ČASOVÉ ŘADY
(SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY)

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

VI. ZÁKLADNÍ OPERACE S MATEMATICKÝMI MODELY VELIČIN

POKRAČOVÁNÍ

BINÁRNÍ OPERACE
FUNKCE SPOJITÉ V ČASE

KONVOLUCE

DEFINICE

Konvoluce je matematická operace mezi dvěma funkcemi $x_1(t)$ a $x_2(t)$ téhož argumentu definovaný (v případě spojitých funkcí) integrálem

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau).x_2(t-\tau).d\tau,$$

kde funkce $x_2(t)$ se často nazývá ***konvoluční jádro***.

VLASTNOSTI

Komutativní zákon:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau).x_2(t-\tau).d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau).x_2(\tau).d\tau = x_2(t) * x_1(t) \qquad \approx X_1(\omega).X_2(\omega)$$

Důkaz:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau).x_2(t-\tau).d\tau = \begin{vmatrix} u = t-\tau \\ \tau = u - x \\ d\tau = -du \end{vmatrix} =$$

$$= -\int_{\infty}^{-\infty} x_2(u).x_1(t-u).du = x_2(t) * x_1(t)$$

VLASTNOSTI

Distributivní zákon:

$$x_1(t)*[x_2(t)+x_3(t)]=x_1(t)*x_2(t)+x_1(t)*x_3(t)$$

Asociativní zákon:

$$x_1(t)*[x_2(t)*x_3(t)]=[x_1(t)*x_2(t)]*x_3(t)$$

VLASTNOSTI

Zákon o posunu v čase

$$\text{Je} - \text{li}$$

$$x_1(t) * x_2(t) = c(t),$$

pak

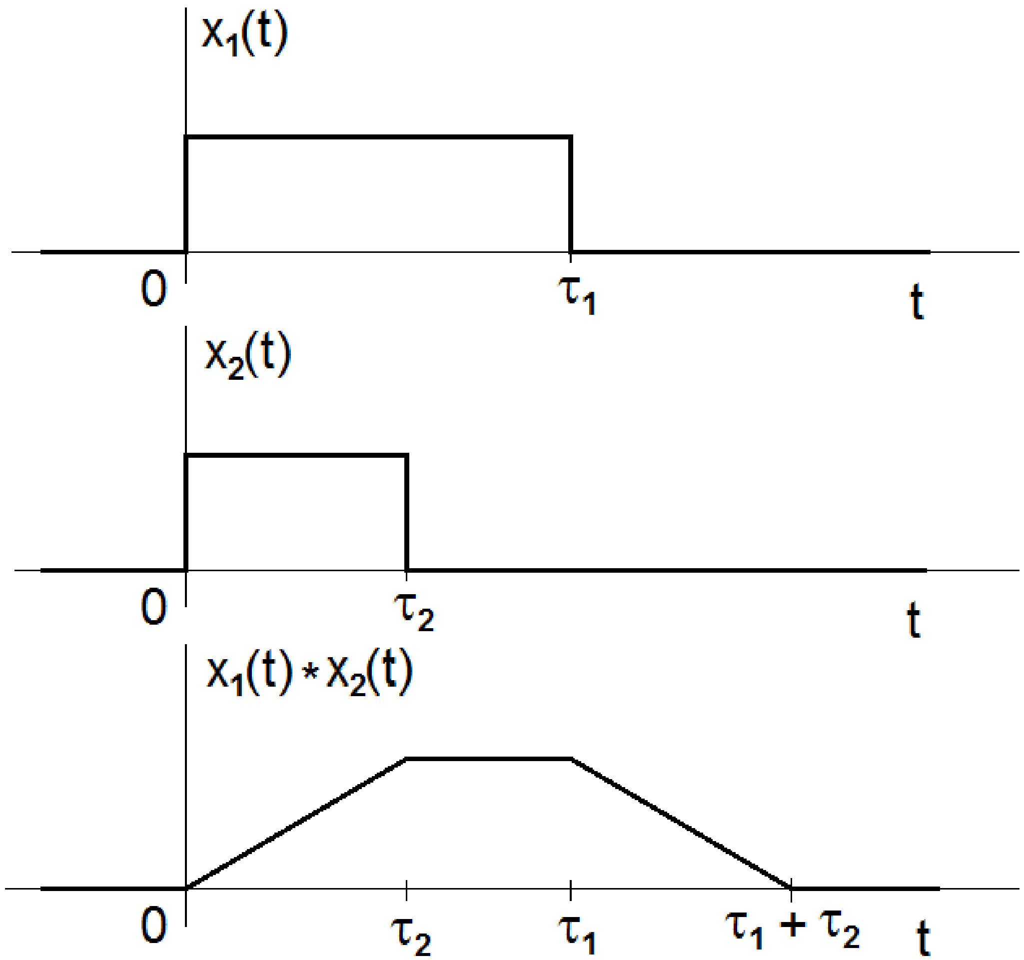
$$x_1(t) * x_2(t-T) = c(t-T),$$

$$x_1(t-T) * x_2(t) = c(t-T)$$

a

$$x_1(t-T_1) * x_2(t-T_2) = c(t-T_1-T_2)$$

ŠÍŘKOVÁ VLASTNOST KONVOLUCE



KONVOLUCE

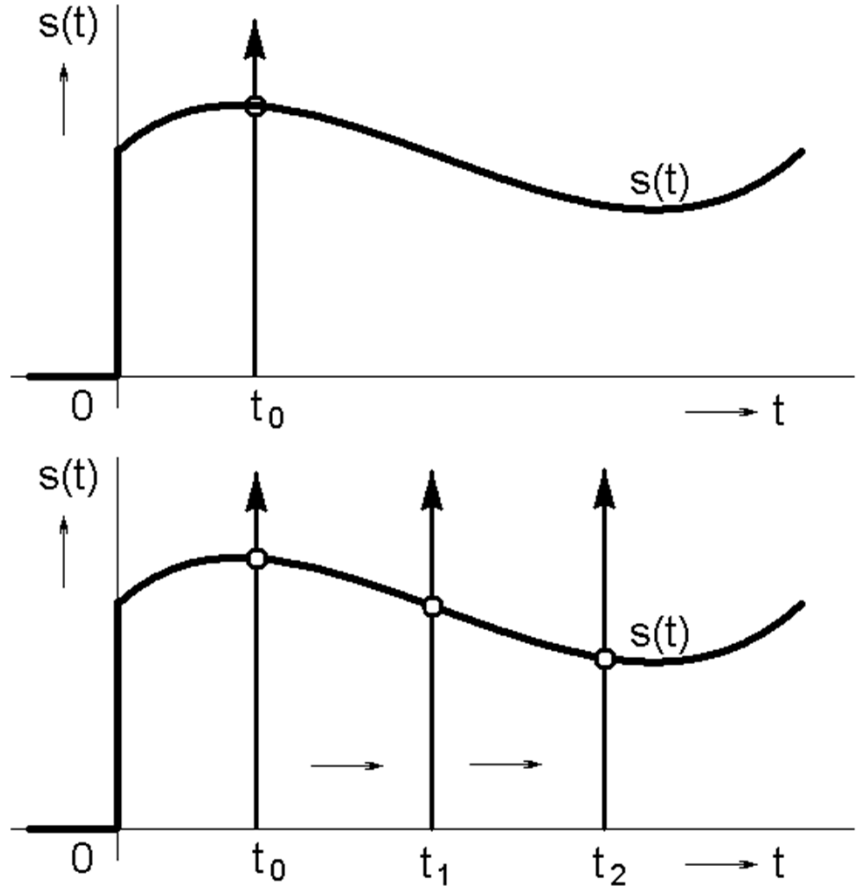
funkce s jednotkovým impulsem

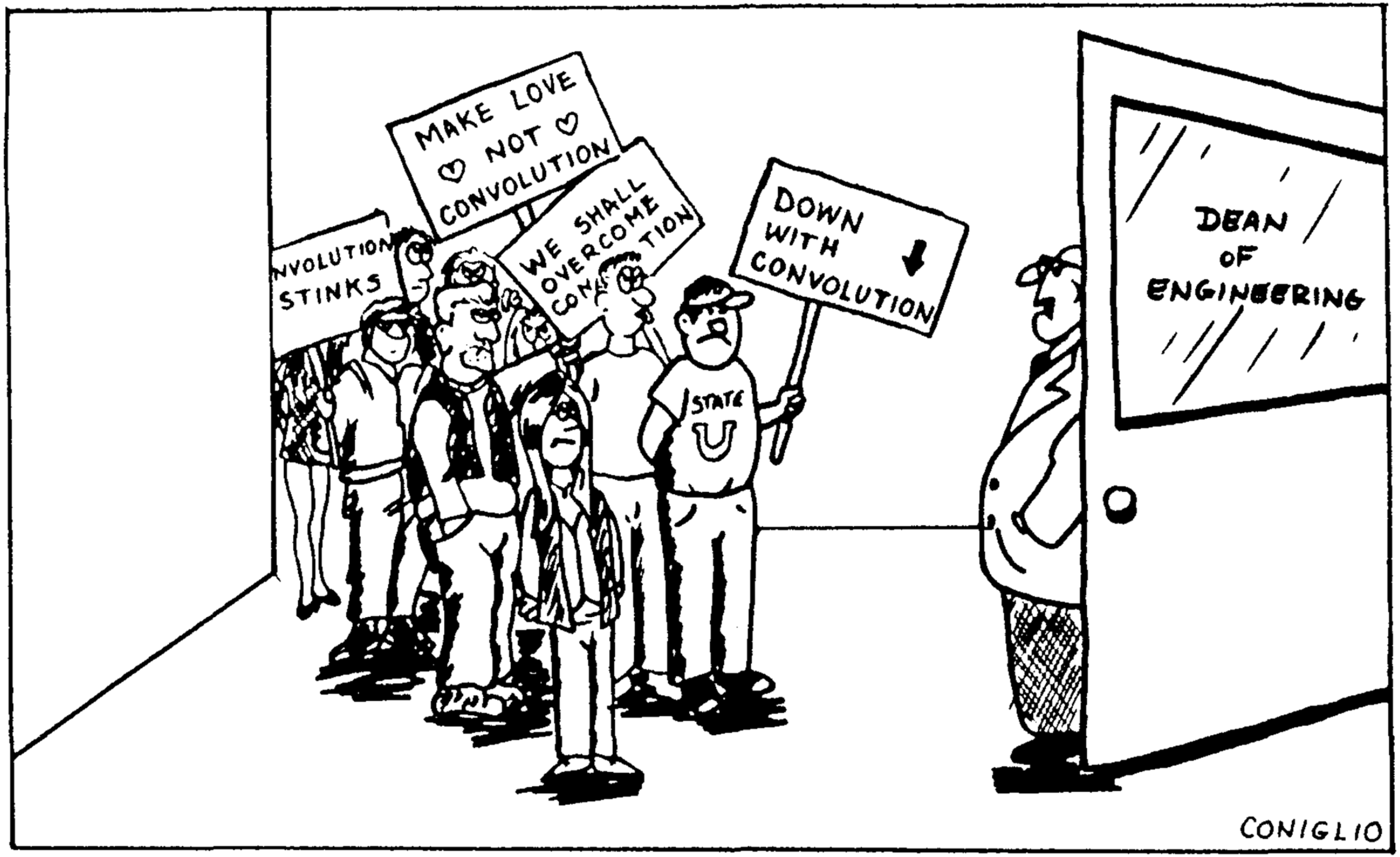
definice:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t).\delta(t-t_0)dt = s(t_0)$$

konvoluce:

$$s(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau).\delta(t-\tau)d\tau = s(t)$$

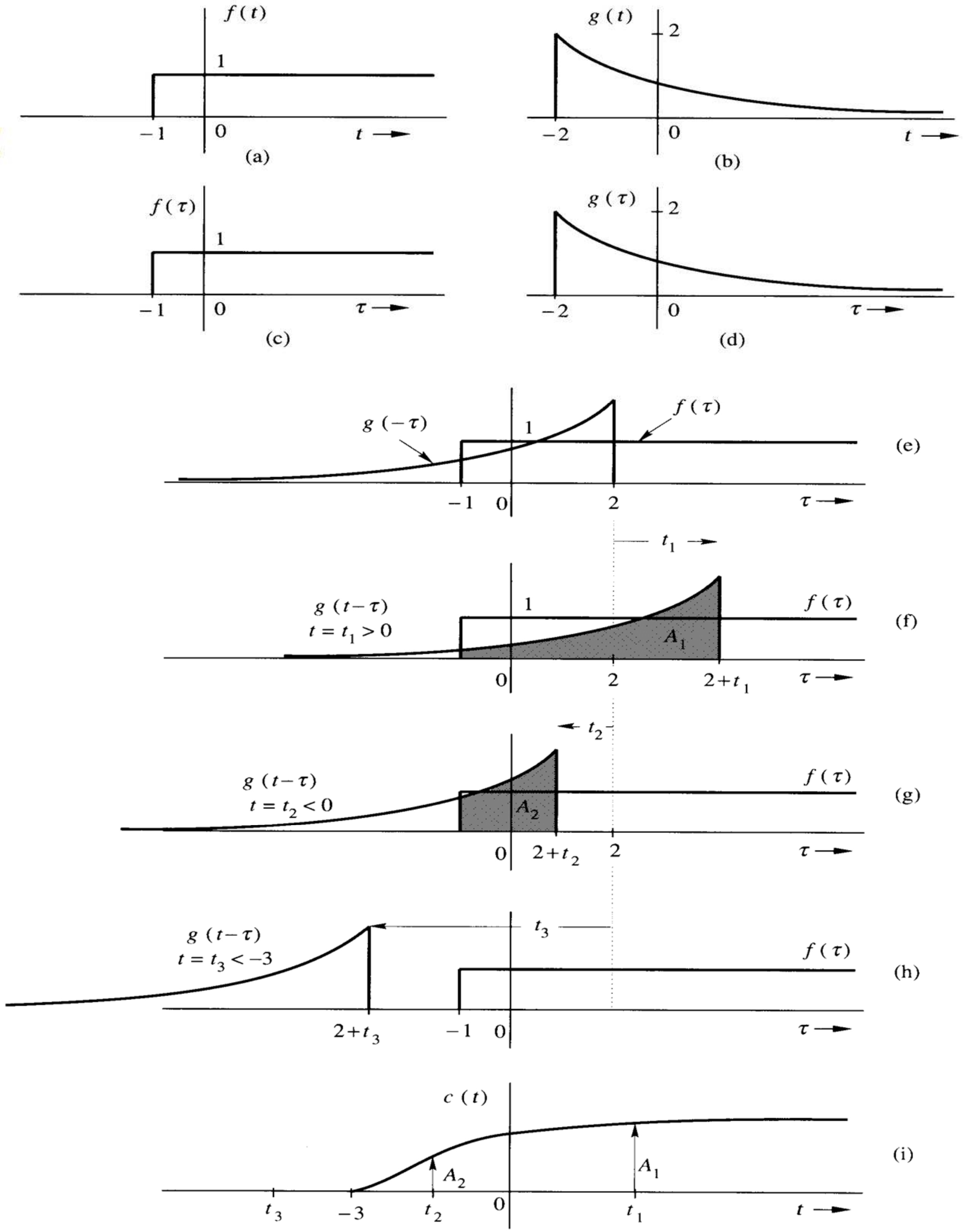




Convolution: its bark is worse than its bite!

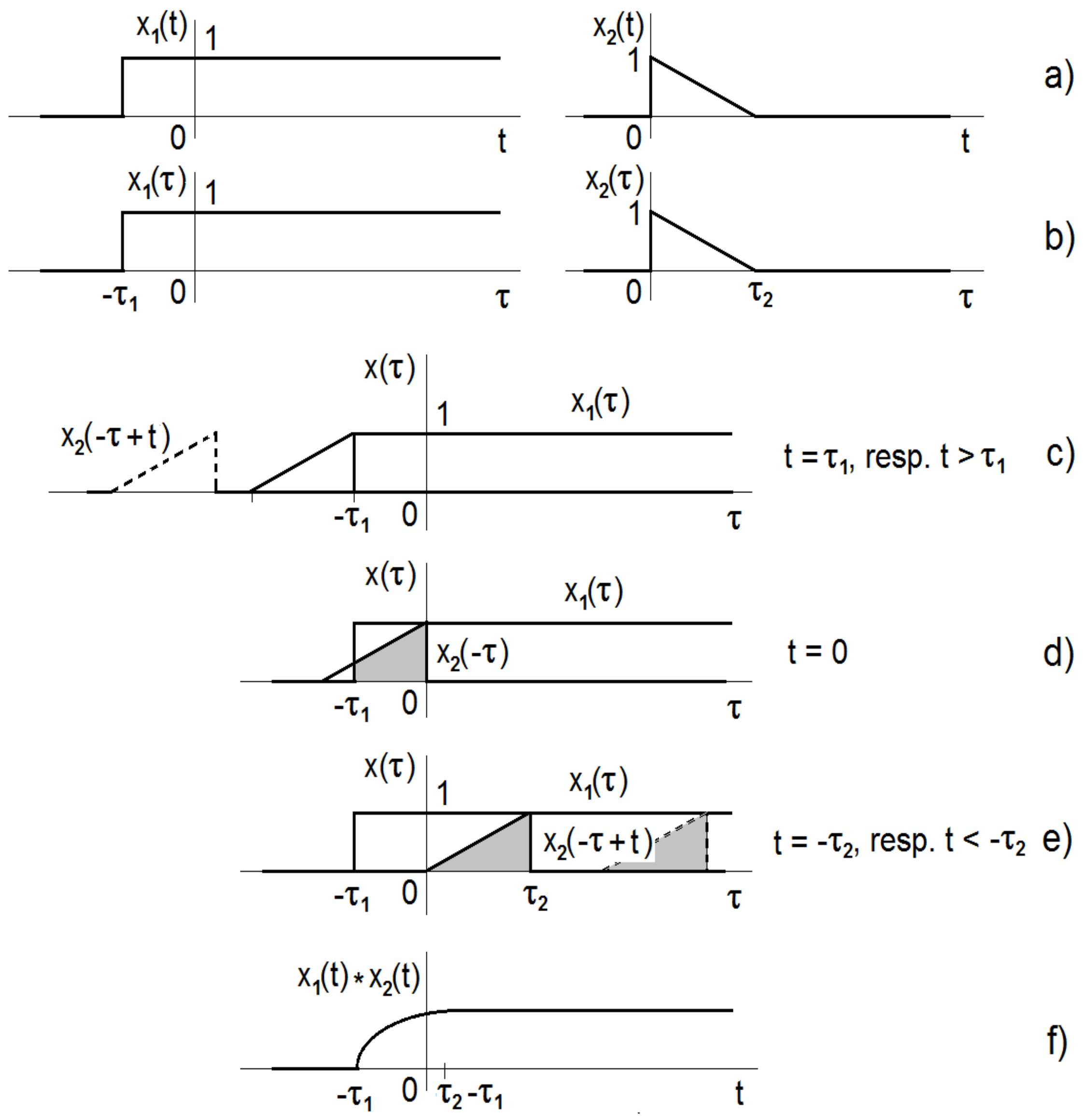
KONVOLUCE

GEOMETRICKÝ VÝZNAM

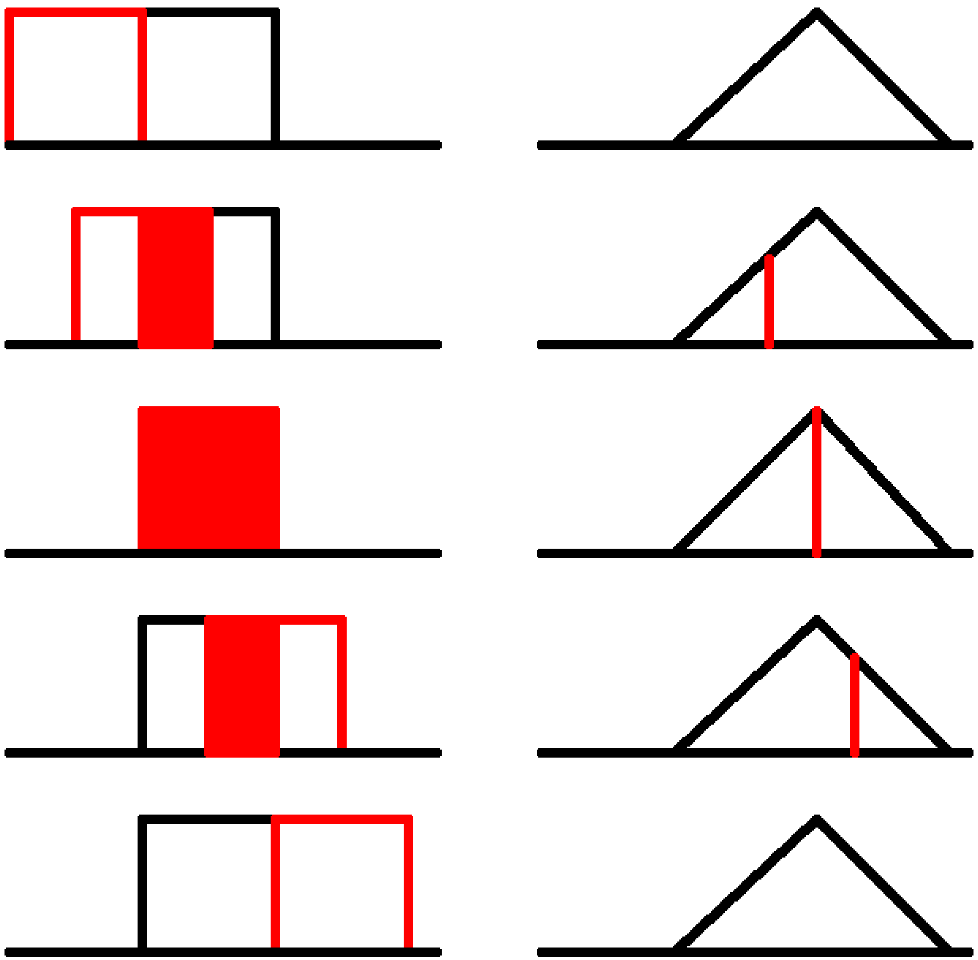


KONVOLUCE

GEOMETRICKÝ VÝZNAM

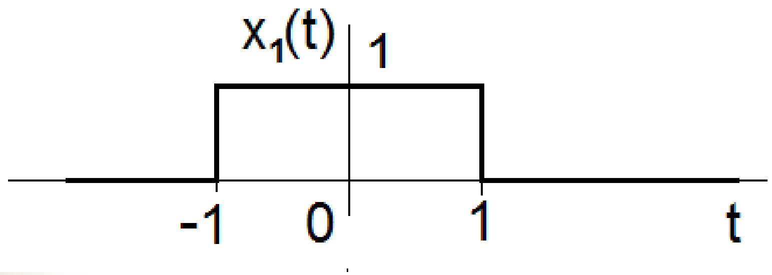


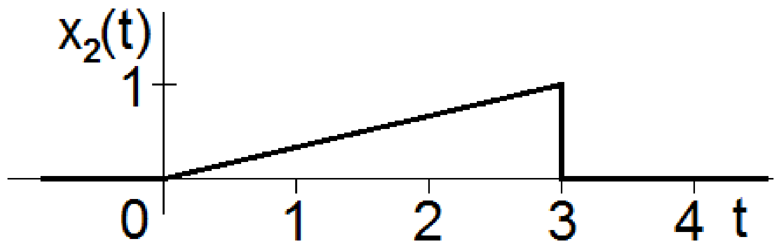
KONVOLUCE



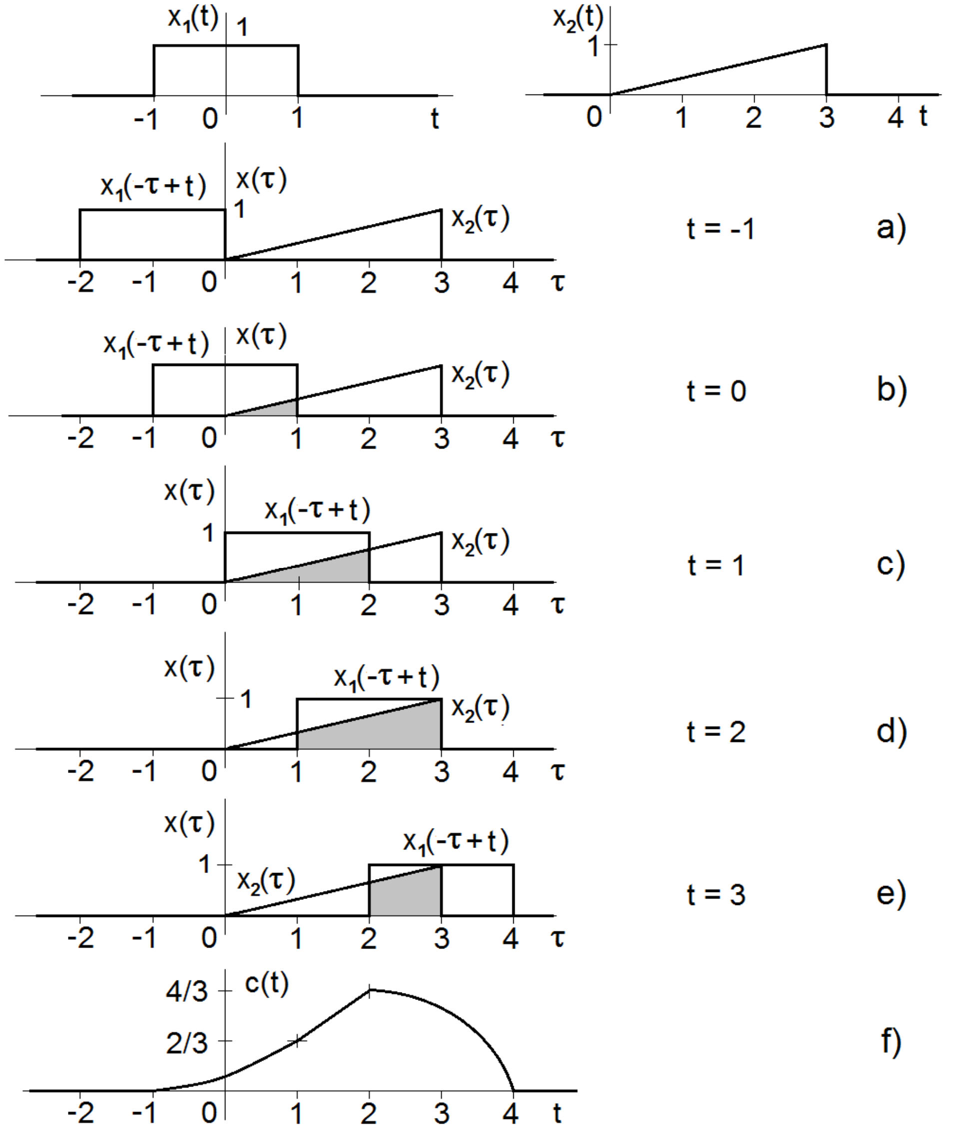
PŘÍKLAD

Určete konvoluci c(t) funkcí $x_1(t)$ a $x_2(t)$ podle obrázku.





PŘÍKLAD



x1(t)
1
-1
0
1
t
x2(t)
1
0
1
2
3
4
t
x1(-τ+t)
x(τ)
x2(τ)
-2
-1
0
1
2
3
4
τ
t = -1
a)
t = 0
b)
t = 1
c)
t = 2
d)
t = 3
e)
4/3
2/3
c(t)
f)

PŘÍKLAD

- t < −1 – součin obou funkcí je v tomto případě nulový, tedy i plocha vymezená tímto součinem a konvoluce je rovna nule (obr. a);
- $t \in \langle -1, 1\rangle$ – plocha součinu je vymezena průběhem funkce $x_2(\tau)$ v intervalu od $\tau = 0$ a polohou horní, tj. sestupné hrany funkce $x_1(-\tau + t)$, určené hodnotou t + 1 (obr. b,c); hodnota konvolučního integrálu je

$$c(t)_{-1,1} = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau).x_2(\tau).d\tau = \int_0^{t+1} \frac{1.\tau}{3}.d\tau = \frac{1}{3}\left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^{t+1} = \frac{(t+1)^2}{6};$$

- $t \in \langle 1, 2\rangle$ – v tomto intervalu je plocha součinu ohraničená opět funkcí $x_2(\tau)$, tentokrát a v daném konkrétním případu v intervalu od t − 1 do t + 1 (obr. c,d)

$$c(t)_{1,2} = x_1(t) * x_2(t) = \int_{t-1}^{t+1} \frac{1.\tau}{3}.d\tau = \frac{1}{3}\left[\frac{\tau^2}{2}\right]_{t-1}^{t+1} = \frac{(t+1)^2 - (t-1)^2}{6} = \frac{2t}{3};$$

PŘÍKLAD

- ☑ $t \in \langle 2, 4 \rangle$ – plocha součinu je nenulová v intervalu od vzestupné hrany funkce $x_1(-\tau+t)$, která je na pozici $t-1$, do sestupné hrany funkce $x_2(\tau)$, tj. $\tau = 3$ (obr.2.15e), tedy platí

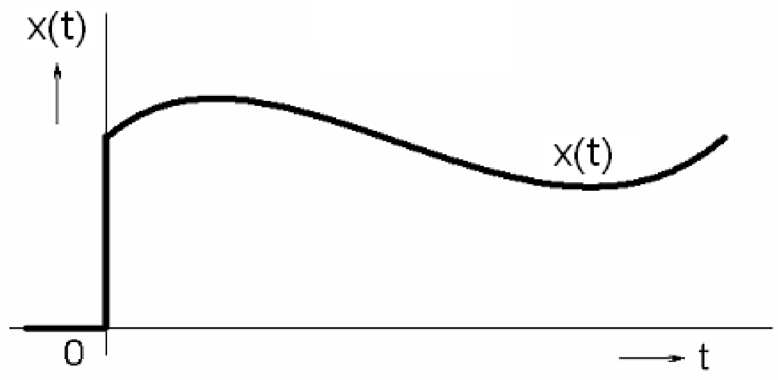
$$c(t)_{2,4} = x_1(t) * x_2(t) = \int_{t-1}^{3} \frac{1.\tau}{3}.d\tau = \frac{1}{3}\left[\frac{\tau^2}{2}\right]_{t-1}^{3} = \frac{3^2-(t-1)^2}{6} = \frac{-(t^2-2t-8)}{6};$$

- ☑ $t > 4$ – součin obou funkcí je opět nulový, proto i konvoluční integrál.

KAUZALITA

Kauzální je takový systém, jehož výstup v každém časovém okamžiku t_0 závisí pouze na průběhu vstupního signálu x(t) pro $t \leq t_0$. Jinými slovy, hodnota výstupu systému v každém okamžiku závisí pouze na vstupu v daném okamžiku a jeho průběhu v minulosti, nikoliv na budoucích hodnotách vstupního signálu. Systém, který tento požadavek nesplňuje, nazýváme ***nekauzální***, příp. ***anticipativní***.

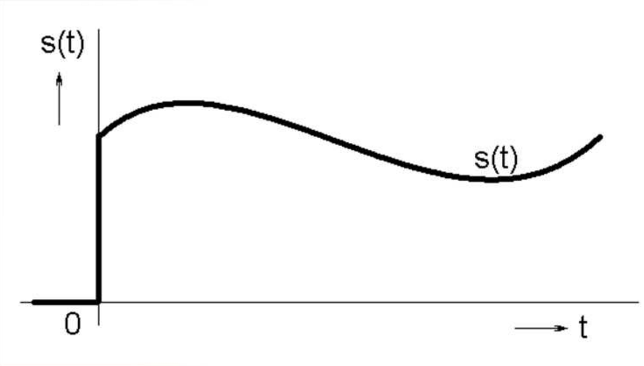
Zprostředkovaně:
jako kauzální funkce označujeme takové funkce, pro které platí $x(t) = 0$ pro $t < 0$.

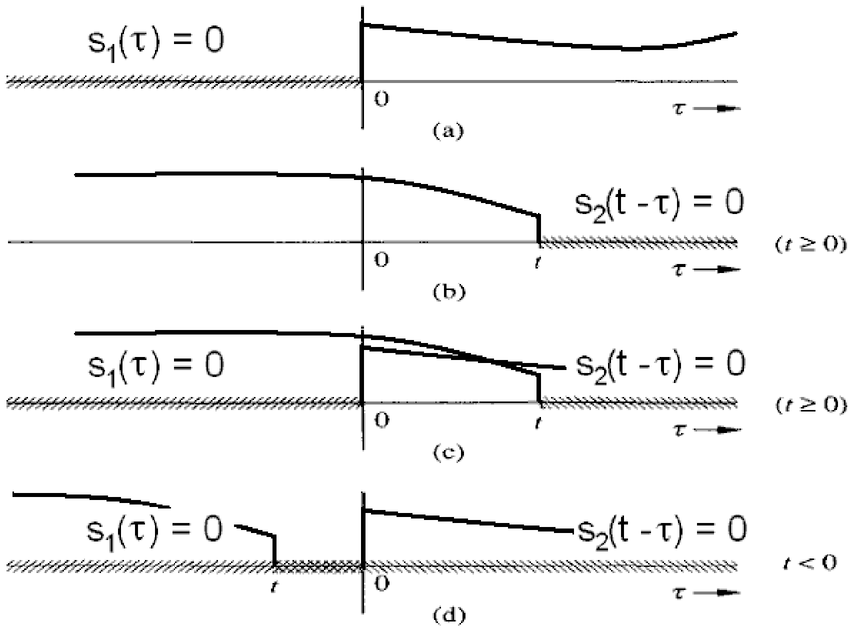


KAUZALITA + KONVOLUCE

Konvoluce kauzálních funkcí:

Pro kauzální funkce platí s(t) = 0 pro t < 0





$$s_1(t) * s_2(t) = \int_0^t s_1(\tau).s_2(t-\tau).d\tau$$

KORELACE

DEFINICE

ABZ slovník cizích slov

Korelace = vzájemný vztah, souvztažnost mezi znaky, veličinami, ději

DEFINICE

Korelace (z lat.) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

DEFINICE

Korelace (z lat.) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

lātiō - nesení, poskytování

relātiō – nesení zpět, odnášení, opakování; zpráva; vztah, poměr

correlātiō – vzájemný vztah, souvislost

DEFINICE

Korelace (z lat.) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

Pokud se jedna z nich mění, mění se **korelativně** i druhá a naopak.

Pokud se mezi dvěma procesy ukáže korelace, je pravděpodobné, že na sobě závisejí, nelze z toho však ještě usoudit, že by jeden z nich musel být příčinou a druhý následkem. To samotná korelace nedovoluje rozhodnout.

DEFINICE

Korelace (z lat.) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

Pokud se jedna z nich mění, mění se **korelativně** i druhá a naopak.

Kauzalita - příčinná souvislost či závislost. Jeden jev vyvolává druhý, popřípadě se oba vzájemně podporují (synergie)

DEFINICE

Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný **lineární** vztah mezi znaky či veličinami ***x*** a ***y***.

DEFINICE

Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný **lineární** vztah mezi znaky či veličinami **x** a **y**.

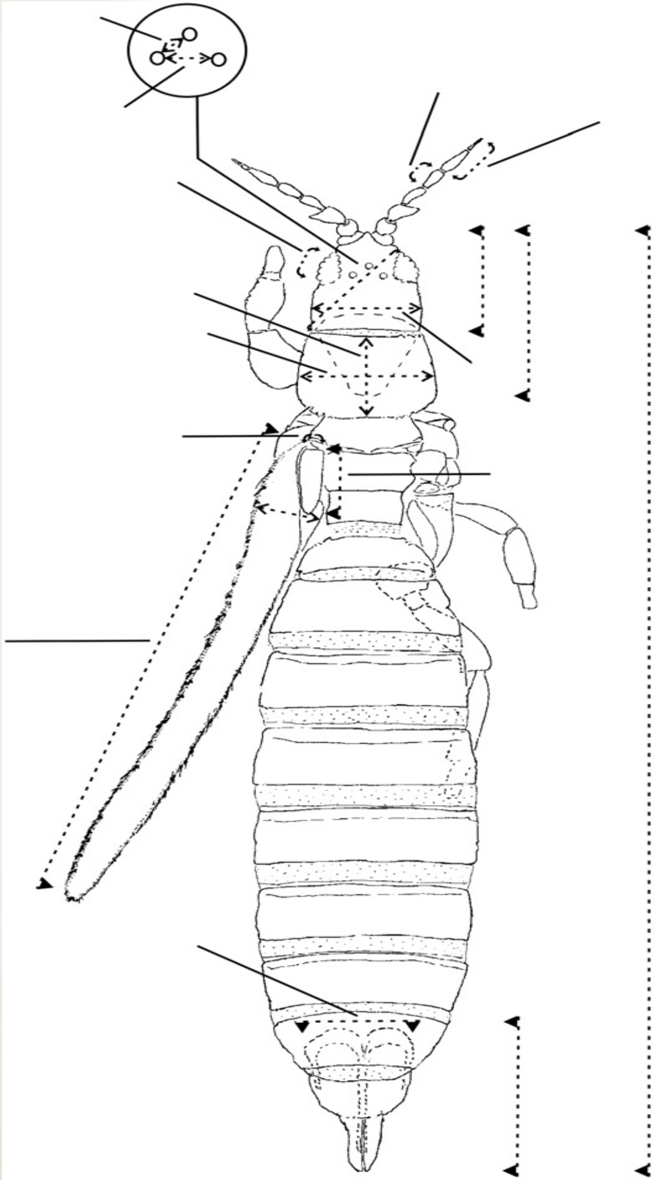
JAKÁ MÁME DATA?

JAKÁ MÁME DATA?

JAKÁ MÁME DATA?

JAKÁ MÁME DATA?

JAKÁ MÁME DATA?



1. šířka hlavy
2. délka hlavy (dorsální strana)
3. délka hlavy(ventrální strana)
4. délka klavu
5. šířka klavu
6. délka předního křídla
7. basální šířka předního křídla
8. celková délka těla (vyjma tykadel a penisu)
9. šířka pronota
10. délka pronota
11. šířka oka
12. délka kladélka
13. šířka kladélka
14. délka tykadlového článku V
15. délka tykadlového článku VI
16. vzdálenost mezi zadním párem ocelli
17. vzdálenost mezi přední a zadní ocellou

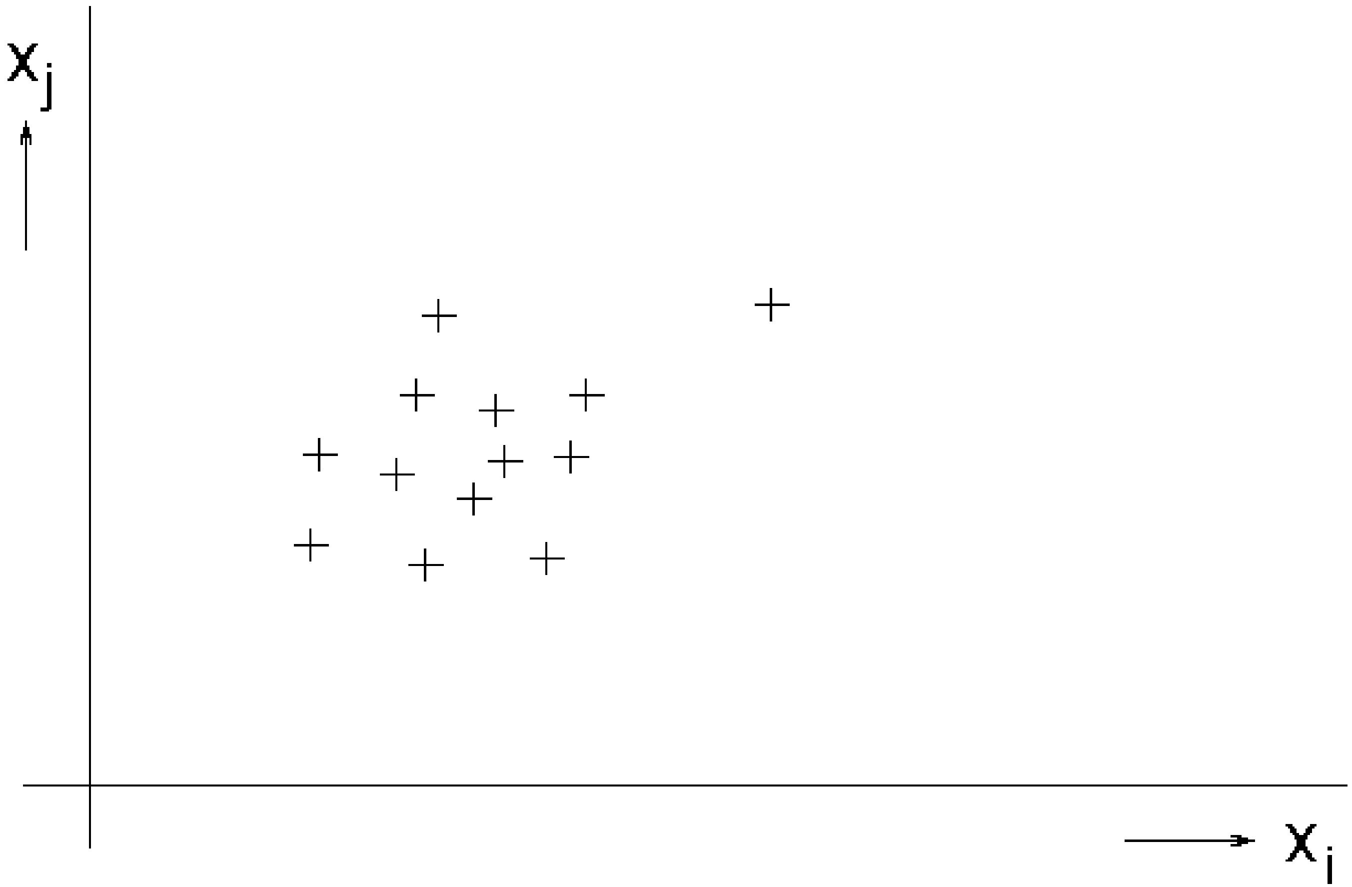
JAKÁ MÁME DATA?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	126,33	120,50	223,50	128,27	44,70	927,20	122,44	1702,40	255,87	196,83	61,02	255,87	127,94	28,18	60,25	29,15	14,58
2	136,43	130,75	221,70	142,12	47,37	933,66	113,69	1630,20	268,67	218,77	84,44	230,29	115,14	28,42	64,43	31,27	18,95
3	123,80	118,09	219,03	125,71	43,81	908,66	119,99	1668,35	250,76	192,89	59,49	250,76	125,38	27,62	59,04	28,57	14,28
4	138,96	132,55	245,85	141,10	49,17	1019,92	134,68	1872,64	281,46	216,51	67,12	281,46	140,73	31,00	66,27	32,07	16,03
5	128,85	117,48	217,91	125,06	43,58	941,11	119,38	1659,84	249,48	191,90	59,80	249,48	124,74	27,48	58,74	28,42	14,21
6	137,13	131,42	222,84	142,85	47,62	938,45	114,28	1638,56	270,04	219,89	84,87	231,47	115,73	28,57	64,76	31,43	19,05
7	127,59	121,70	225,74	129,55	45,15	936,47	123,66	1719,42	258,43	198,79	61,63	258,43	129,22	28,46	60,85	29,44	14,72
8	142,59	135,44	229,66	147,22	49,07	967,18	117,78	1688,72	278,31	226,62	87,47	238,55	119,28	29,44	66,74	32,39	19,63
9	128,22	122,30	226,86	130,20	45,37	904,02	124,28	1727,94	259,71	199,78	61,93	259,71	129,86	28,60	61,15	29,59	14,79
10	139,93	132,76	227,39	145,76	48,59	957,60	116,61	1672,00	275,56	224,38	87,90	236,19	118,10	29,15	66,08	32,07	19,44
11	125,06	119,29	221,27	126,99	44,25	917,93	121,22	1685,38	253,31	194,86	60,41	253,31	126,66	27,90	59,65	28,86	14,43
12	138,53	134,10	225,12	144,30	48,10	948,02	115,44	1655,28	272,80	222,14	85,74	233,83	116,91	28,86	65,42	31,75	19,24
13	128,73	122,79	227,75	130,71	45,55	944,82	124,77	1734,75	260,73	200,56	62,18	260,73	130,37	28,72	61,39	29,71	14,85
14	141,33	136,65	231,71	148,53	49,51	975,79	118,83	1703,77	280,79	228,64	88,25	240,68	120,34	29,71	67,33	32,68	19,80
15	142,03	136,11	230,80	147,95	49,32	971,96	118,36	1697,08	279,69	227,75	86,60	239,73	119,87	29,59	67,07	32,55	19,73
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓

JAKÁ MÁME DATA?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	126,33	120,50	223,50	128,27	44,70	927,20	122,44	1702,40	255,87	196,83	61,02	255,87	127,94	28,18	60,25	29,15	14,58
2	136,43	130,75	221,70	142,12	47,37	933,66	113,69	1630,20	268,67	218,77	84,44	230,29	115,14	28,42	64,43	31,27	18,95
3	123,80	118,09	219,03	125,71	43,81	908,66	119,99	1668,35	250,76	192,89	59,49	250,76	125,38	27,62	59,04	28,57	14,28
4	138,96	132,55	245,85	141,10	49,17	1019,92	134,68	1872,64	281,46	216,51	67,12	281,46	140,73	31,00	66,27	32,07	16,03
5	128,85	117,48	217,91	125,06	43,58	941,11	119,38	1659,84	249,48	191,90	59,80	249,48	124,74	27,48	58,74	28,42	14,21
6	137,13	131,42	222,84	142,85	47,62	938,45	114,28	1638,56	270,04	219,89	84,87	231,47	115,73	28,57	64,76	31,43	19,05
7	127,59	121,70	225,74	129,55	45,15	936,47	123,66	1719,42	258,43	198,79	61,63	258,43	129,22	28,46	60,85	29,44	14,72
8	142,59	135,44	229,66	147,22	49,07	967,18	117,78	1688,72	278,31	226,62	87,47	238,55	119,28	29,44	66,74	32,39	19,63
9	128,22	122,30	226,86	130,20	45,37	904,02	124,28	1727,94	259,71	199,78	61,93	259,71	129,86	28,60	61,15	29,59	14,79
10	139,93	132,76	227,39	145,76	48,59	957,60	116,61	1672,00	275,56	224,38	87,90	236,19	118,10	29,15	66,08	32,07	19,44
11	125,06	119,29	221,27	126,99	44,25	917,93	121,22	1685,38	253,31	194,86	60,41	253,31	126,66	27,90	59,65	28,86	14,43
12	138,53	134,10	225,12	144,30	48,10	948,02	115,44	1655,28	272,80	222,14	85,74	233,83	116,91	28,86	65,42	31,75	19,24
13	128,73	122,79	227,75	130,71	45,55	944,82	124,77	1734,75	260,73	200,56	62,18	260,73	130,37	28,72	61,39	29,71	14,85
14	141,33	136,65	231,71	148,53	49,51	975,79	118,83	1703,77	280,79	228,64	88,25	240,68	120,34	29,71	67,33	32,68	19,80
15	142,03	136,11	230,80	147,95	49,32	971,96	118,36	1697,08	279,69	227,75	86,60	239,73	119,87	29,59	67,07	32,55	19,73
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓

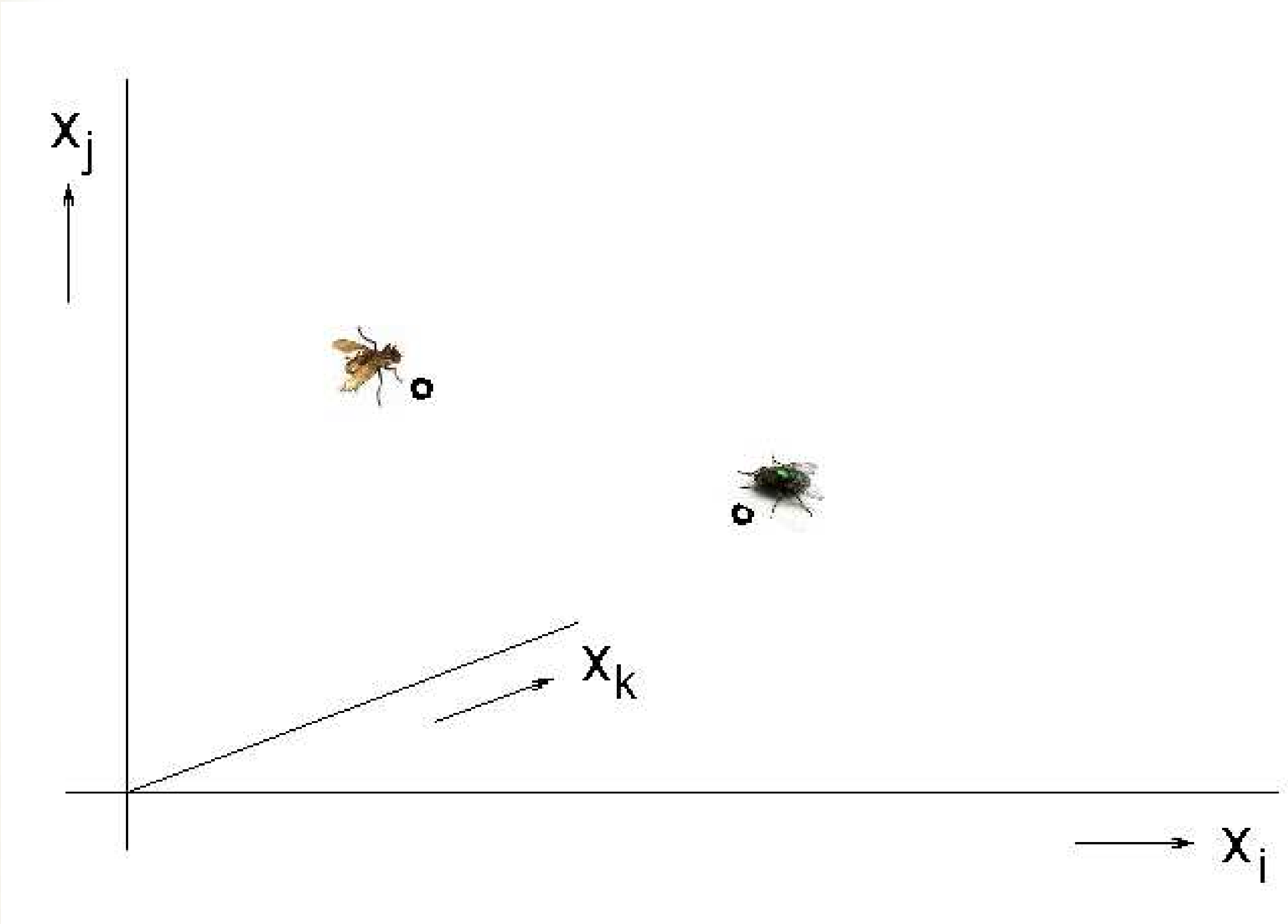
JAKÁ MÁME DATA?



JAKÁ MÁME DATA?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	126,33	120,50	223,50	128,27	44,70	927,20	122,44	1702,40	255,87	196,83	61,02	255,87	127,94	28,18	60,25	29,15	14,58
2	136,43	130,75	221,70	142,12	47,37	933,66	113,69	1630,20	268,67	218,77	84,44	230,29	115,14	28,42	64,43	31,27	18,95
3	123,80	118,09	219,03	125,71	43,81	908,66	119,99	1668,35	250,76	192,89	59,49	250,76	125,38	27,62	59,04	28,57	14,28
4	138,96	132,55	245,85	141,10	49,17	1019,92	134,68	1872,64	281,46	216,51	67,12	281,46	140,73	31,00	66,27	32,07	16,03
5	128,85	117,48	217,91	125,06	43,58	941,11	119,38	1659,84	249,48	191,90	59,80	249,48	124,74	27,48	58,74	28,42	14,21
6	137,13	131,42	222,84	142,85	47,62	938,45	114,28	1638,56	270,04	219,89	84,87	231,47	115,73	28,57	64,76	31,43	19,05
7	127,59	121,70	225,74	129,55	45,15	936,47	123,66	1719,42	258,43	198,79	61,63	258,43	129,22	28,46	60,85	29,44	14,72
8	142,59	135,44	229,66	147,22	49,07	967,18	117,78	1688,72	278,31	226,62	87,47	238,55	119,28	29,44	66,74	32,39	19,63
9	128,22	122,30	226,86	130,20	45,37	904,02	124,28	1727,94	259,71	199,78	61,93	259,71	129,86	28,60	61,15	29,59	14,79
10	139,93	132,76	227,39	145,76	48,59	957,60	116,61	1672,00	275,56	224,38	87,90	236,19	118,10	29,15	66,08	32,07	19,44
11	125,06	119,29	221,27	126,99	44,25	917,93	121,22	1685,38	253,31	194,86	60,41	253,31	126,66	27,90	59,65	28,86	14,43
12	138,53	134,10	225,12	144,30	48,10	948,02	115,44	1655,28	272,80	222,14	85,74	233,83	116,91	28,86	65,42	31,75	19,24
13	128,73	122,79	227,75	130,71	45,55	944,82	124,77	1734,75	260,73	200,56	62,18	260,73	130,37	28,72	61,39	29,71	14,85
14	141,33	136,65	231,71	148,53	49,51	975,79	118,83	1703,77	280,79	228,64	88,25	240,68	120,34	29,71	67,33	32,68	19,80
15	142,03	136,11	230,80	147,95	49,32	971,96	118,36	1697,08	279,69	227,75	86,60	239,73	119,87	29,59	67,07	32,55	19,73
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓

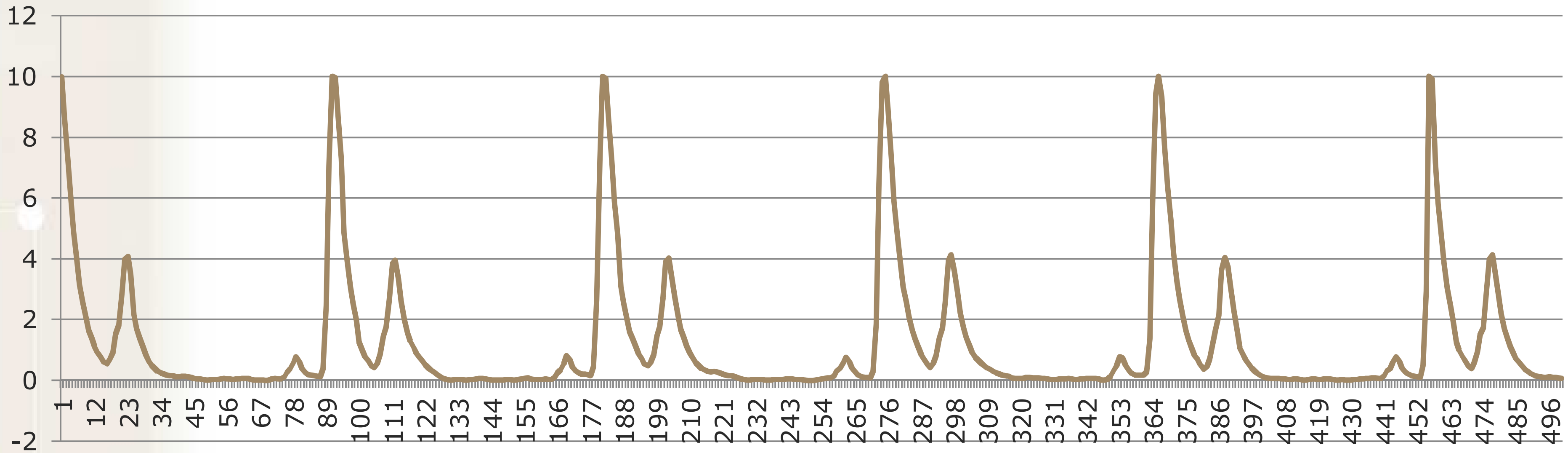
JAKÁ MÁME DATA?



JAKÁ MÁME DATA?

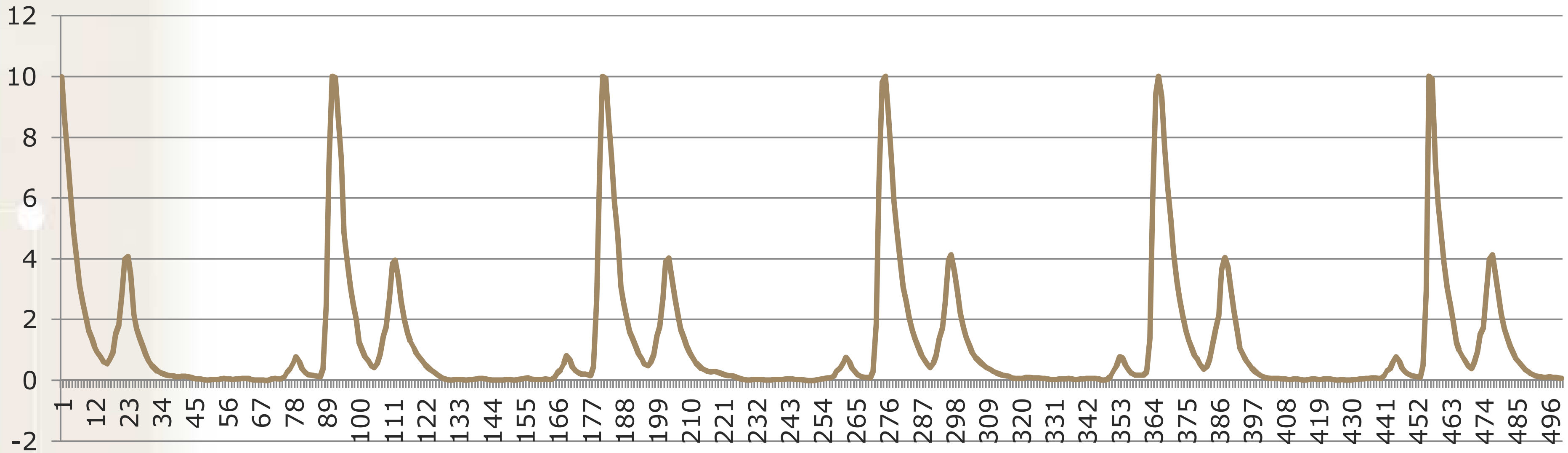
- ☑ data jsou statická, nezávisí na čase, ani na žádné jiné veličině - nezávisejí na pořadí, nejsou uspořádaná, …;

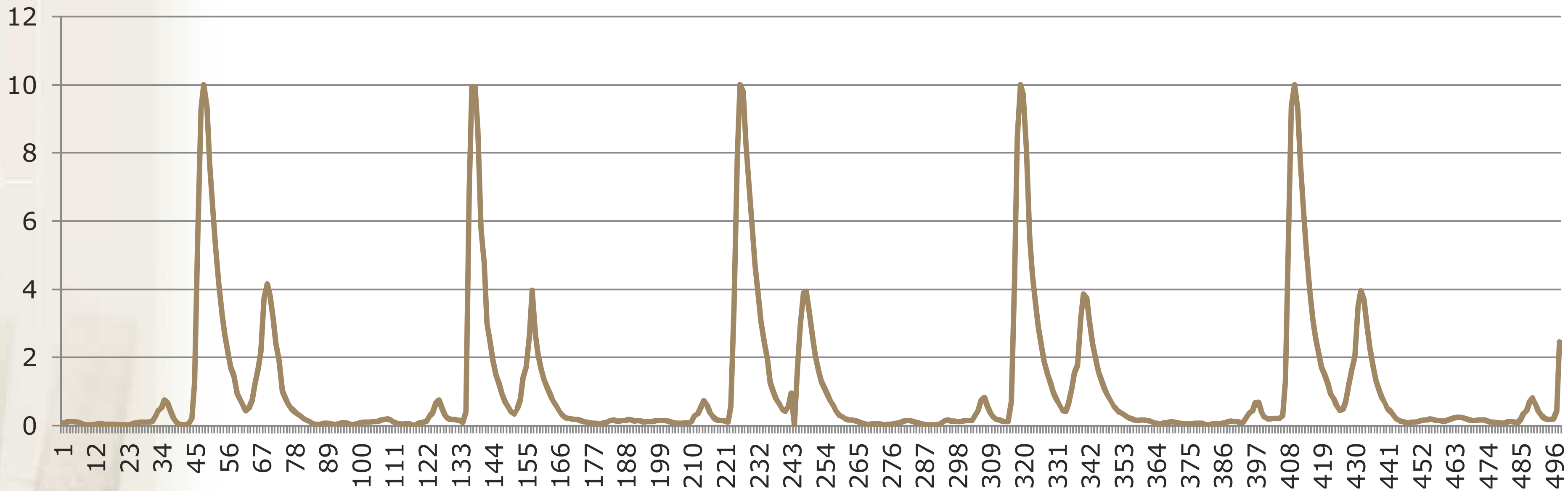
JAKÁ MÁME DATA?



9.99512 8.68195 7.35687 5.98145 4.88892 3.96118 3.14331 2.57416 2.0697 1.64459 1.37085 1.10779 0.895691 0.767517 0.596313 0.546875 0.689392 0.912476 1.52466 1.81915 2.88361 3.99567 4.08142 3.48328 2.7713 2.16492 1.68976 1.37268 1.0968 0.837708 0.635376 0.487366 0.379028 0.286255 0.238647 0.209656 0.171204 0.157166 0.145264 0.122375 0.121155 0.1297 0.128479 0.116577 0.101624 0.0704956 0.0476074 0.0439453 0.0259399 0.00793457 0.0131226 0.0228882 0.0244141 0.0265503 0.0476074 0.055542 0.0488281 0.0442505 … …

JAKÁ MÁME DATA?





JAKÁ MÁME DATA?

- ☑ data jsou statická, nezávisí na čase, ani na žádné jiné veličině - nezávisejí na pořadí, nejsou uspořádaná, …;
- ☑ data jsou dynamická, časově závislá nebo závislá na nějaké jiné veličině, např. délkové míře, jsou uspořádaná, …;

DEFINICE

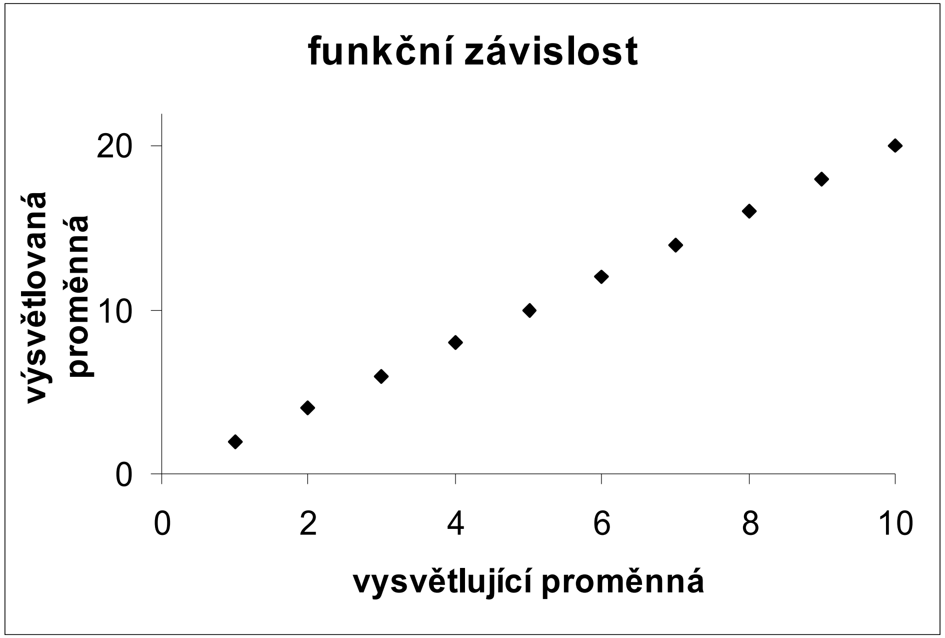
Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný **lineární** vztah mezi znaky či veličinami ***x*** a ***y***.

ZÁVISLOST

- funkční, deterministická

$$y = f(x)$$

(dané hodnotě x odpovídá jen určitá hodnota y)



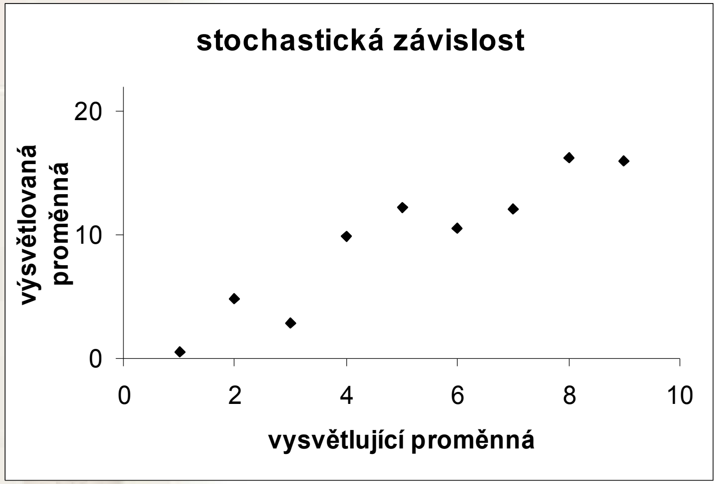
ZÁVISLOST

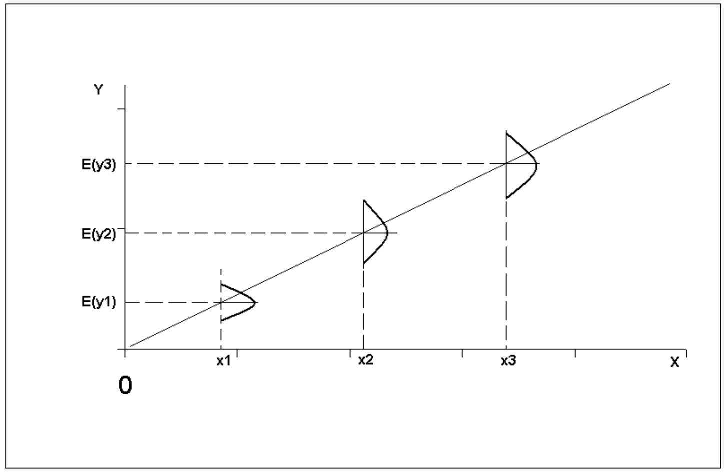
☑ stochastická, nedeterministická, volná

- ➔ závisle proměnná, případně i nezávisle proměnná jsou náhodné veličiny (?) – jsou úplně náhodné?
- ➔ určité hodnotě x přísluší možné hodnoty y vybrané z určitého rozdělení;
- ➔ střední hodnota rozdělení y je funkcí x

$$E(y)=f(x)$$

- ➔ střední hodnota náhodné veličiny y je funkcí střední hodnoty náhodné veličiny x $\quad E(y)=f[E(x)]$



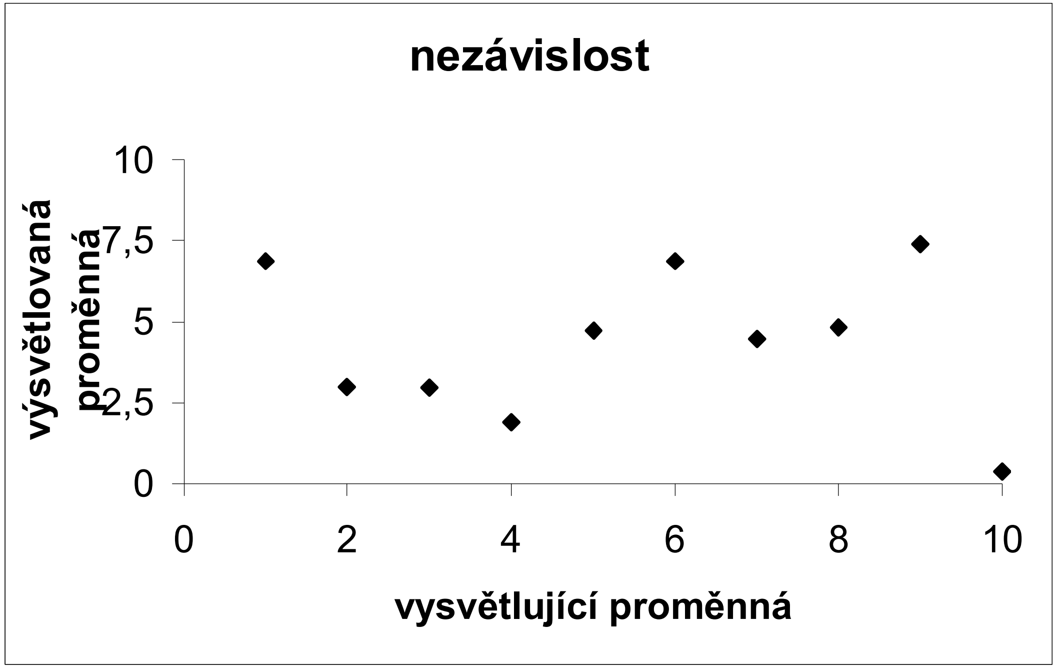


ZÁVISLOST

- nezávislost

střední hodnota y nezávisí na x $E(y) \neq f(x)$

(přísně funkční závislost (úplná) v reálném světě neexistuje)



DEFINICE

Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný **lineární** vztah mezi znaky či veličinami ***x*** a ***y***.

Tento vztah může být kladný, pokud (přibližně) platí $y = kx$, nebo záporný ($y = -kx$).

DEFINICE

Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný **lineární** vztah mezi znaky či veličinami ***x*** a ***y***.

Tento vztah může být kladný, pokud (přibližně) platí $y = kx$, nebo záporný ($y = -kx$).

Míru korelace v tom případě vyjadřujeme **korelačním koeficientem**.

DEFINICE

Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný **lineární** vztah mezi znaky či veličinami *X* a *Y*.

Tento vztah může být kladný, pokud (přibližně) platí $y = kx$, nebo záporný ($y = -kx$).

Míru korelace v tom případě vyjadřujeme **korelačním koeficientem**.

Hledáme, zda existuje či neexistuje **lineární** vztah mezi veličinami *X* a *Y*, reprezentované hodnotami x_i, y_i , příp. hledáme míru těsnosti tohoto vztahu

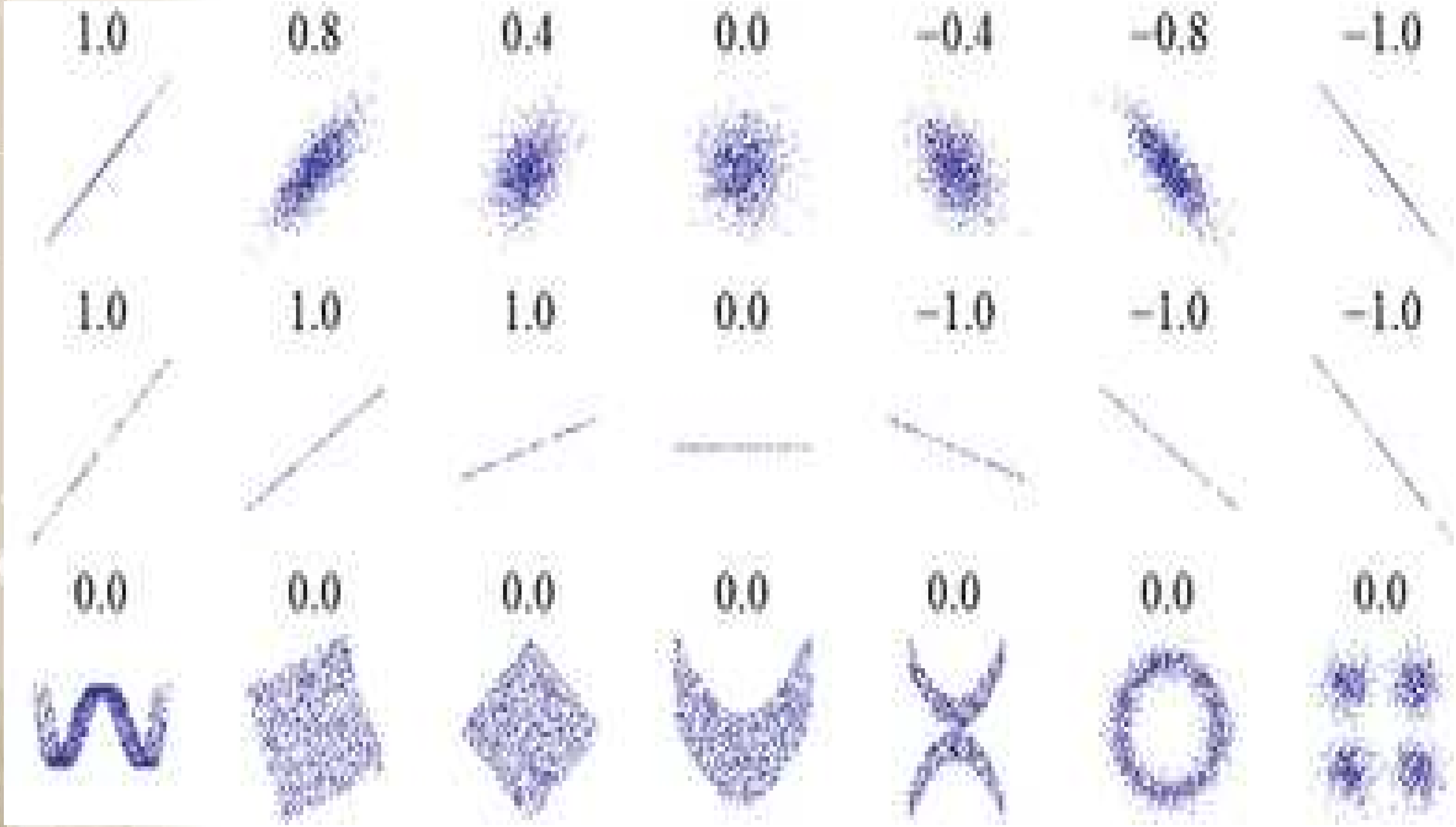
PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))}{\sigma_X \sigma_Y},$$

protože $\mu_X = E(X)$, $\sigma_X^2 = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E^2(X)$ a podobně i pro Y a protože $E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$, je také

$$\rho_{X,Y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - E^2(X)}\ \sqrt{E(Y^2) - E^2(Y)}}.$$

PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT



PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

- ☑ nabývá hodnot od −1 do +1, které značí perfektní lineární vztah (záporný nebo kladný)
  - ➔ v případě kladné korelace hodnoty obou proměnných zároveň stoupají;
  - ➔ v případě záporné korelace hodnota jedné proměnné stoupá a druhé klesá;
  - ➔ v případě neexistence lineárního vztahu $r = 0$;
- ☑ je nezávislý na jednotkách původních proměnných, je bezrozměrný;
- ☑ při změně pořadí proměnných se výše korelačního koeficientu nemění;
- ☑ korelační koeficient je platný pouze v rozmezí daném použitými daty;
- ☑ korelační koeficient výrazně odlišný od nuly není důkazem funkčního vztahu proměnných, jiného než lineárního;
- ☑ malá hodnota korelačního koeficientu není známkou nefunkčního vztahu proměnných.

PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

Správná interpretace Pearsonova korelačního koeficientu předpokládá, že obě proměnné jsou náhodné veličiny a mají společné dvourozměrné normální rozdělení.

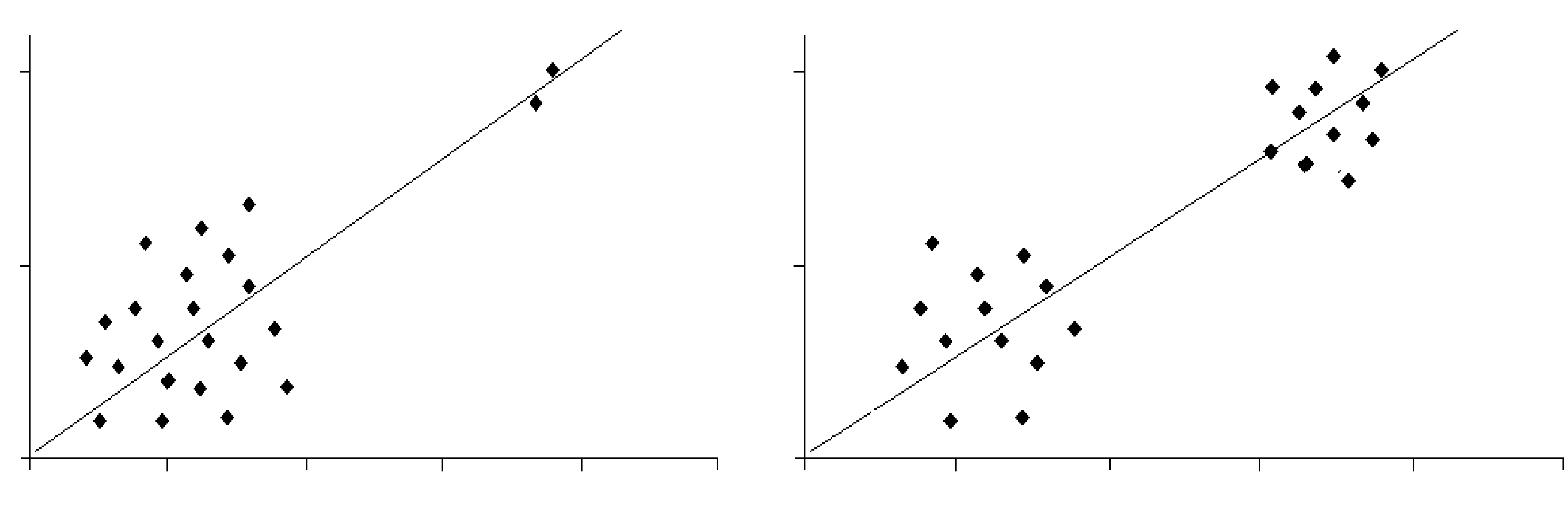
Potom nulový korelační koeficient znamená, že veličiny jsou nezávislé.

Pokud není splněn předpoklad dvourozměrné normality, z nulové hodnoty korelačního koeficientu nelze usuzovat na nic víc, než že veličiny jsou nekorelované.

PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

může být nadhodnocen:

- ☑ vlivem třetí skryté proměnné
- ☑ přítomností odlehlých hodnot
- ☑ data jsou složena z různých podskupin (tříd)



JINÉ KORELAČNÍ KOEFICIENTY

V případě ordinálních dat nebo odchylek od předpokladů rozložení dat (odlehlá pozorování, jiné než normální rozložení proměnných, nelinearita vztahu) je vhodnější použít neparametrický koeficient korelace

$$r = 1 - \frac{6\sum(Rx_i - Ry_i)^2}{n(n^2 - 1)}$$

Spearmanův koeficient korelace,

kde Rx_i a Ry_i jsou pořadí hodnot x_i a y_i.

Kromě Spearmanova korelačního koeficientu existují i další neparametrické korelační koeficienty jako např. Kendelovo τ.

KORELAČNÍ KOEFICIENT JAKO MÍRA PODOBNOSTI

Metrický prostor je neprázdná množina X spolu s funkcí ρ: X   X → R splňující:

- 1. totožnost: $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x,y \in X$;
- 2. symetrie: $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x,y \in X$;
- 3. trojúhelníková nerovnost:

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \forall x,y,z \in X.$$

ρ je nezáporná funkce.

(pozitivita, symetrie, Δ nerovnost)

Funkci ρ nazýváme metrika na X.

Vzdálenost je hodnota určená podle metriky.

KORELAČNÍ KOEFICIENT JAKO MÍRA PODOBNOSTI

Míry podobnosti

- 1. totožnost: $\sigma(x, y) = \max R \Leftrightarrow x = y, \forall x,y \in X$;
- 2. symetrie: $\sigma(x, y) = \sigma(y, x), \forall x,y \in X$;
- 3. Δ nerovnost

σ je nezáporná funkce.

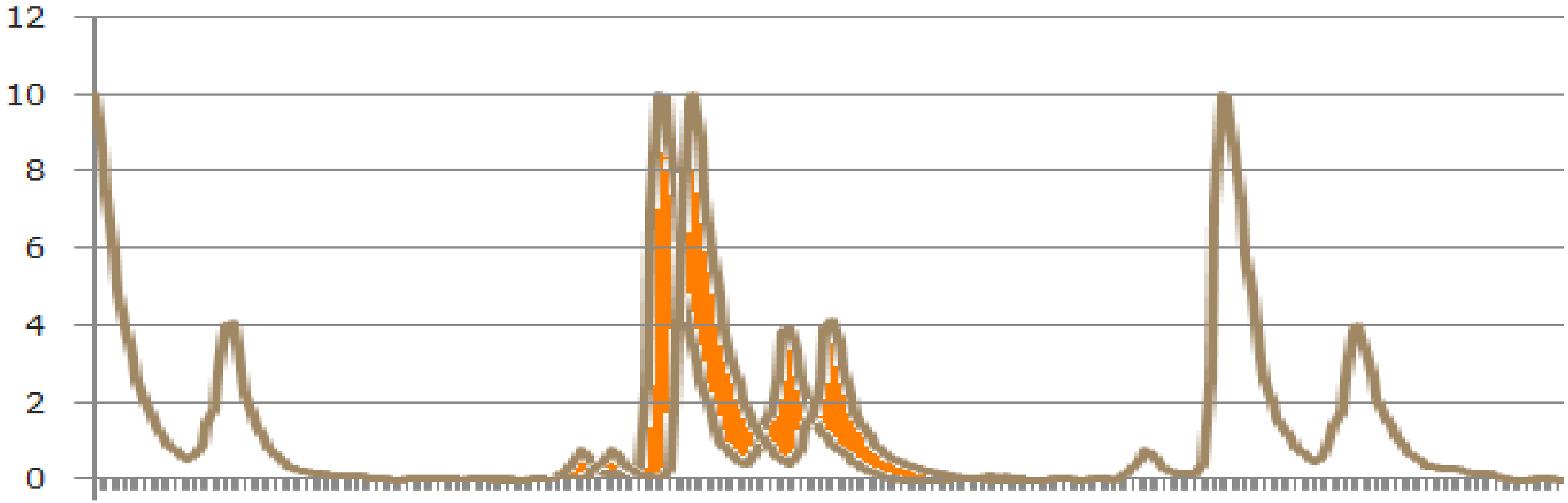
Funkci σ nazýváme mírou podobnosti na X.

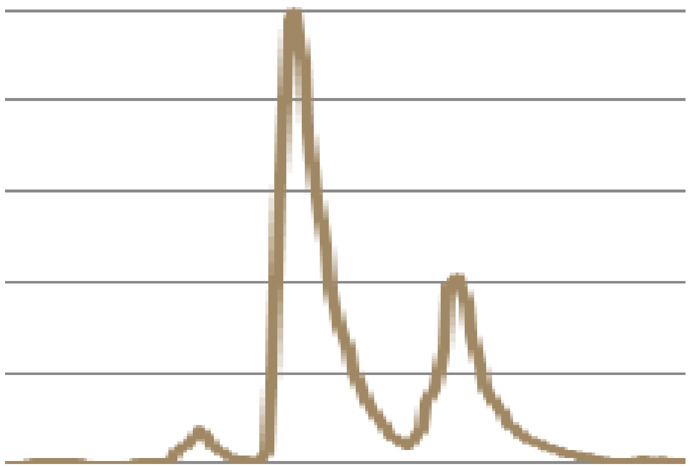
Podobnost je hodnota určená podle míry podobnosti.

INTERPRETACE VELIKOSTI KORELACE

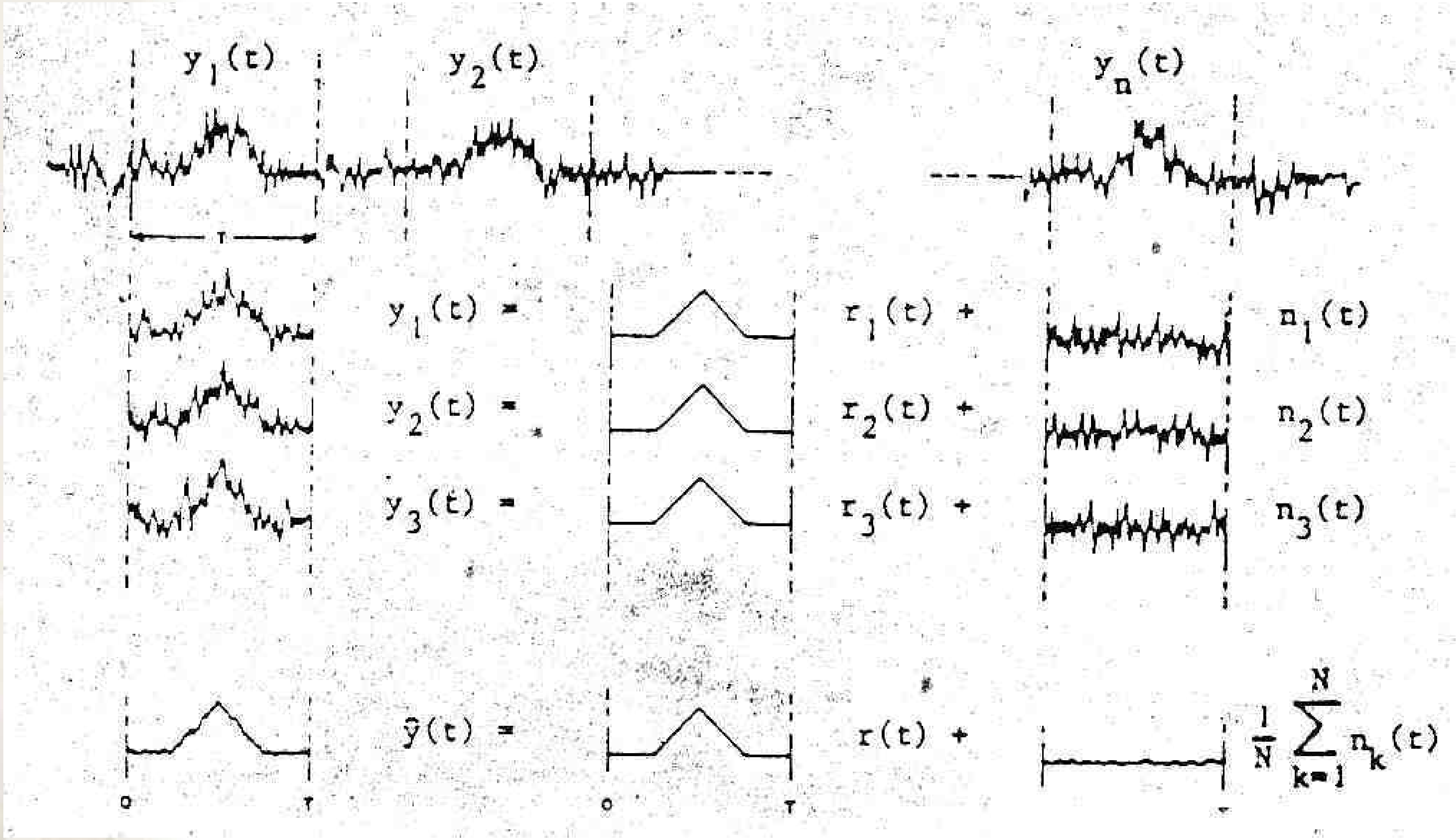
korelace	negativní	pozitivní
malá	−0.3 až −0.1	0.1 až 0.3
střední	−0.5 až−0.3	0.3 až 0.5
velká	−1.0 až−0.5	0.5 až 1.0

KORELACE PŘI ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLU EKG

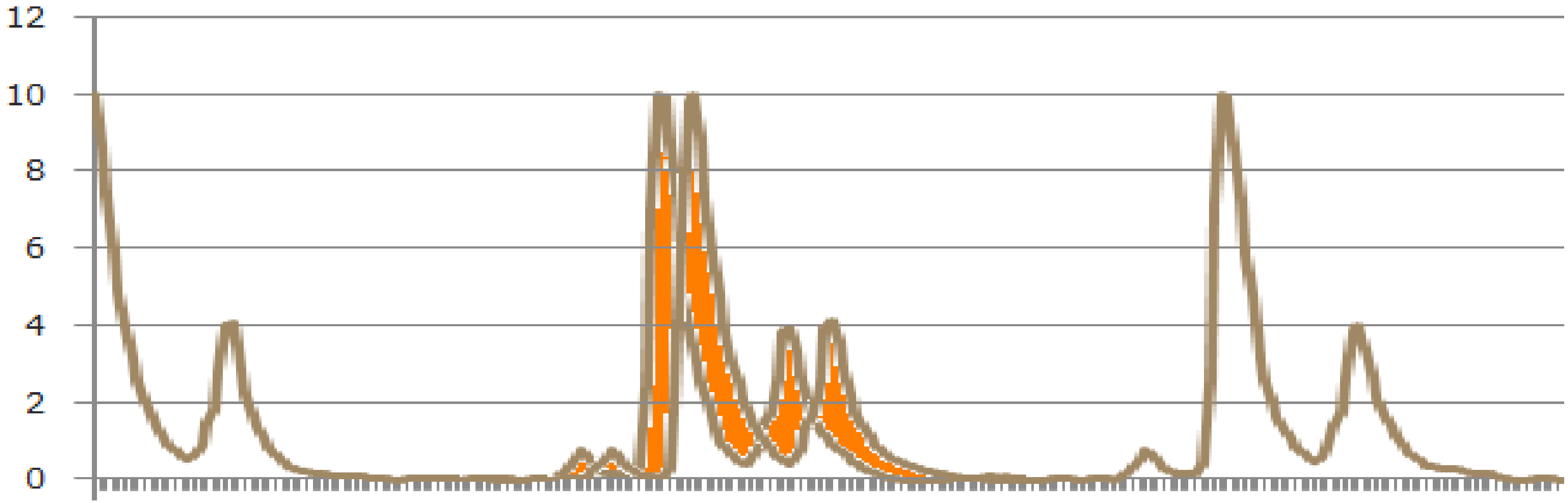


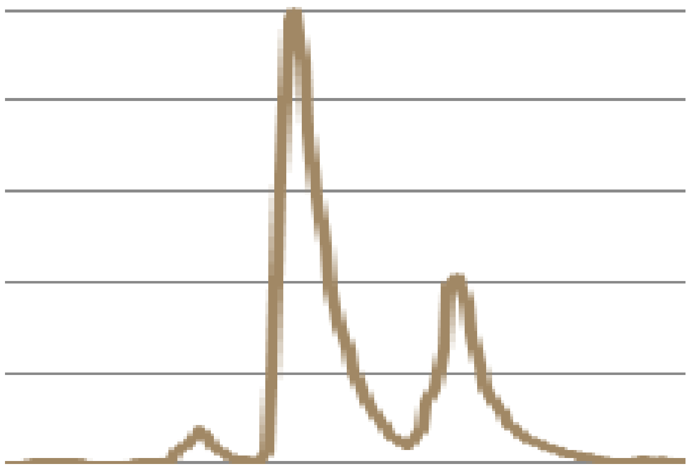


PRINCIP ZPRŮMĚROVÁNÍ



KORELACE PŘI ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLU EKG





KORELAČNÍ FUNKCE NÁHODNÝCH PROCESŮ

- ☑ **korelační funkce** $R(t_1,t_2)$ je mírou souvztažnosti mezi hodnotami náhodného procesu v okamžiku t_1 a hodnotami náhodného procesu v okamžiku t_2. Může být spočítána pomocí vztahu

$$R(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1.x_2 p(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$$

- ☑ **kovarianční funkce** (*covariance function*) $K(t_1,t_2)$ je mírou souvztažnosti mezi odchylkami náhodného procesu v okamžiku t_1 od $m(t_1)$ a odchylkami náhodného procesu v okamžiku t_2 od $m(t_2)$. Může být spočítána pomocí vztahu

$$K(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1-m(t_1)].[x_2-m(t_2)].p(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$$

KORELAČNÍ FUNKCE NÁHODNÝCH PROCESŮ

- ☑ tyto poměrně obecné vztahy se mohou zjednodušit, pokud se zjednoduší vlastnosti náhodných procesů

$\Downarrow$

stacionarita

ergodicita

KORELAČNÍ FUNKCE ERGODICKÉHO PROCESU

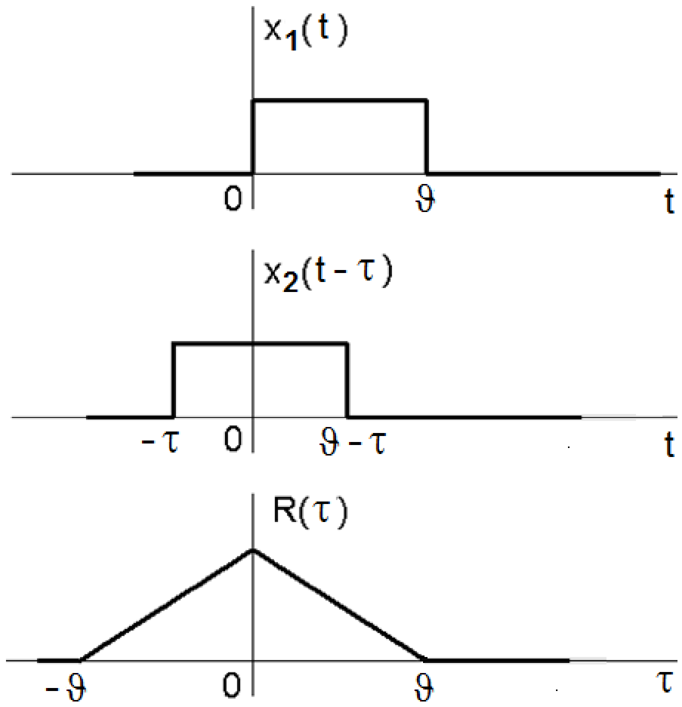
- křížová korelační funkce mezi dvěma vzájemně ergodickými procesy ξ(t) a η(t) s realizacemi x(t) a y(t) za čas T

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

AUTOKORELAČNÍ FUNKCE ERGODICKÉHO PROCESU

- autokorelační funkce ergodického procesu ξ(t) s realizací x(t) za čas T

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$



KORELAČNÍ FUNKCE DISKRÉTNÍHO ERGODICKÉHO PROCESU

$$R_{xy}(kT_{vz}) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x(nT_{vz})y(nT_{vz} + kT_{vz})$$

$$R_{xy}(0) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x(nT_{vz})y(nT_{vz} + 0)$$

☑ korelační funkce pro standardizovaná data

$$R_{xy}(0) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} \frac{[x(nT_{vz}) - m_x]}{\sigma_x} \cdot \frac{[y(nT_{vz}) - m_y]}{\sigma_y}$$

KORELAČNÍ FUNKCE PERIODICKÉ FUNKCE

- vzájemná či křížová korelační funkce (*cross-correlation function*) dvou periodických signálů (funkcí) o téže periodě T je definována

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_T s_1(t)s_2(t+\tau)dt$$

- popisuje podobnost průběhů obou signálů v závislosti na jejich posunutí
- je periodická s periodou T

KORELAČNÍ FUNKCE PERIODICKÉ FUNKCE

- Vypočtěte vzájemnou korelační funkci harmonických funkcí $s_1(t)=2\cos 2\pi t$ a $s_2(t)=\sin 2\pi t$.

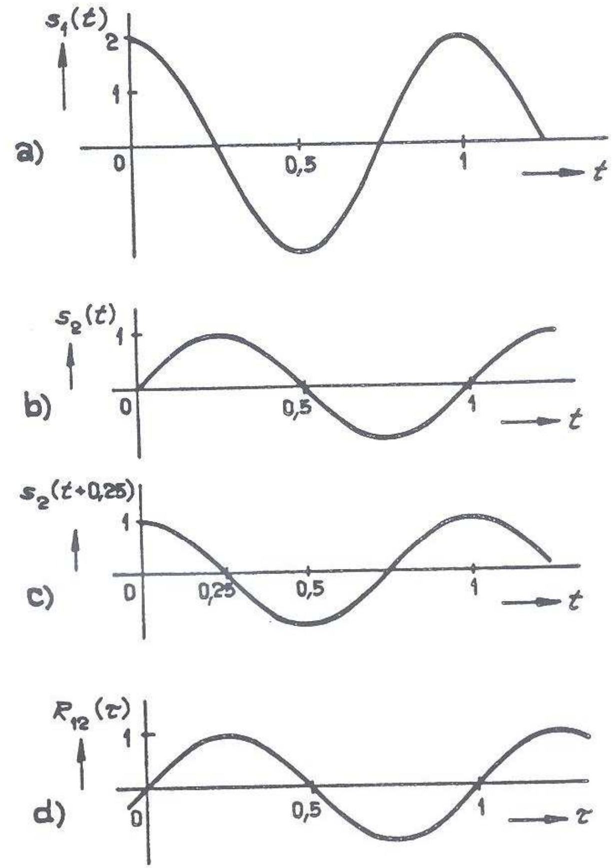
Obě funkce mají tutéž periodu T=1, takže

$$R_{12}(\tau)=\frac{1}{T}\int_T s_1(t)s_2(t+\tau)dt=$$

$$=\frac{1}{1}\int_0^1 2\cos(2\pi t).\sin(2\pi(t+\tau))dt=$$

$$=\int_0^1 [\sin(4\pi t+2\pi\tau)+\sin(2\pi\tau)]dt=$$

$$=0+\sin(2\pi\tau)$$



Obr. 1-34. Korelační funkce.
a) Signál $s_1(t)$,
b) signál $s_2(t)$,
c) signál $s_2(t+0{,}25)$,
d) korelační funkce $R_{12}(\tau)$.

AUTOKORELAČNÍ FUNKCE PERIODICKÉ FUNKCE

- autokorelační funkce periodického signálu

$$R(\tau) = \frac{1}{T}\int_T s(t)s(t+\tau)dt$$

- autokorelační funkce signálu s(t)=C.cos(ωt+φ)

$$R(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T C.\cos(\omega t + \varphi).C.\cos[\omega(t+\tau)+\varphi].dt =$$

$$= \frac{C^2}{2T}\int_0^T [\cos(2\omega t + 2\varphi + \omega\tau) + \cos(\omega\tau)].dt =$$

$$= C_{ef}^2 \cos \omega\tau$$

VLASTNOSTI AUTOKORELAČNÍ FUNKCE

autokorelační funkce je:

- ✓ sudá;
- ✓ $\forall \tau \in \mathbb{R}$: $R(0) \geq R(\tau)$;
- ✓ R(0) je rovno výkonu signálu;

V případě, že je signál periodický, je autokorelační funkce rovněž periodická se stejnou periodou.

BINÁRNÍ OPERACE POSLOUPNOSTI DISKRÉTNÍ V ČASE

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

- spojité funkce

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau).x_2(t-\tau).d\tau$$

- diskrétní posloupnosti

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m).x_2(n-m).$$

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(n-m).x_2(m).$$

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
SCHÉMA VÝPOČETNÍHO ALGORITMU

$x_1(m)$

x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}

$x_2(m)$

x_{20}	x_{21}	x_{22}

$x_1(m)$

		x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
	Σ	$\times$					
x_{22}	x_{21}	x_{20}	$\Rightarrow$				

$x_2(-m)$

$x_1(m)$

x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
$\times$	$\times$	$\times$			
x_{22}	x_{21}	x_{20}	$\Rightarrow$		

Σ

$x_2(2-m)$

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

- pro kauzální posloupnosti, tj. takové pro které platí $x(n) = 0$ pro $n < 0$ se konvoluční vztah mění na

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{n} x_1(m).x_2(n-m).$$

- V reálných podmínkách při zpracování reálných dat samozřejmě nejsou posloupnosti $x_1(n)$ a $x_2(n)$ nekonečné, nýbrž mají konečnou délku. Předpokládejme obecně N_1 vzorků v případě posloupnosti $x_1(n)$ a N_2 vzorků v případě posloupnosti $x_2(n)$. Dále položme $x_1(n) = 0$ pro $n \notin \langle 0, N_1\text{-}1 \rangle$ a analogicky $x_2(n) = 0$ pro $n \notin \langle 0, N_2\text{-}1 \rangle$.

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{\min(N_1-1, N_2-1)} x_1(m).x_2(n-m).$$

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
SCHÉMA VÝPOČETNÍHO ALGORITMU

$x_1(m)$	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
$x_2(m)$	x_{20}	x_{21}	x_{22}			

$x_1(m)$			x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
		Σ	$\times$					
$x_2(-m)$	x_{22}	x_{21}	x_{20}	⇨				

$x_1(m)$		x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
	Σ	$\times$	$\times$	$\times$			
$x_2(2-m)$		x_{22}	x_{21}	x_{20}	⇨		

DISKRÉTNÍ KRUHOVÁ KONVOLUCE
SCHÉMA VÝPOČETNÍHO ALGORITMU

$x_1(m)$	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
$x_2(m)$	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}

$$\begin{array}{ll|c|c|c|c|c|c|}
x_1(m) & & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\
& \Sigma & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
x_2(-m) & & x_{20} & x_{25} & x_{24} & x_{23} & x_{22} & x_{21}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll|c|c|c|c|c|c|}
x_1(m) & & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\
& \Sigma & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
x_2(2-m) & & x_{22} & x_{21} & x_{20} & x_{25} & x_{24} & x_{23}
\end{array}$$

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
PŘÍKLAD

Vypočtěte konvoluci posloupností $x_1 = \{x_{10}, x_{11}, \ldots x_{13}\}$ a $x_2 = \{x_{20}, x_{21}, x_{22}\}$.

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí následující výpočetní schéma:

$$\{x_{10}, x_{11}, \ldots x_{13}\} * \{x_{20}, x_{21}, x_{22}\} =$$

$$\begin{array}{llllll}
= (x_{10}.\, x_{20}) & (x_{10}.\, x_{21}) & (x_{10}.\, x_{22}) & & & \\
 & (x_{11}.\, x_{20}) & (x_{11}.\, x_{21}) & (x_{11}.\, x_{22}) & & \\
 & & (x_{12}.\, x_{20}) & (x_{12}.\, x_{21}) & (x_{12}.\, x_{22}) & \\
 & & & (x_{13}.\, x_{20}) & (x_{13}.\, x_{21}) & (x_{13}.\, x_{22}) \\
\hline
\end{array}$$

součet dílčích součinů v jednotlivých sloupcích

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
PŘÍKLAD

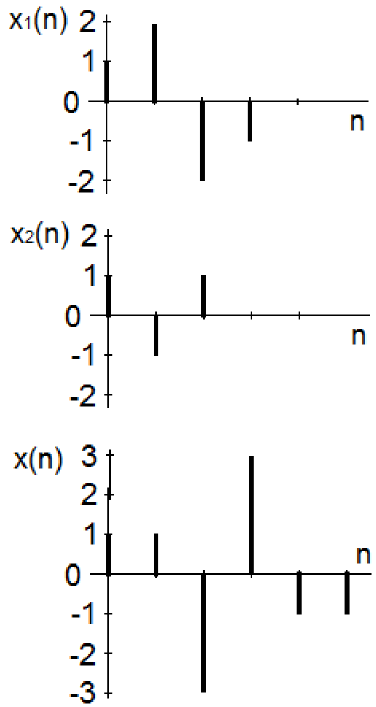
Vypočtěte konvoluci posloupností $x_1(n) = \{1, 2, -2, -1\}$ a $x_2(n) = \{1, -1, 1\}$.

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí následující výpočetní schéma:

$\{1, 2, -2, -1\} * \{1, -1, 1\} =$

=	1	-1	1			
		2	-2	2		
			-2	2	-2	
				-1	1	-1
	1	1	-3	3	-1	-1



DISKRÉTNÍ KORELACE

pro spojitý případ obecně platí

$$R_{x1,x2}(t_1,t_2)=E[x_1(t_1).x_2(t_2)]$$

za předpokladu stacionarity a ergodicity pro funkce s definičním oborem $t\in(-\infty,\infty)$

$$R_{x1,x2}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x_1(t).x_2(t+\tau)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_1(t).x_2(t+\tau)dt$$

a abychom se vyhnuli limitním komplikacím i v podstatě nulovým hodnotám takto určené korelační funkce využívá se pouze integrální části vztahu

$$R'_{x1,x2}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t+\tau)dt.$$

DISKRÉTNÍ KORELACE

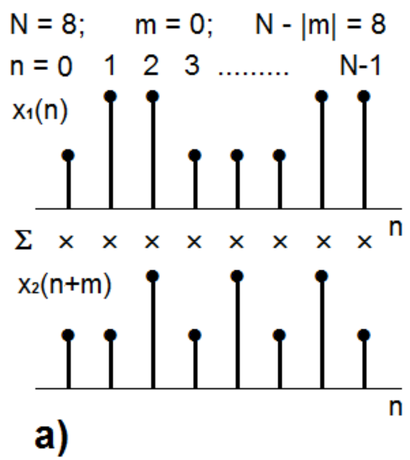
na konečném intervalu

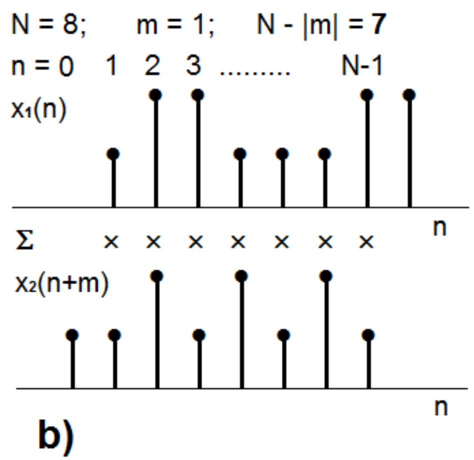
$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_T x_1(t)x_2(t+\tau)dt.$$

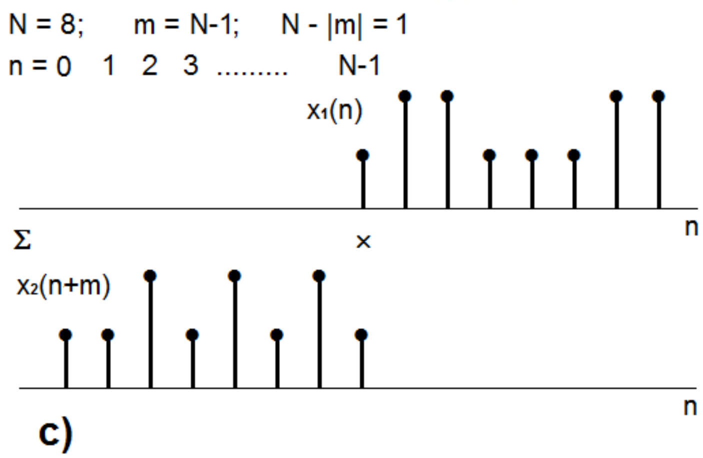
pro diskrétní posloupnost

$$R_{x1x2}(mT_{vz}) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(nT_{vz})x_2(nT_{vz} + mT_{vz}).$$

DISKRÉTNÍ KORELACE







$$ {}^{1}R_{x1x2}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0,1,\dots,N-1, $$

$$ {}^{2}R_{x1x2}(m) = \frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0,1,\dots,N-1. $$

DISKRÉTNÍ KORELACE

odhad s konstantní vahou

$$ {}^{1}\hat{R}_{x1x2}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0,1,\ldots,N-1, $$

každá hodnota korelační sumy se považuje za hodnotu autokorelační funkce se stejnou vahou, která se rovná převrácené hodnotě celkového počtu vzorků vstupních posloupností $x_1(n)$ a $x_2(n)$, N je délka posloupnosti. Střední hodnota tohoto odhadu je (bez důkazu)

$$ E\left[{}^{1}\hat{R}_{x1x2}\right] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-|m|} E\left[x_1(n)x_2(n+m)\right] = \frac{N-|m|}{N} R_{x1x2}(m), $$

kde $R_{x1x2}(m)$ je skutečná hodnota korelační funkce. To znamená, že střední hodnota odhadu se nerovná správné hodnotě, ale blíží se jí, když $N \to \infty$ a $|m| \ll N$. Platí tedy, že

$$ \lim_{N \to \infty} E\left({}^{1}\hat{R}_{x1x2}\right) = R_{x1x2}(m), $$

odhad je asymptoticky nevychýlený.

DISKRÉTNÍ KORELACE

odhad s konstantní vahou

$$ {}^{1}\hat{R}_{x1x2}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0,1,\ldots,N-1, $$

Odhad rozptylu pro posloupnosti reálných čísel je přibližně

$$ \operatorname{var}\left[{}^{1}\hat{R}_{x1x2}\right] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left|R_{x1x2}(n)\right|^2 + R_{x1x2}(n-m)R_{x1x2}(n+m)\right]. $$

Protože odhad rozptylu konverguje pro N $\rightarrow \infty$ k nule, je odhad korelační funkce konzistentním odhadem $R_{x1x2}(m)$. Z praktického hlediska to všechno znamená, že se snižujícím se počtem součinů v korelační sumě se relativně zvyšuje váha, kterou je hodnota součtu násobena a tedy i v případě periodických posloupností není průběh jejich korelační funkce periodický, nýbrž se její kmity tlumí.

DISKRÉTNÍ KORELACE

odhad s proměnnou vahou

$$ {}^{2}\hat{R}_{x1x2}(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n) x_2(n+m); \quad m = 0,1,\ldots,N-1. $$

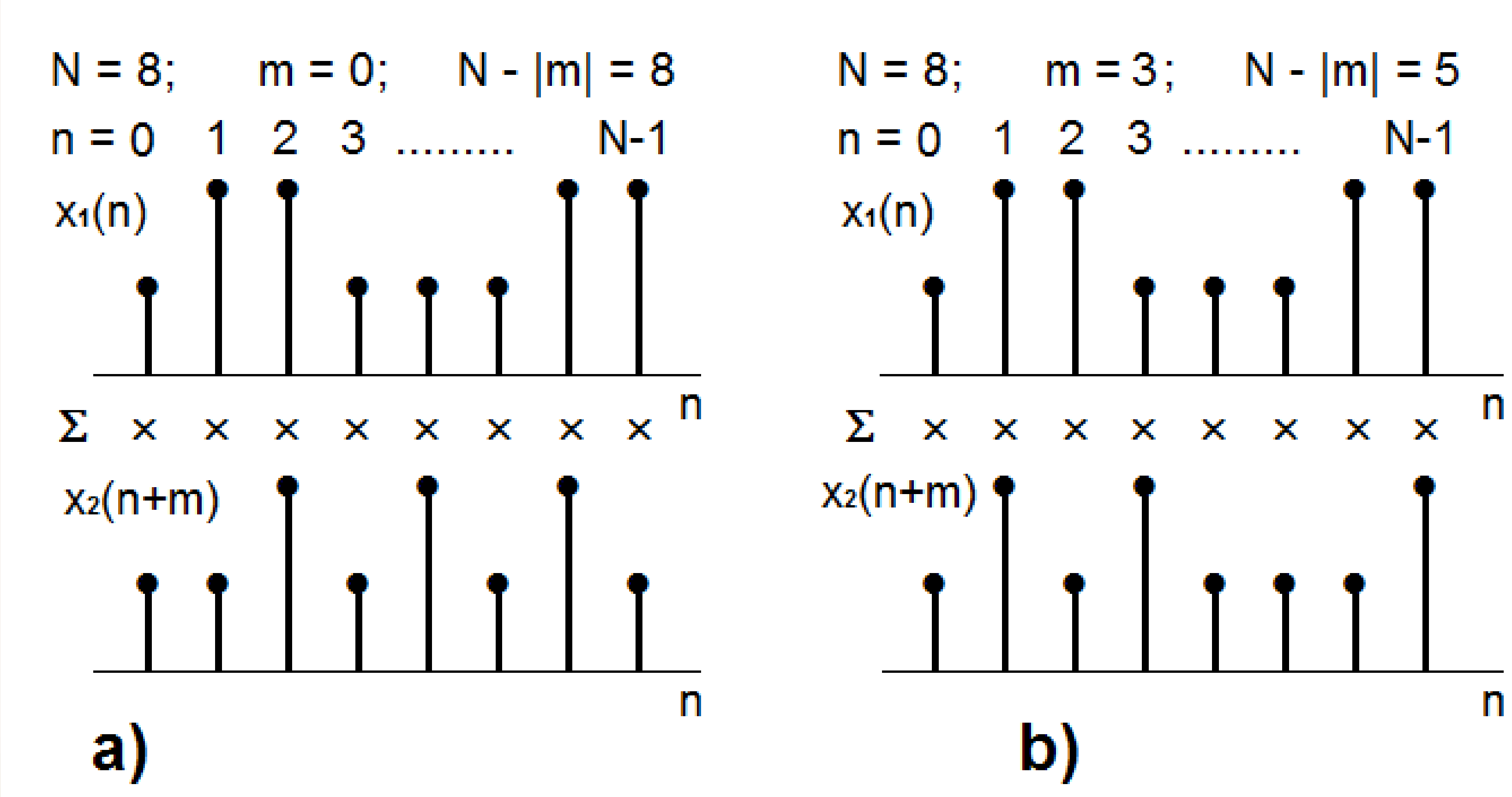
střední hodnota tohoto odhadu je

$$ E\left[{}^{2}\hat{R}_{x1x2}(m)\right] = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=1}^{N-|m|} E\left[x_1(n) x_2(n+m)\right] = R_{x1x2}(m), $$

což znamená, že je rovna, pro libovolné N a m, skutečné hodnotě korelační funkce. Rozptyl tohoto odhadu

$$ \mathrm{var}\left[{}^{2}\hat{R}_{x1x2}\right] \approx \frac{N}{(N-|m|)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[|R_{x1x2}(n)|^2 + R_{x1x2}(n-m) R_{x1x2}(n+m) \right] $$

KRUHOVÁ DISKRÉTNÍ KORELACE



DISKRÉTNÍ KORELACE
PŘÍKLAD ZE ŽIVOTA