[j(\omega t + \varphi_0)]\}$$

(vyplývá z Eulerových vztahů)

HARMONICKÁ FUNKCE

kupodivu lze použít i vztah

$$x(t) = \operatorname{Re}\{A \cdot \exp[j(-\omega t - \varphi_0)]\} = \operatorname{Re}\{\dot{x}^*(t)\}$$

pozor !!! pozor

- záporný kmitočet - ale funguje to

HARMONICKÁ FUNKCE

Protože platí

$$x(t) = \operatorname{Re}\{\dot{x}(t)\} = \operatorname{Re}\{\dot{x}^*(t)\} \text{ a } \operatorname{Im}\{\dot{x}(t)\} = -\operatorname{Im}\{\dot{x}^*(t)\}$$

je i

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \{\dot{x}(t) + \dot{x}^*(t)\}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \{A \cdot \exp(j\varphi_0) \cdot \exp(j\omega t)\} + \\ + \frac{1}{2} \cdot \{A \exp(-j\varphi_0) \cdot \exp(-j\omega t)\}$$

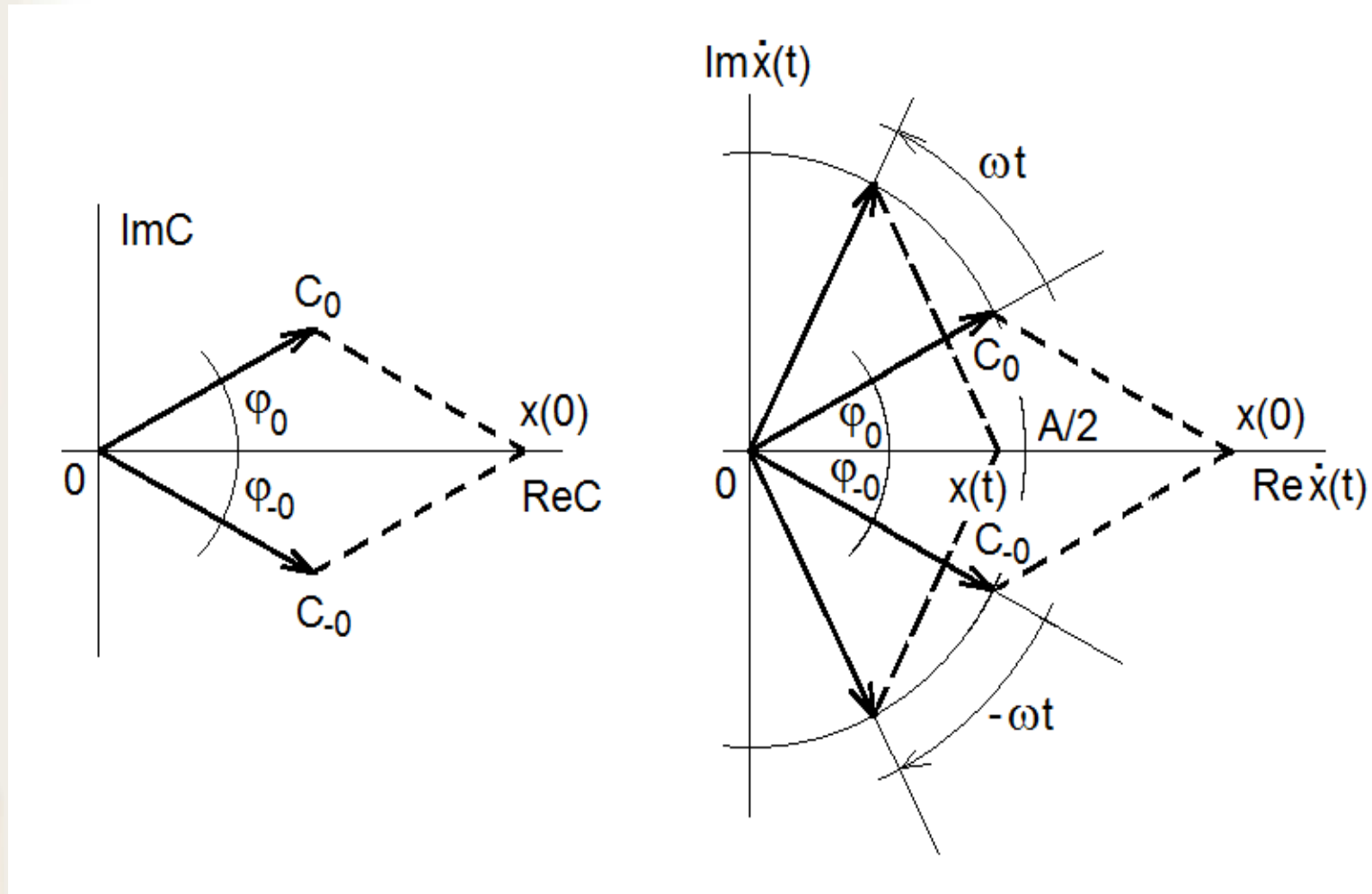
Označíme-li

$$\dot{C}_1 = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \exp(j\varphi_0) \quad \text{a} \quad \dot{C}_{-1} = \frac{1}{2} \cdot A \exp(-j\varphi_0)$$

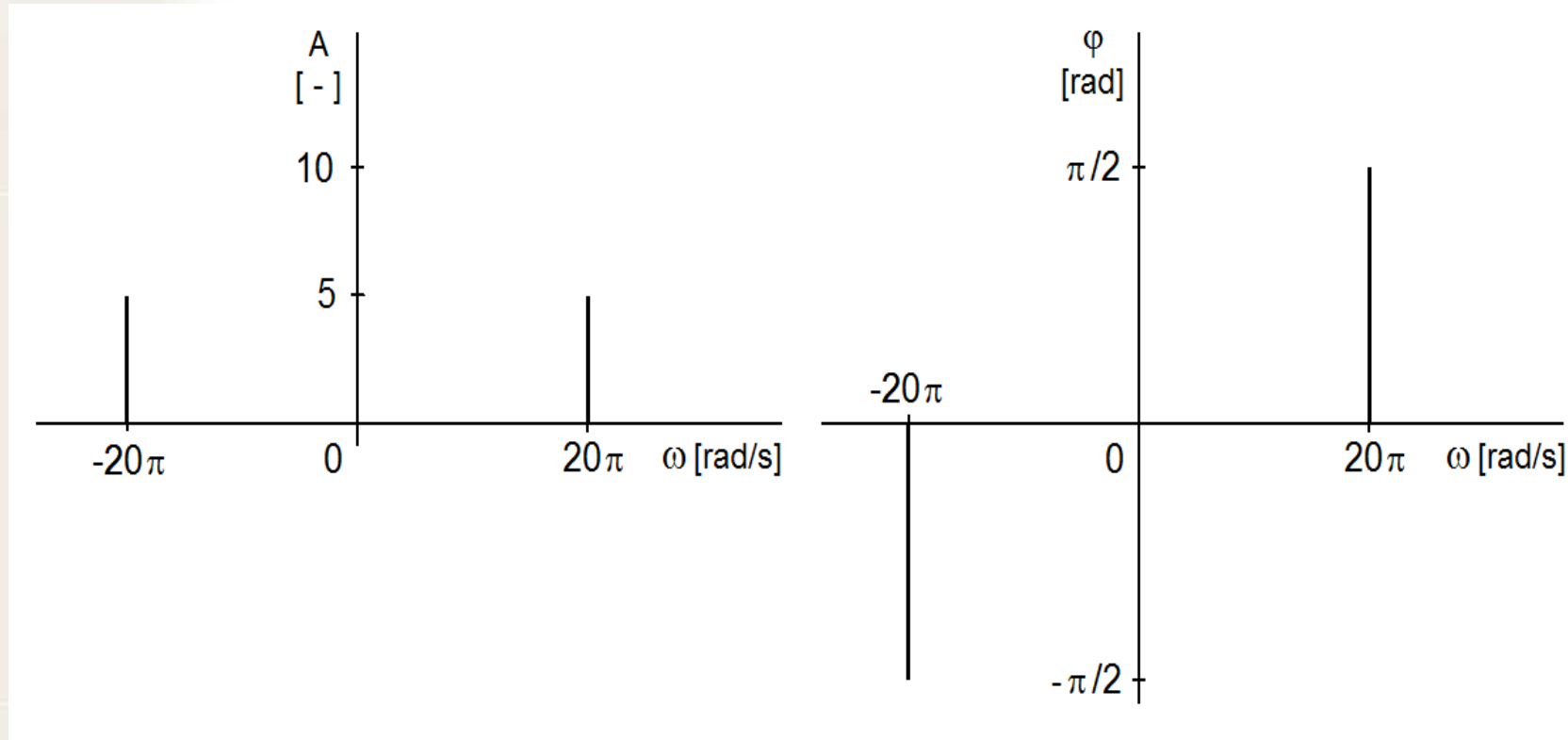
je

$$x(t) = \dot{C}_1 \cdot \exp(j\omega t) + \dot{C}_{-1} \cdot \exp[j(-\omega)t]$$

HARMONICKÁ FUNKCE



HARMONICKÁ FUNKCE



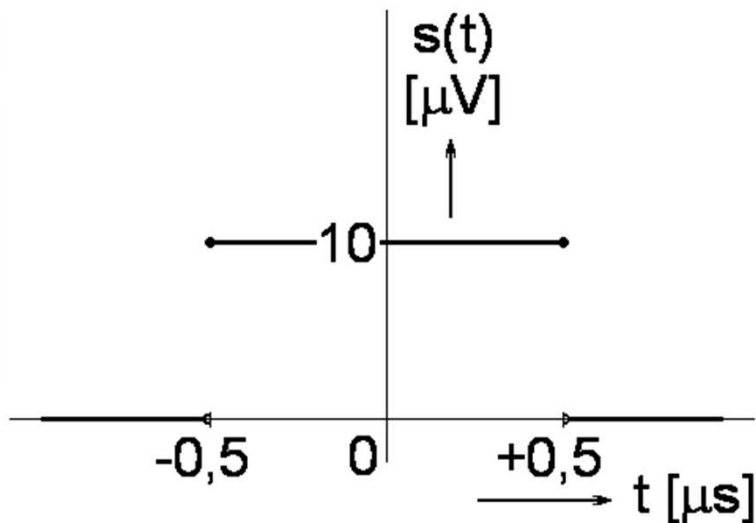
spektrum amplitud

spektrum počátečních fází

- ☑ <http://www.mysearch.org.uk/website1/html/222.Function.html>
- ☑ <http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/complex/complex.html>
- ☑ <http://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic>
- ☑ <http://www.khanacademy.org/science/physics/oscillatory-motion/harmonic-motion/v/introduction-to-harmonic-motion>
- ☑ <http://www.youtube.com/watch?v=eeYRkW8V7Vg>

NEPERIODICKÉ FUNKCE

☑ jednorázová deterministická veličina



$$s(t) = 10 \cdot 10^{-6} \text{ V pro } t \in \langle -0,5 \mu\text{s}; 0,5 \mu\text{s} \rangle$$

$$s(t) = 0 \text{ V pro } t \in (0,5 \mu\text{s}; \infty)$$

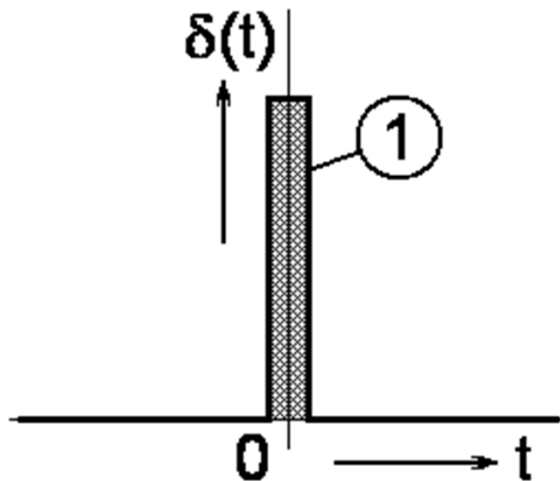
$$s(t) = 0 \text{ V pro } t \in \langle -\infty; -0,5 \mu\text{s} \rangle$$

JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) - $\delta(t)$

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$



zjednodušeně:

jednotkový impuls $\delta(t)$ je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impuls, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky \Rightarrow **mohutnost** je jednotková

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \neq 0; \\ \infty, & \text{pro } t = 0. \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

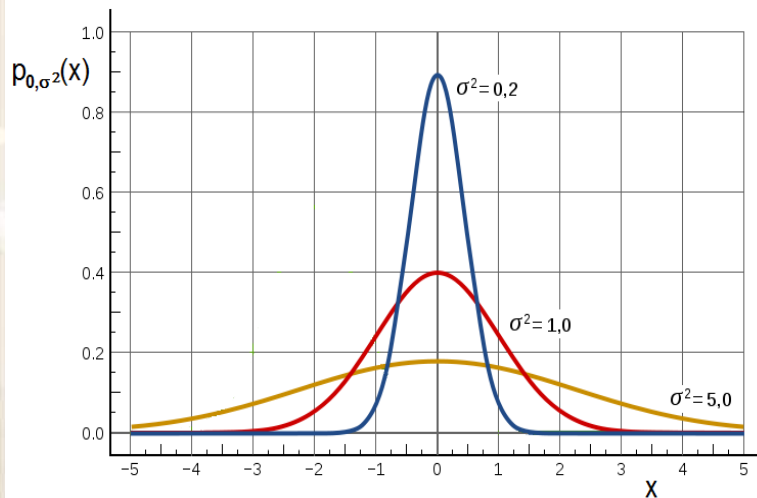
☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) - $\delta(t)$

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

zjednodušeně:

jednotkový impuls $\delta(t)$ je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impuls, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky \Rightarrow **mohutnost** je jednotková



$$\delta(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-t^2/\sigma^2}$$

JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

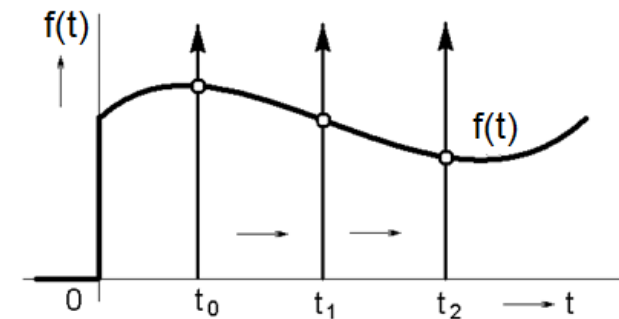
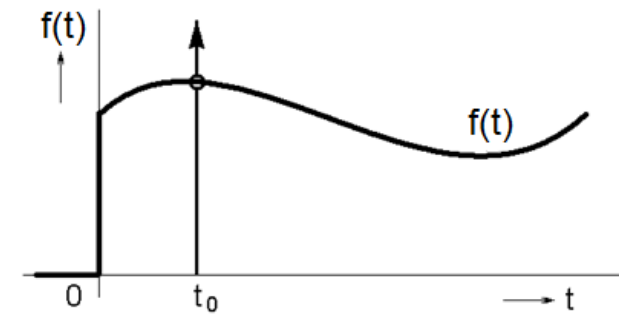
☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) - $\delta(t)$

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0) \delta(t - t_0) dt =$$

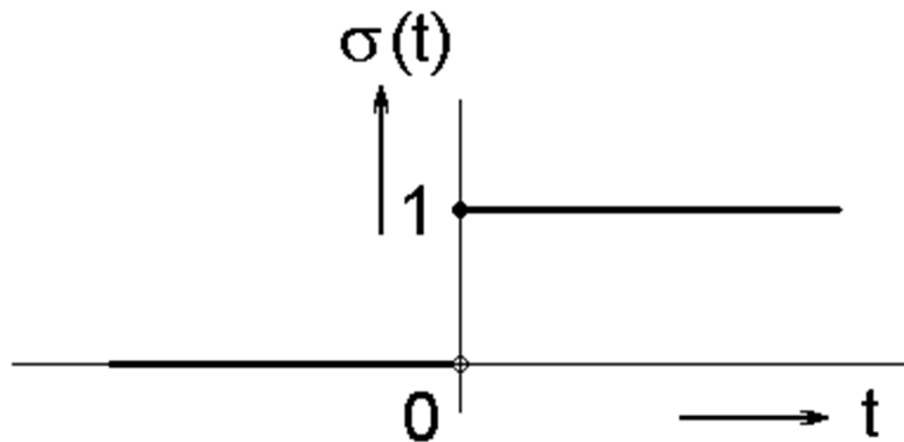
$$= f(t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = f(t_0).$$



JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

☑ jednotkový skok (Heavisidova funkce)

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0; \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases}$$



JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

☑ pro obě uvedené jednorázové funkce platí:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \sigma(t)$$

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t).$$

MATEMATICKÉ MODELY VELIČIN DISKRÉTNÍCH V ČASE

PERIODICKÉ POSLOUPNOSTI

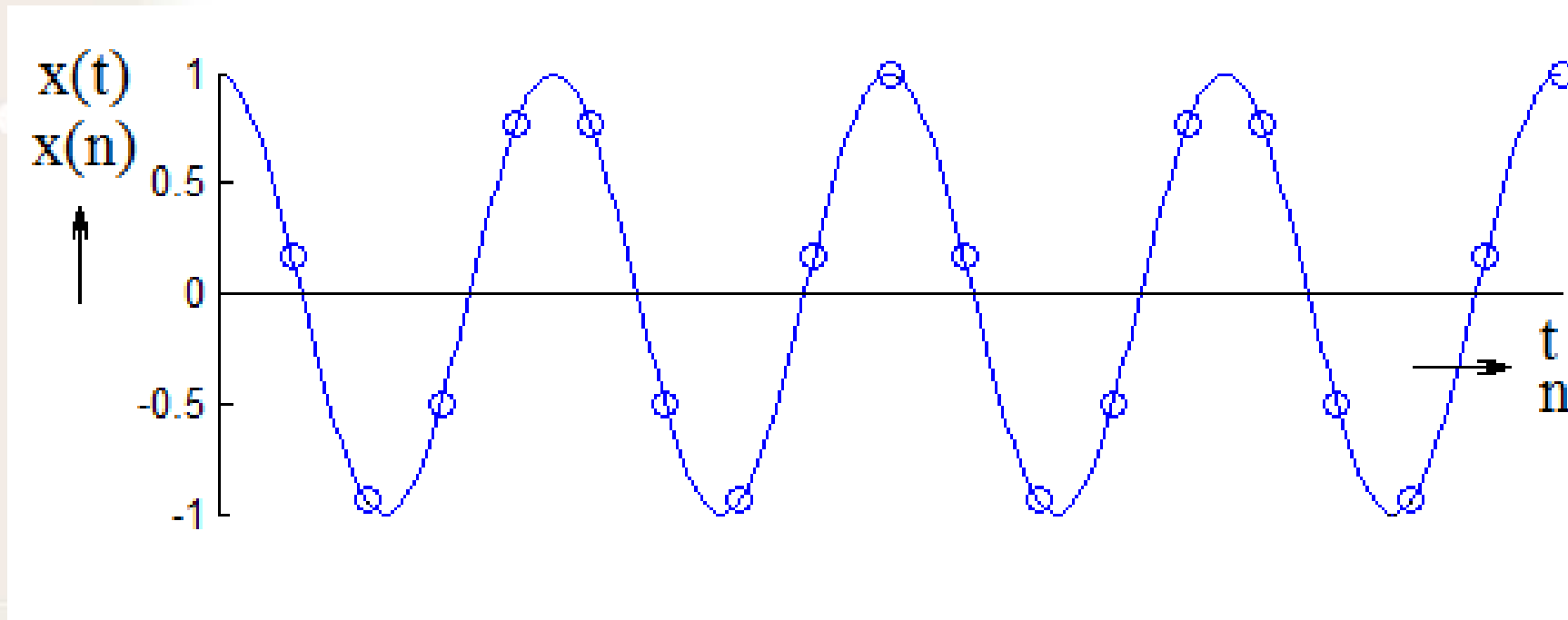
Diskrétní posloupnost $x(nT_{vz})$ je periodická s periodou NT_{vz} , právě když platí

$$x[(n+k.N)T_{vz}] = x(nT_{vz}), \text{ pro } n, k = 0, 1, 2, \dots,$$

ve zkráceném tvaru argumentu

$$x[n+k.N] = x(n), \text{ pro } n, k = 0, 1, 2, \dots.$$

PERIODICKÉ POSLOUPNOSTI



HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(2\pi f nT_{vz} + \varphi_0) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi nT_{vz}}{NT_{vz}} + \varphi_0\right) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N} + \varphi_0\right),$$

když $T = NT_{vz}$ a tedy $f = 1/NT_{vz}$ nebo

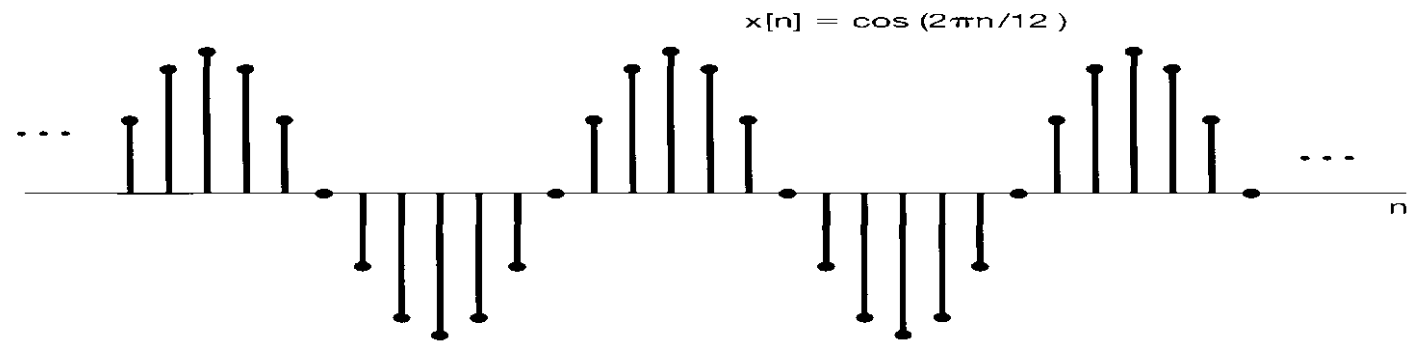
$$x(nT_{vz}) = A \cdot \exp\left(\frac{2\pi j n}{N} + \varphi_0\right).$$

Komplexní exponenciála samozřejmě rovněž reprezentuje periodickou veličinu, protože platí

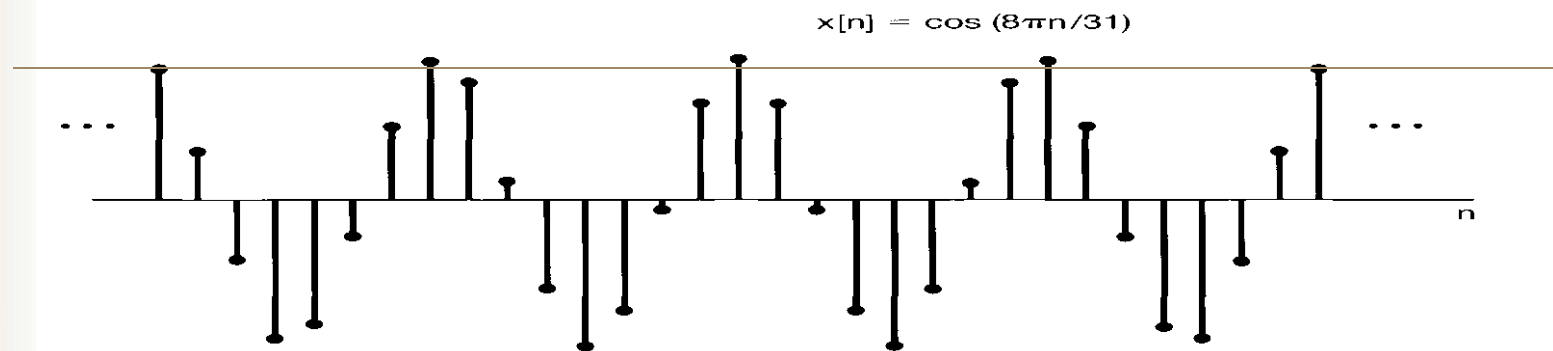
$$x[(k+N)T_{vz}] = \exp\frac{j2\pi(k+N)}{N} = \exp\frac{j2\pi k}{N} \cdot \exp(j2\pi),$$

kdy $\exp(2\pi j) = \cos(2\pi) + j \cdot \sin(2\pi) = 1 + j0 = 1$

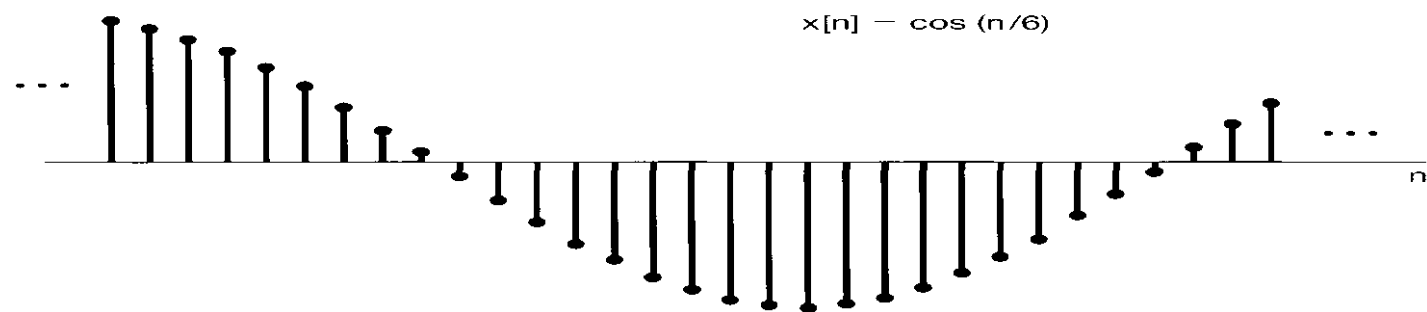
HARMONICKÁ FUNKCE A VZORKOVÁNÍ



(a)



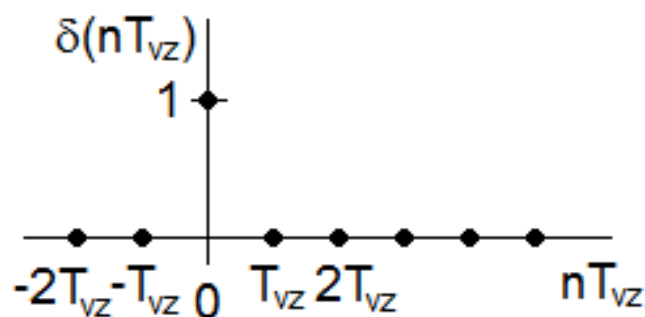
(b)



(c)

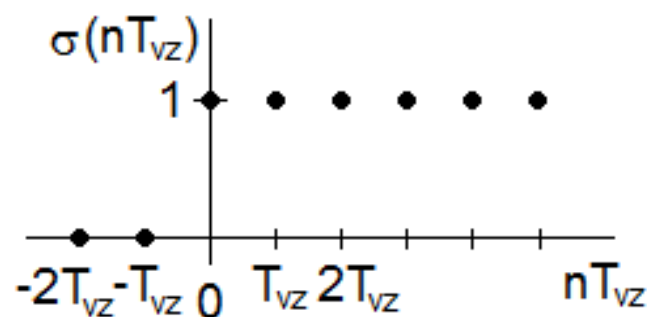
JEDNORÁZOVÉ POSLOUPNOSTI

- ☑ diskrétní jednotkový impulz (Kronekerovo delta)



$$\delta(nT_{vz}) = \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

- ☑ diskrétní jednotkový skok



$$\sigma(nT_{vz}) = \sigma(n) = \begin{cases} 0, & n < 0; \\ 1, & n \geq 0. \end{cases}$$

JEDNORÁZOVÉ POSLOUPNOSTI

Podobně jako pro spojitou nezávisle proměnou platí i pro diskrétní, že

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_{vz}) \cdot \delta(nT_{vz}) = f(0),$$

resp.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_{vz}) \cdot \delta(nT_{vz} - mT_{vz}) = f(mT_{vz}).$$

A také

$$\sum_{n=-\infty}^m \delta(nT_{vz}) = \sigma(mT_{vz})$$

a

$$\delta(nT_{vz}) = \sigma(nT_{vz}) - \sigma[(n-1)T_{vz}].$$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE & VÝKON SIGNÁLU

jsou odvozeny z primární představy signálu, reprezentovaného elektrickými veličinami, elektrickým napětím, příp. proudem. Na základě fyzikálních zákonitostí platí, že okamžitý výkon $p(t)$ v čase t na reálném odporu R je roven součinu okamžitého napětí na odporu a proudu, jím protékajícím, tedy

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Podle Ohmova zákona je

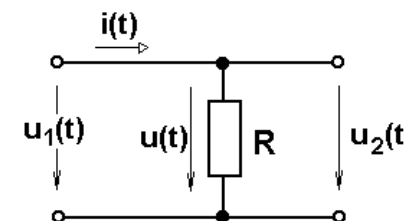
$$u(t) = R \cdot i(t)$$

a po dosazení můžeme psát, že

$$p(t) = R \cdot i(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = u(t) \cdot u(t) / R = u^2(t) / R.$$

Když je $R = 1 \Omega$, se vztah zjednoduší na

$$p_{R=1}(t) = i^2(t) = u^2(t)$$



JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE & VÝKON SIGNÁLU

celková práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za čas T na jednotkovém odporu je

$$A = \int_T p(t)dt = \int_T i^2(t)dt = \int_T u^2(t)dt.$$

Na základě této rozvahy definujeme obecně energii spojitě funkce $x(t)$ vztahem

$$E_s = \int_T x^2(t)dt$$

a pro diskrétní posloupnost $x(nT_{vz})$

$$E_d = \sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE & VÝKON SIGNÁLU

Výkon je práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za časovou jednotku, tj.

$$P = \frac{E}{T}$$

a z toho $P_s = \frac{1}{T} \int x^2(t) dt$ a $P_d = \frac{1}{NT_{vz}} \sum_n^N x^2(nT_{vz})$

Nebo v normalizovaném diskrétním tvaru

$$P_{dn} = \frac{1}{N} \sum_n^N x^2(n)$$

Pokud se energie kumuluje v nekonečně dlouhém časovém intervalu, pak se vztahy modifikují do tvaru

$$P_{s\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int x^2(t) dt \quad \text{a} \quad P_{d\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_{vz}} \sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

příp.

$$P_{dn\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_n^N x^2(n)$$

VI. ZÁKLADNÍ OPERACE S MATEMATICKÝMI MODELY VELIČIN

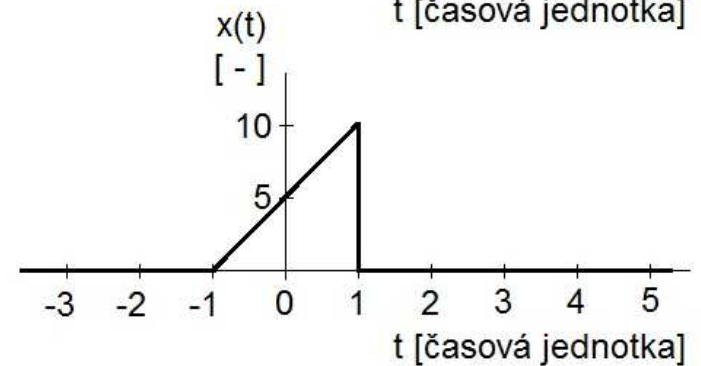
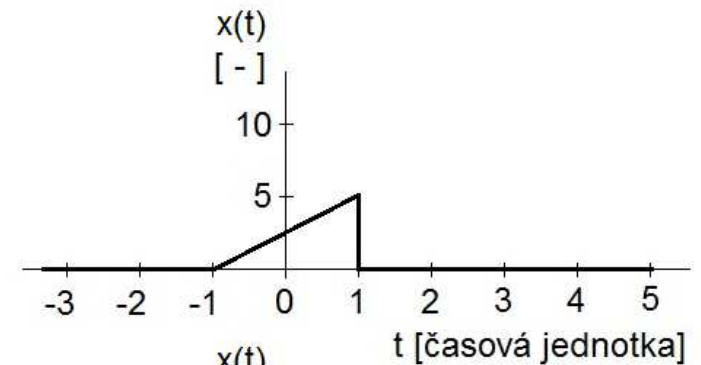
ZÁKLADNÍ OPERACE S MATEMATICKÝMI MODELY VELIČIN SPOJITÝCH V ČASE

OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

(UNÁRNÍ OPERACE)

☑ násobení konstantou

$$x(t) \sim A \cdot x(t),$$



$$A=2$$

OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

(UNÁRNÍ OPERACE)

☑ **změna časového měřítka**

$$x(t) \sim x(mt),$$

kde m je kladné reálné číslo

$m > 1$ – časová komprese;

$m < 1$ – časová expanze

$m = 1$ – nic se neděje

OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

(UNÁRNÍ OPERACE)

☑ změna časového měřítka

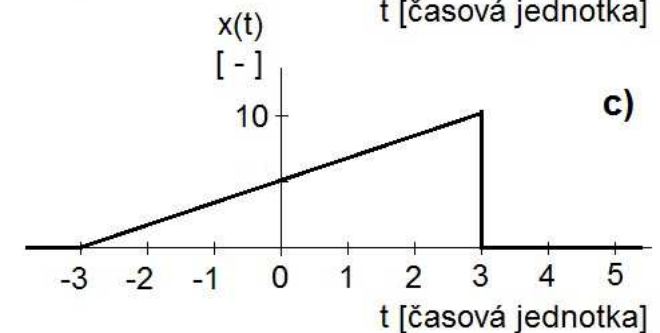
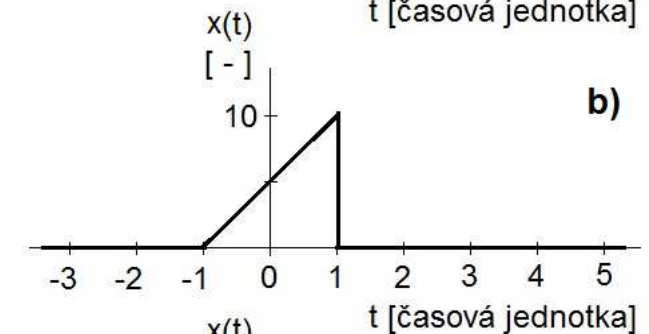
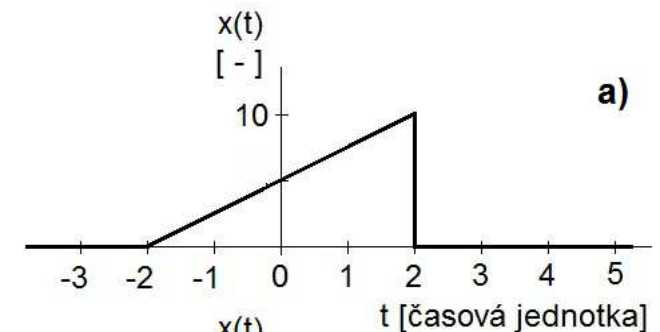
$$x(t) \sim x(mt),$$

kde m je kladné reálné číslo

$m > 1$ – časová komprese;

$m < 1$ – časová expanze

$m = 1$ – nic se neděje



a) originál; b) $m=2$; c) $m=2/3$

OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

(UNÁRNÍ OPERACE)

☑ posunutí v čase

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

τ je reálné, od nuly různé číslo;

$$\tau > 0 - ?$$

OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

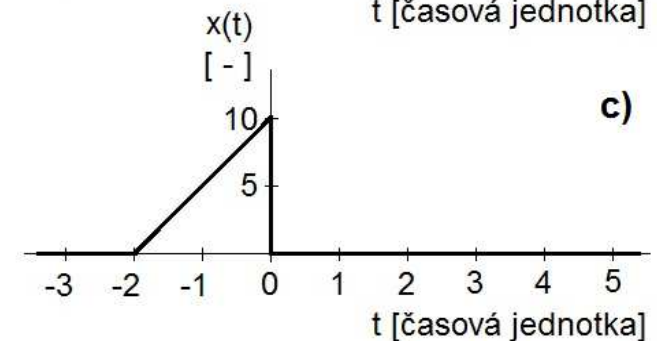
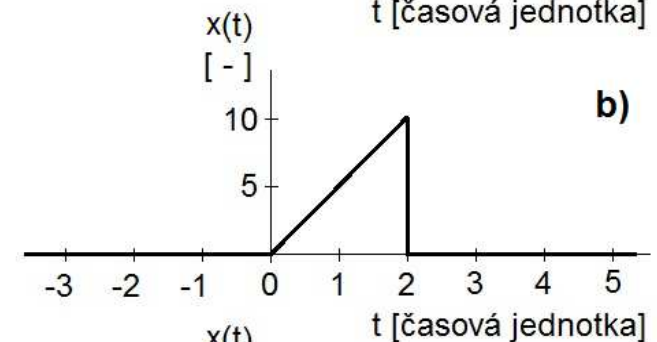
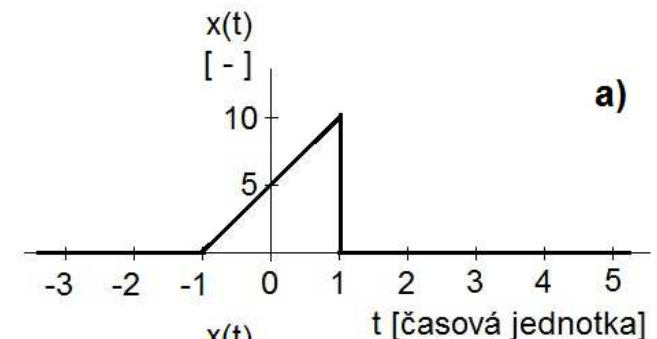
(UNÁRNÍ OPERACE)

☑ posunutí v čase

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

τ je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$ – zpoždění



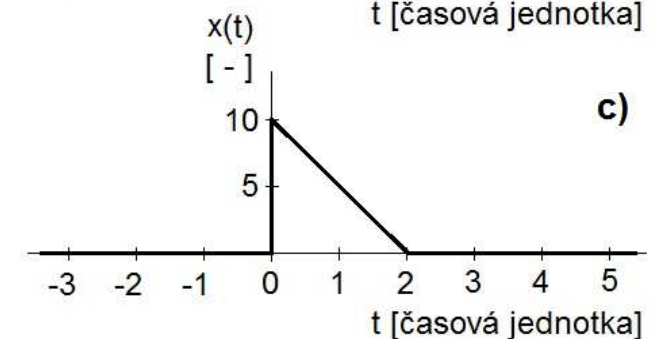
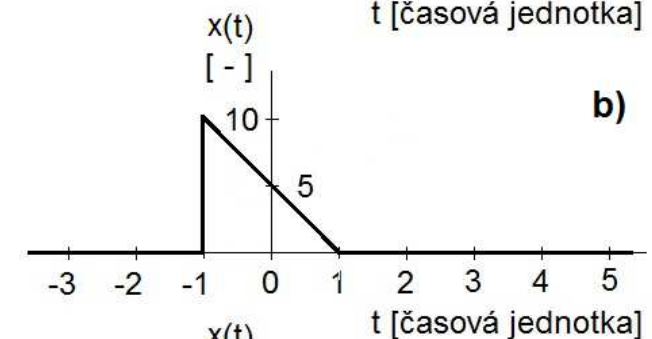
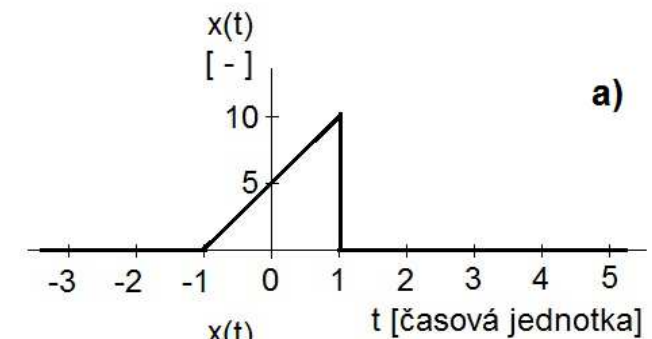
a) originál $x(t)$; b) funkce $x(t-1)$; c) funkce $x(t+1)$;

OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

(UNÁRNÍ OPERACE)

☑ obrácení (inverze) časové osy

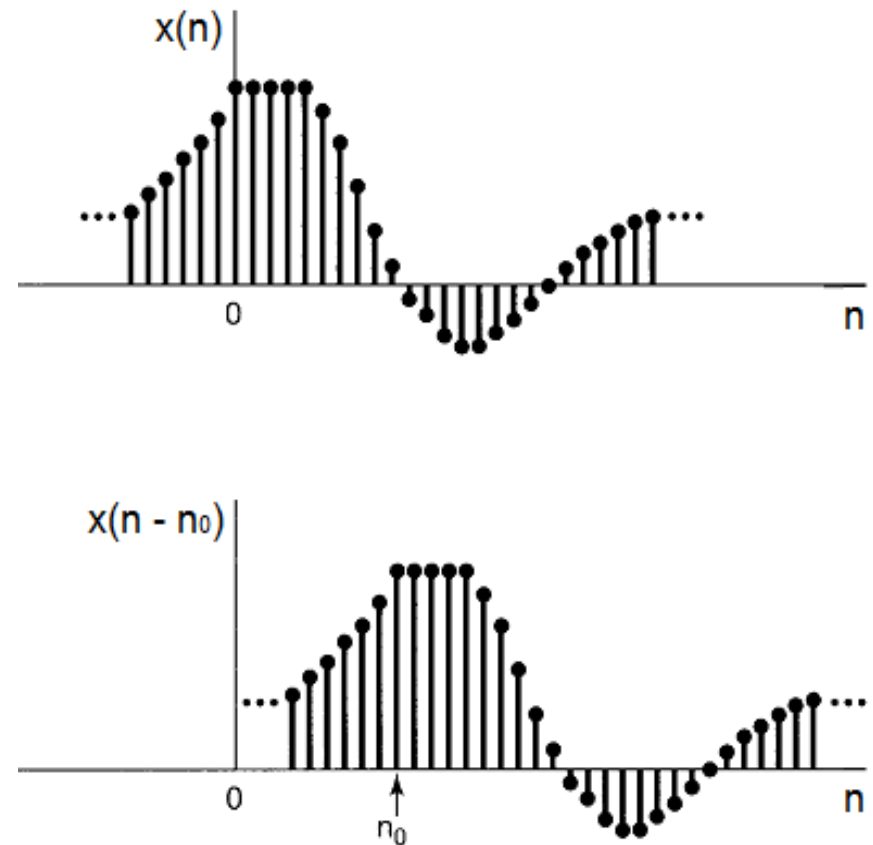
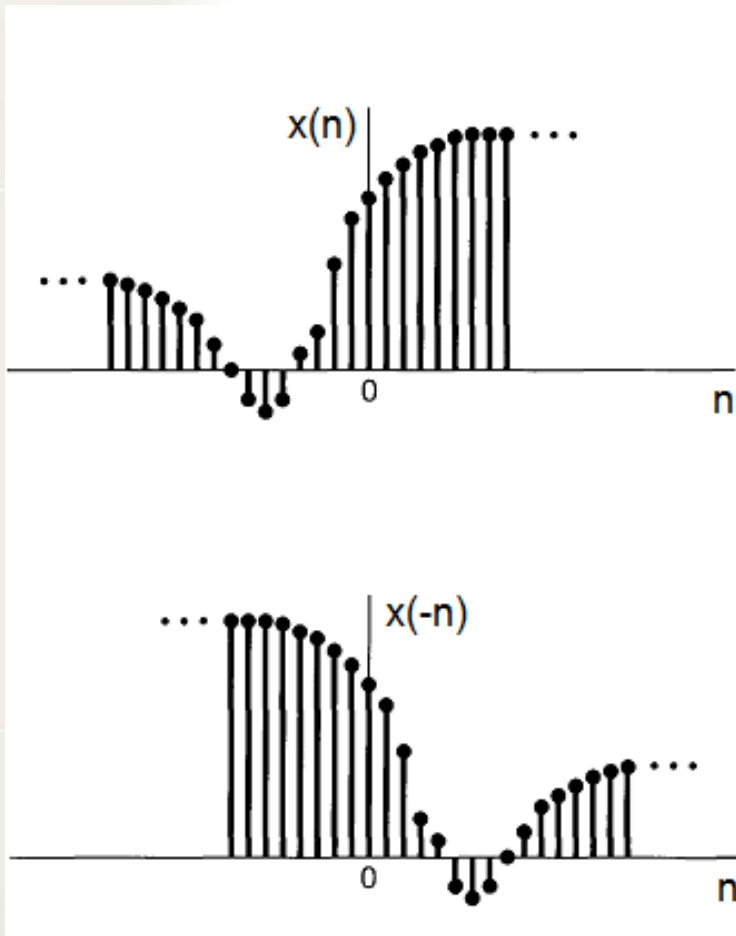
$$x(t) \sim x(-t) ,$$



a) originál $x(t)$; b) funkce $x(-t)$; c) funkce $x(-t+1)$

ZÁKLADNÍ OPERACE S MATEMATICKÝMI MODELY VELIČIN DISKRÉTNÍCH V ČASE

JE TO TŘEBA?



SHRNUTÍ

- ☑ definice základních modelů veličin (jednotkový skok, impulz, periodická funkce/posloupnost);
- ☑ různé formy vyjádření harmonické funkce/posloupnosti;
- ☑ co je frekvenční spektrum?
- ☑ základní unární operace s funkcemi/posloupnostmi.

ZA TÝDEN NASHLEDANOU