SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz, UKB A29, dv.č.112

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VIII. FREKVENČNÍ TRANSFORMACE

ČASOVÉ ŘADY

MU

IBA

VZORKOVÁNÍ

DEFINICE

Vzorkování je postup výběru jednotlivých pozorování, na jehož základě získáváme informaci o vlastnostech sledované skutečnosti či jevu. Každé pozorování může obecně zahrnovat více vlastností (věk, diagnóza onemocnění, velikost napětí, …), které mohou být použity k identifikaci daného jevu či jeho části.

Vzorkováním rozumíme postup výběru určité podmnožiny (vzorku) dané množiny (veličiny, populace, dat, materiálu) tak, aby vlastnosti vybraného vzorku (dostatečně) přesně reprezentovaly vlastnosti celé množiny (signálu, populace, dat, materiálu).

Vzorkování je postup selekce jednotlivých pozorování s cílem získat určitou znalost o dané populaci, zejména pro účely statistické inference.

PŘÍKLADY

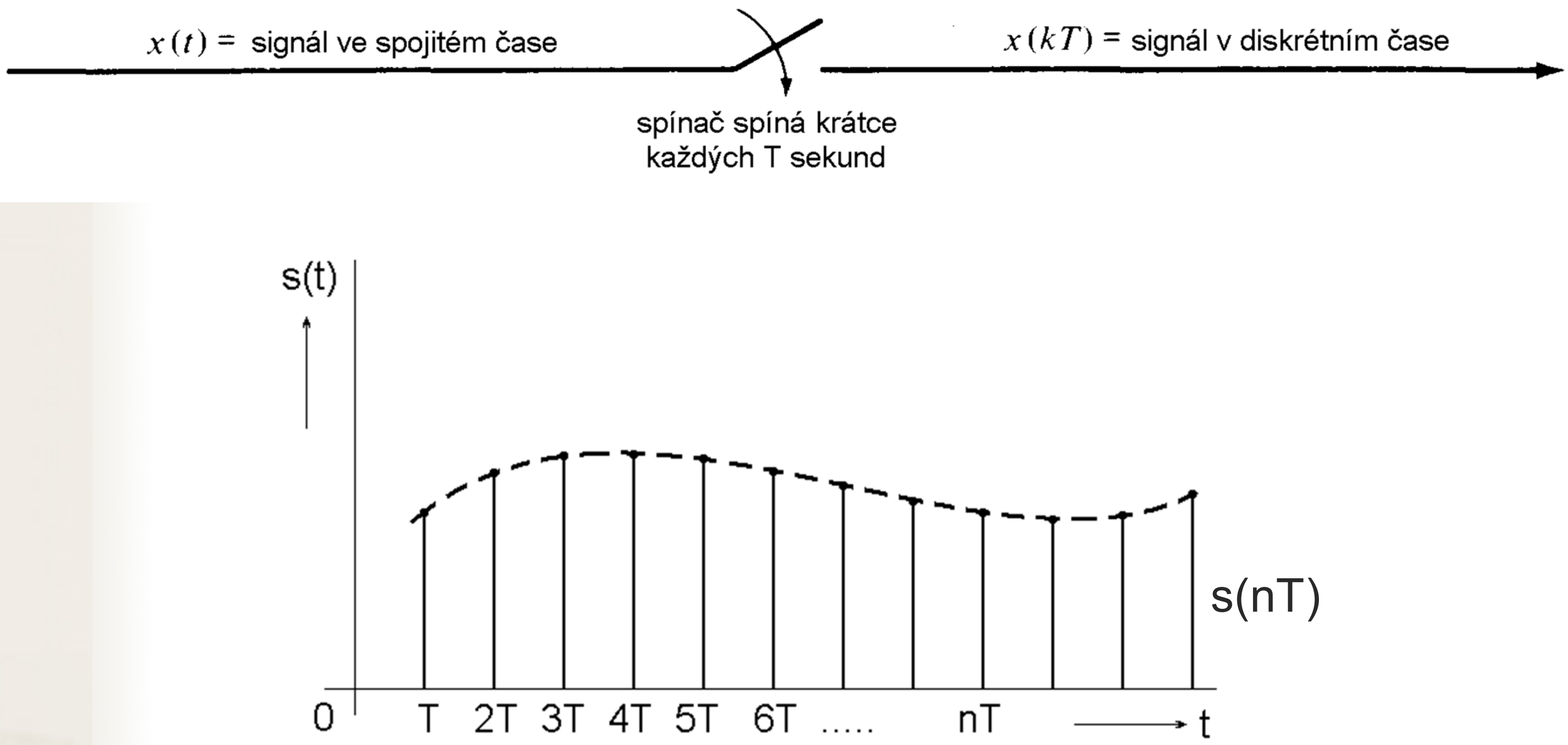
- ☑ volba frekvence a místa odběru pro hodnocení úrovně znečištění vodních toků;
- ☑ volba parametrů digitalizace obrazu pro jeho přenos či archivaci;
- ☑ volba tématu a množiny respondentů při průzkumu veřejného mínění;
- ☑ výběr výrobků při výstupní kontrole kvality výroby;
- ☑ výběr pacientů pro odhad vývoje daného onemocnění.

DEFINICE

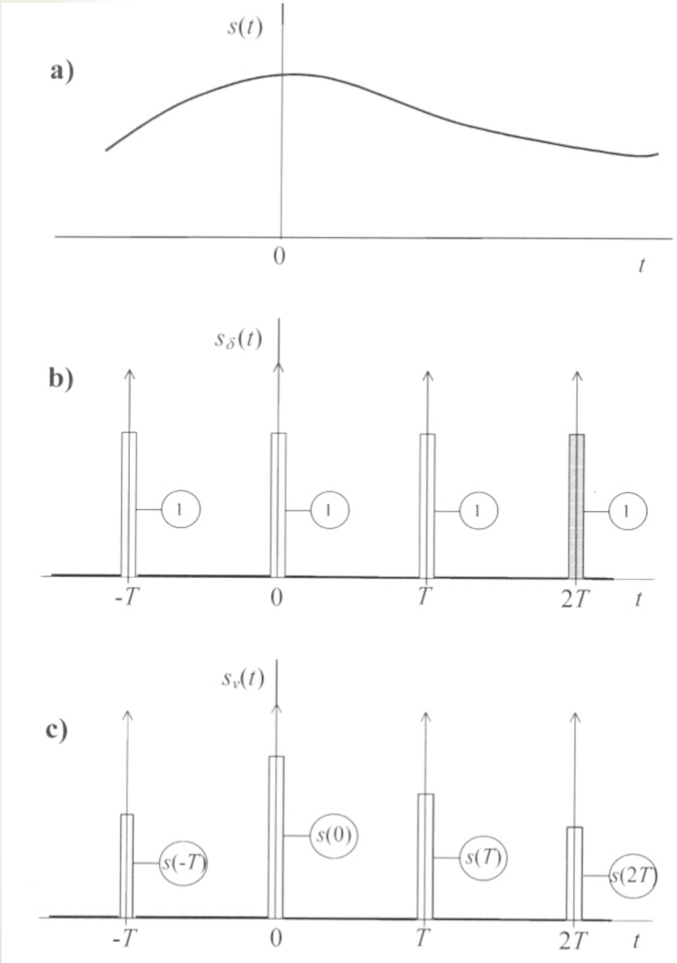
Vzorkováním dané veličiny (signálu) rozumíme činnost, při které z průběhu určité veličiny, která je definovaná na spojitém definičním oboru, vybíráme hodnoty pouze v určitých časových okamžicích, resp. pro určité hodnoty prostorových souřadnic.

Hodnoty časových či prostorových souřadnic mohou být rozmístěny v definičním prostoru obecně nerovnoměrně, z hlediska práce s daty je ale výhodnější, pokud jsou souřadnice vzorků rozmístěny rovnoměrně (a v tom případě lze i teoreticky dovodit pravidlo pro maximální vzdálenost mezi každými dvěma vzorky).

DISKRÉTNÍ SIGNÁL - VZORKOVÁNÍ



IDEÁLNÍ VZORKOVÁNÍ



Aby bylo možné zjednodušit analýzu vlivu vzorkování na vlastnosti vzorkované veličiny, je navzorkovaná verze původní spojité veličiny s(t) vyjadřována ve tvaru $s(t).s_\delta(t)$, kde $s_\delta(t)$ je periodický sled jednotkových impulsů definovaný jako

$$s_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

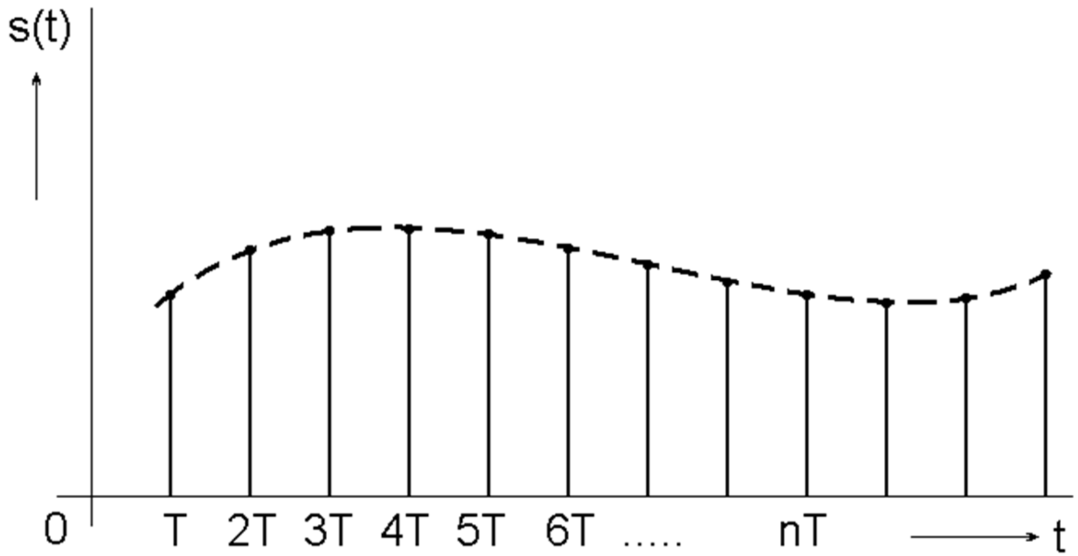
Z toho pro navzorkovanou veličinu platí

$$s_v(t) = s(t).s_\delta(t) = s(t).\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT).\delta(t - nT)$$

VZORKOVACÍ TEORÉM

$$s(t) \rightarrow s(T_1), s(T_2), s(T_3), \ldots, s(T_n), \ldots$$

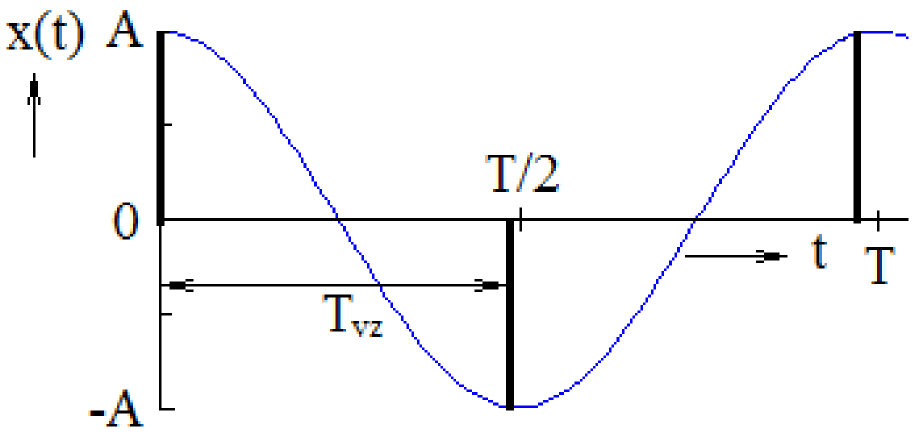
$$s(t) \rightarrow s(T), s(2T), s(3T), \ldots, s(nT), \ldots$$



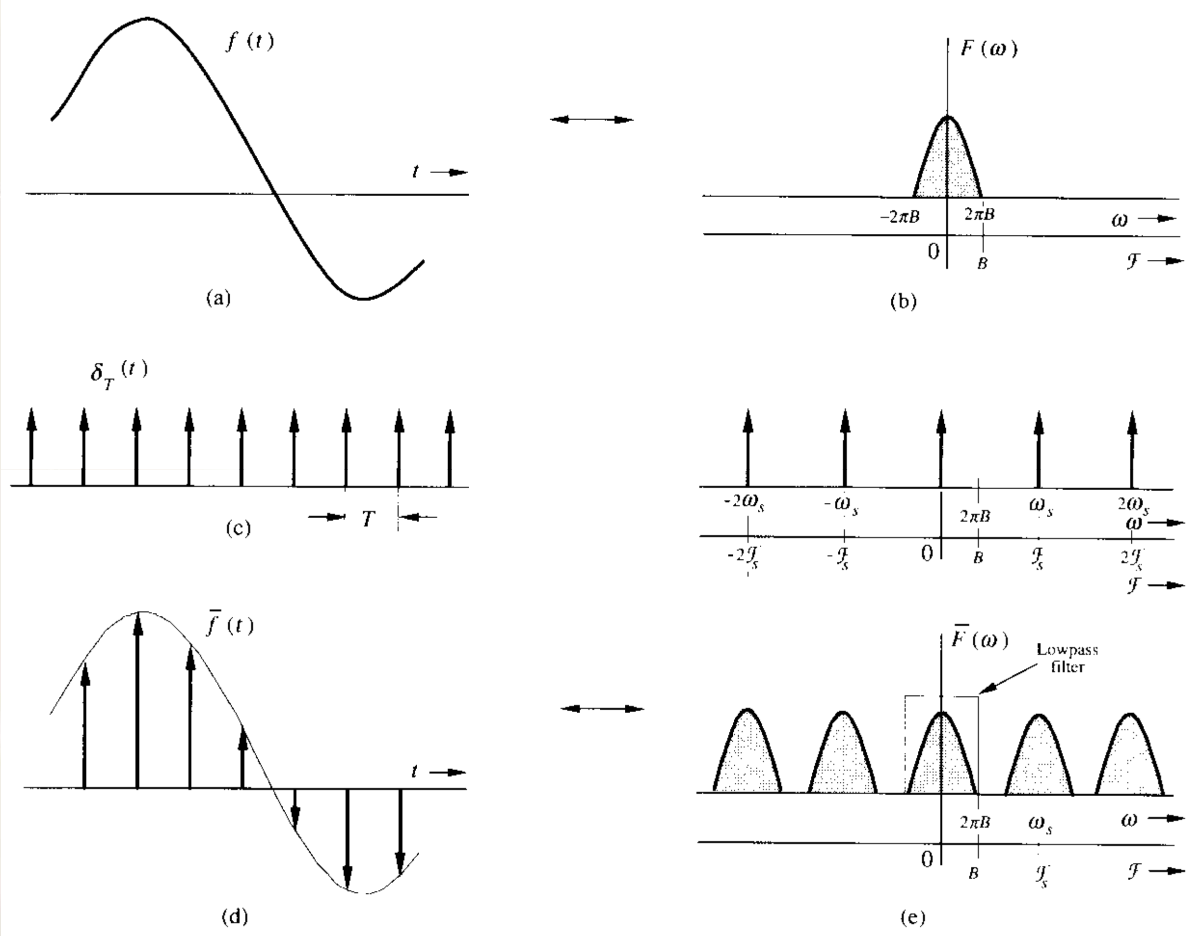
VZORKOVACÍ TEOREM

intuitivní (?) zdůvodnění minimální vzorkovací frekvence

Reálné vzorkování



VZORKOVACÍ TEORÉM



Vzorkovací frekvence:

$$f_s > 2B = f_N,$$

kde B je maximální kmitočet ve vzorkované veličině

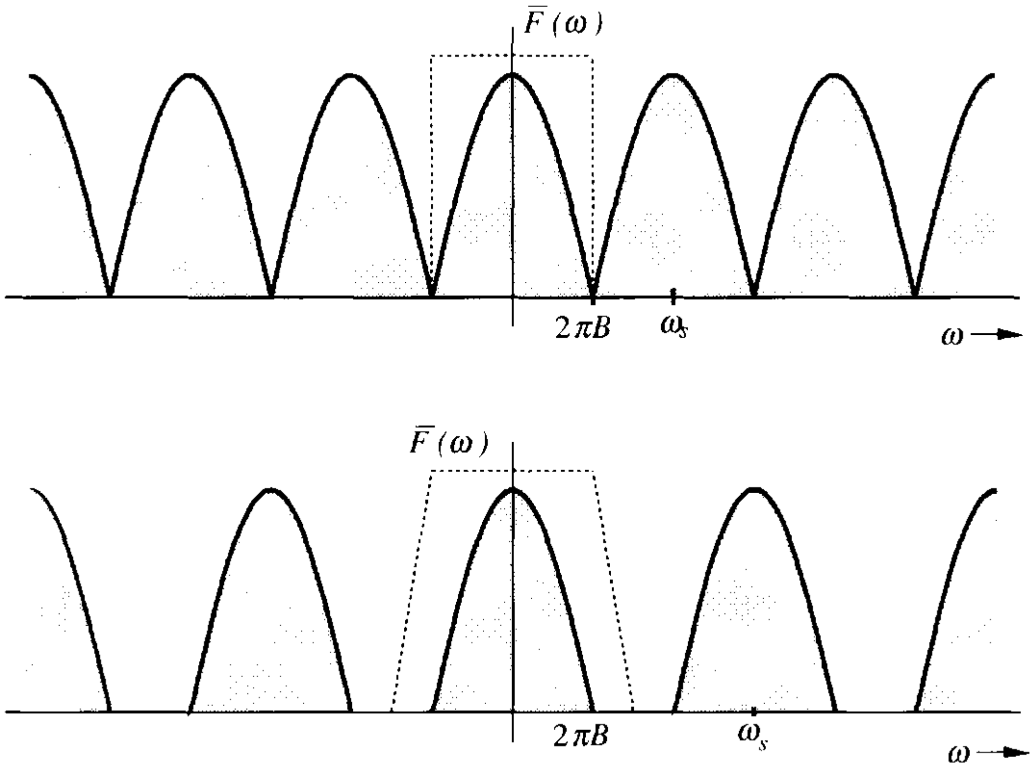
f_N –

Nyquistův, (Shannonův, Kotelnikovův) kmitočet

$T_N = 1/f_N = 1/2B$

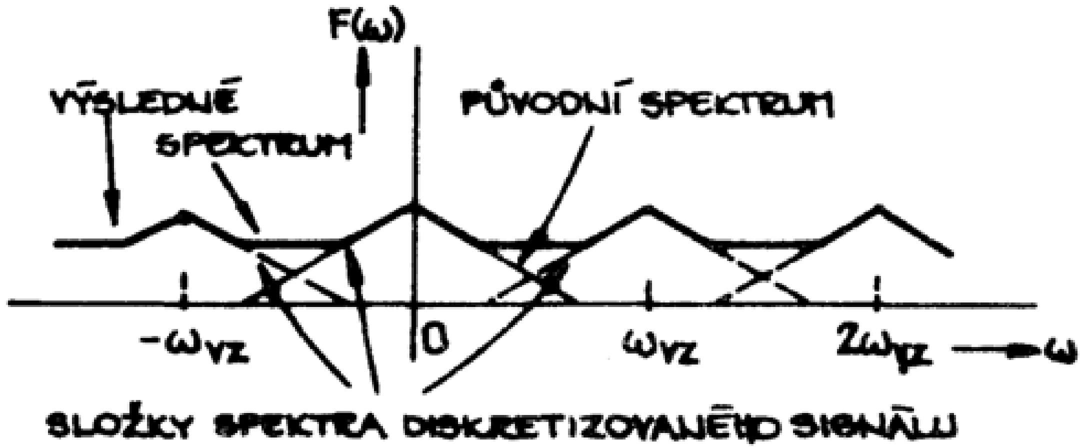
Nyquistův interval (perioda), vzorkovací interval (perioda)

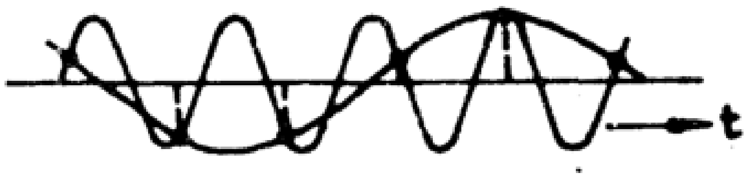
VZORKOVACÍ TEOREM



$f_{sr} = (4\ \ 5).f_N$

VZORKOVACÍ TEORÉM





překrývání spekter - aliasing

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(2\pi f\, nT_{vz} + \varphi_0) = A.\cos(\frac{2\pi\, nT_{vz}}{NT_{vz}} + \varphi_0) = A.\cos(\frac{2\pi\, n}{N} + \varphi_0),$$

když $T = NT_{vz}$ a tedy $f = 1/NT_{vz}$ nebo

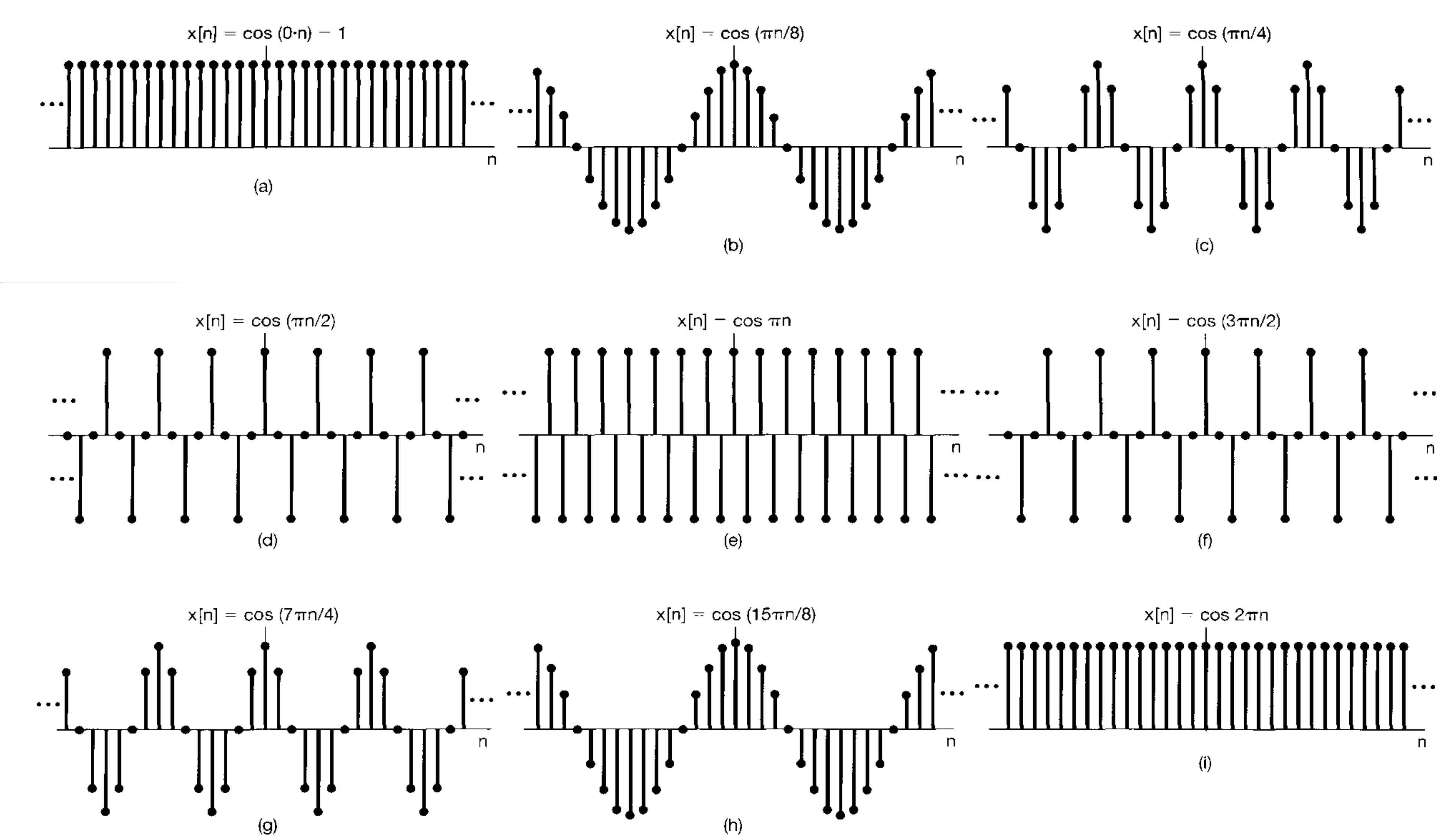
$$x(nT_{vz}) = A.\exp(\frac{2\pi j\, n}{N} + \varphi_0).$$

Komplexní exponenciála samozřejmě rovněž reprezentuje periodickou veličinu, protože platí

$$x[(k+N)T_{vz}] = \exp\frac{j2\pi(k+N)}{N} = \exp\frac{j2\pi k}{N}.\exp(j2\pi),$$

kdy $\exp(2\pi j) = \cos(2\pi) + j.\sin(2\pi) = 1 + j0 = 1$

HARMONICKÁ FUNKCE A VZORKOVÁNÍ



REKONSTRUKCE SPOJITÉ FUNKCE Z NAVZORKOVANÉ POSLOUPNOSTI

Předpokládejme, že původní spojitá funkce $x_a(t)$ měla frekvenčně omezené spektrum $X_a(f)$, tj. platí pro ni

$$X_a(f) = \begin{cases} X(f) & |f| \le f_{vz}/2 \\ 0 & |f| > f_{vz}/2 \end{cases}$$

kde je X(f) frekvenční spektrum dané posloupnosti. Protože víme, že spektrum navzorkované posloupnosti je periodické s periodou danou vzorkovací frekvencí, zajímá nás pouze její jedna (první) perioda, pro kterou v rozsahu frekvencí $|f| \le f_{vz}/2$ platí

$$X_a(f) = X(f) = T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}).e^{-j2\pi f n T_{vz}}$$

REKONSTRUKCE SPOJITÉ FUNKCE Z NAVZORKOVANÉ POSLOUPNOSTI

Potom pro původní funkci $x_a(t)$ je

$$x_a(t) = \int_{-f_{vz}/2}^{f_{vz}/2} X_a(f).e^{j2\pi ft} df = \int_{-f_{vz}/2}^{f_{vz}/2} \left[T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}).e^{-j2\pi fnT_{vz}} \right].e^{j2\pi ft} df =$$

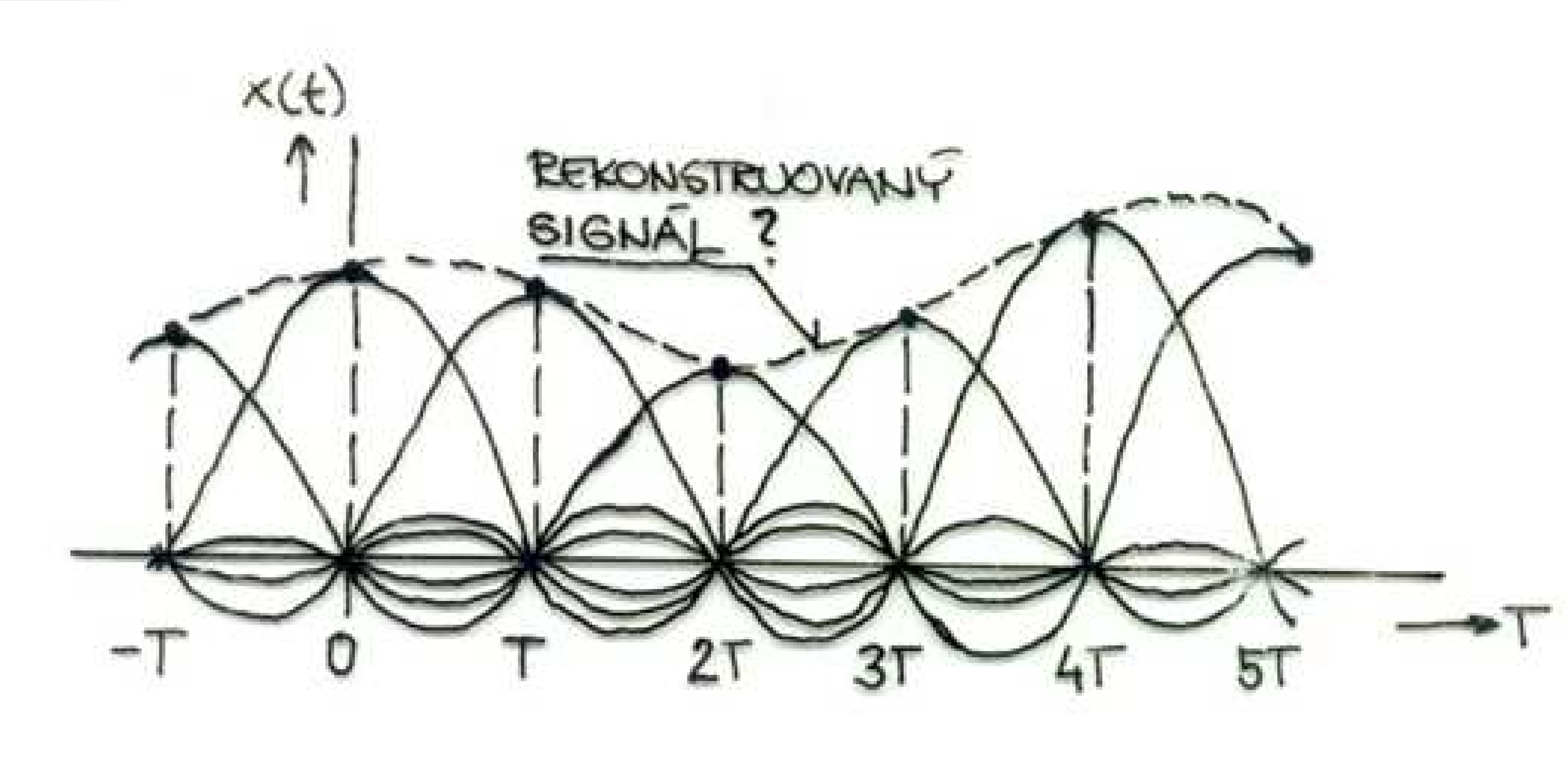
$$= T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}). \int_{-f_{vz}/2}^{f_{vz}/2} e^{j2\pi f(t-nT_{vz})} df = \left| \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \right| =$$

$$= \frac{1}{f_{vz}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}). \frac{e^{j2\pi(t-nT_{vz}).f_{vz}/2} - e^{-j2\pi(t-nT_{vz}).f_{vz}/2}}{j2\pi(t-nT_{vz})} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}).Si\left(\pi(t-nT_{vz}).\frac{1}{T_{vz}} \right)$$

tj. původní funkce je dána nekonečným součtem vzorkovacích funkcí, které procházejí každou hodnotou $x_a(t)$ z nekonečného počtu vzorků navzorkované posloupnosti.

REKONSTRUKCE SPOJITÉ FUNKCE Z NAVZORKOVANÉ POSLOUPNOSTI



ROZKLAD DISKRÉTNÍCH POSLOUPNOSTÍ NA DÍLČÍ HARMONICKÉ SLOŽKY

HARMONICKÁ ANALÝZA DISKRÉTNÍCH POSLOUPNOSTÍ

- ☑ diskrétní Fourierova řada
- ☑ Fourierova transformace s diskrétním časem
- ☑ diskrétní Fourierova transformace
- ☑ rychlá Fourierova transformace

ROZKLAD DISKRÉTNÍHO PERIODICKÉHO SIGNÁLU

- ☑ spojitý signál – opakování

Fourierova řada (v komplexním tvaru)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t} \qquad \Omega = 2\pi / T$$

kde c_n jsou komplexní Fourierovy koeficienty

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t).e^{-jn\Omega t} dt$$

Ω – úhlový kmitočet základní harmonické složky (základní harmonická);

FOURIEROVA ŘADA PRO DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

- nechť $x(kT_{vz})$ je periodický signál s periodou NT_{vz}; pak $x(kT_{vz})$ lze rozložit pomocí komplexní exponenciální Fourierovy řady

$$x(kT_{vz}) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n . \exp \frac{j2\pi nk}{N}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

kde

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_{vz}) . \exp\left(- \frac{j2\pi kn}{N} \right), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

FOURIEROVA ŘADA
DŮKAZ

- změňme index sumace ve vztahu pro výpočet koeficientu c_n

Tento obrázek nyní nelze zobrazit.

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}).\exp(-2j\pi mn/N)$$

$$x(kT_{vz}) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n.\exp(2j\pi nk/N) = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}\left(\sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}).\exp(-2j\pi mn/N)\right).\exp(2j\pi nk/N) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}).\sum_{n=0}^{N-1}\exp[2j\pi n(k-m)/N],$$

FOURIEROVA ŘADA
DŮKAZ

potom

$$\text{pro } k = m \text{ je } \sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k-m)/N] = N$$

$$\text{pro } k \neq m \text{ je } \sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k-m)/N] = \frac{1-\exp[2j\pi N(k-m)/N]}{1-\exp[2j\pi(k-m)/N]} = 0$$

(součet N členů geometrické posloupnosti $s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$)

$$\boxed{x(kT_{vz})} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}).\sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k-m)/N] =$$

$$= \frac{1}{N} x(kT_{vz}).N = \boxed{x(kT_{vz}) \qquad \text{c.b.d.}}$$

FOURIEROVA ŘADA
PŘÍKLAD

$x(kT_{vz}) = A.\cos(2\pi k/N)$ je periodická funkce s periodou N

$$A.\cos\frac{2\pi k}{N} = \frac{A}{2}.\left[\exp\frac{2j\pi k}{N} + \exp\left(-\frac{2j\pi k}{N}\right)\right]$$

Nyní, protože

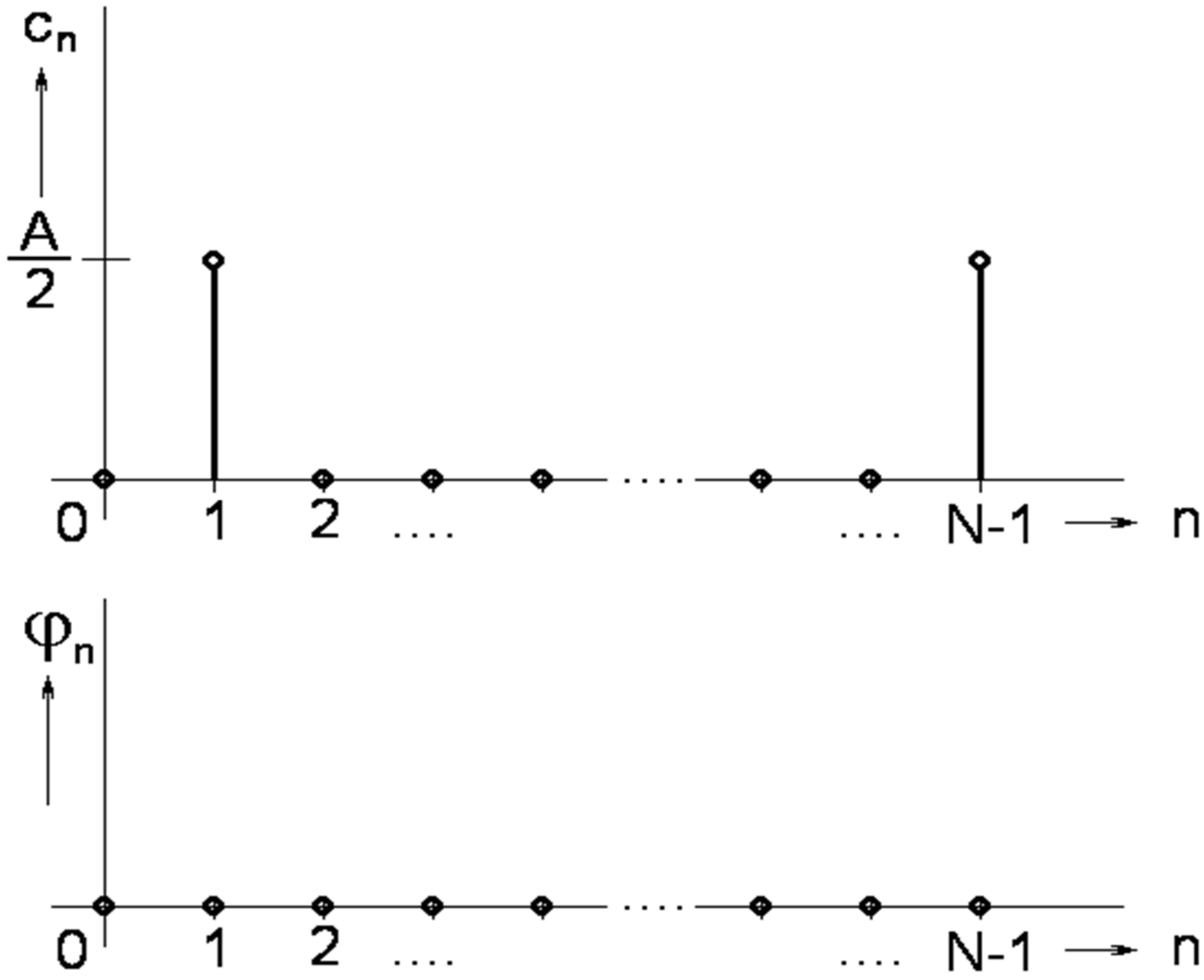
$$\exp\frac{2j\pi k(N-1)}{N} = \exp\frac{2j\pi kN}{N}.\exp\left(-\frac{2j\pi k}{N}\right) = \exp\left(-\frac{2j\pi k}{N}\right);$$

proto

$$A.\cos\frac{2\pi k}{N} = \frac{A}{2}.\left[\exp\frac{2j\pi k}{N} + \exp\left(\frac{2j\pi(N-1)k}{N}\right)\right]$$

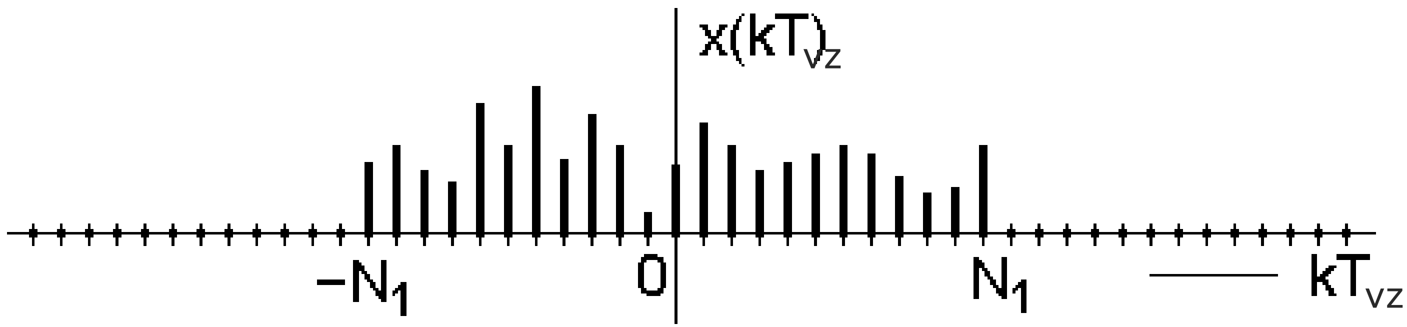
$$a_1 = \frac{A}{2}, \quad a_{N-1} = \frac{A}{2}, \quad a_n = 0 \text{ pro všechna jiná n}$$

FOURIEROVA ŘADA
PŘÍKLAD



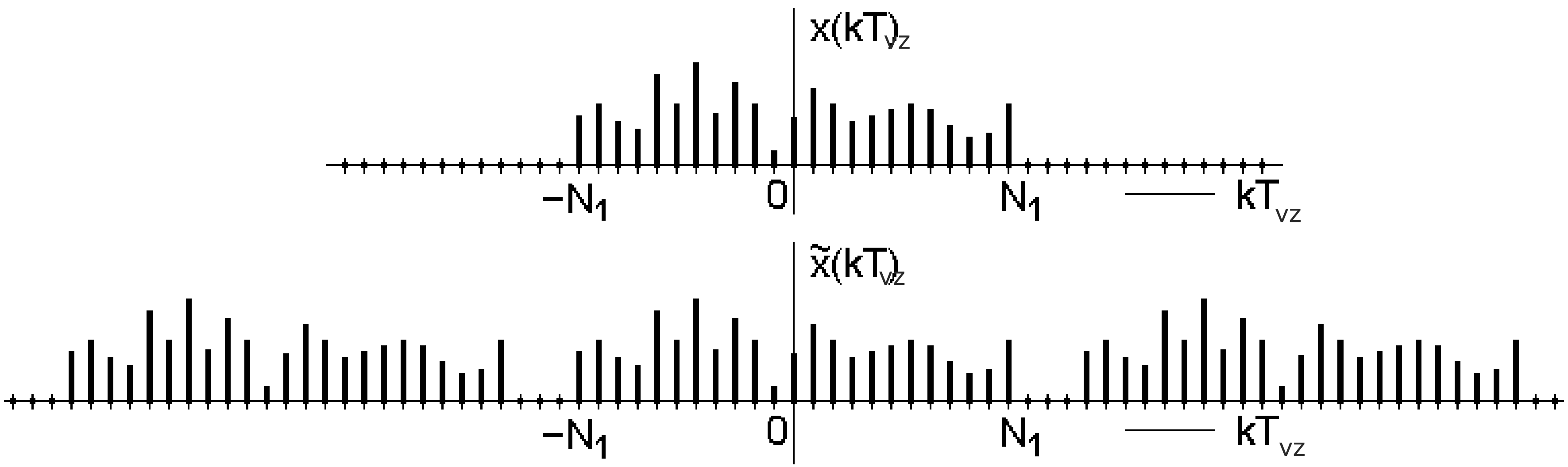
FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

- nechť $x(kT_{vz})$ je časově omezený signál s diskrétním časem s $x(kT_{vz})=0$ pro všechna celá $k>N_1$ a $k<-N_1$, kde N_1 je celočíselná konstanta.



FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

- dále, nechť pro kladné sudé celé číslo $N>2N_1$ označíme $\tilde{x}_N(kT_{vz})$ periodický signál s periodou NT, který je $x(kT_{vz})$ pro k = -N/2, -(N/2)+1, …, -1, 0, 1, …, (N/2)-1.
- z definice $\tilde{x}_N(kT_{vz})$ máme $x(kT_{vz}) = \lim_{N\to\infty} \tilde{x}_N(kT_{vz})$



FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

- protože $\tilde{x}_N(kT_{vz})$ je periodická funkce s periodou NT_{vz}, má Fourierovu řadu

$$\tilde{x}_N(kT_{vz}) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n.\exp\frac{2j\pi nk}{N}$$

kde

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{k=-N/2}^{(N/2)-1} \tilde{x}_N(kT_{vz}).\exp\left(-\frac{2j\pi kn}{N}\right), \quad n = 0,1,\dots,N-1$$

FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

- Z definice $\tilde{x}_N(kT_{vz})$ vyplývá, že lze poslední uvedenou rovnici přepsat do tvaru

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}).\exp\left(-\frac{2j\pi knT_{vz}}{NT_{vz}}\right), \qquad n = 0,1,\ldots,N-1,$$

a potom

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}).\exp(-jk\omega T_{vz}), \qquad \omega = 2\pi n / NT_{vz}$$

kde ω je pro $N\rightarrow\infty$ spojitá (nediskrétní) veličina.

DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE - DFT

- aby bylo možné počítat s frekvenčním spektrem na počítači, je třeba spektrální funkci diskretizovat;
- předpokládejme, že diskrétní veličina $x(nT_{vz})=0$ pro $n < 0$ a $n \geq N-1$, pak DFT je definována vztahem

$$X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}).e^{-jk\Omega nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}).e^{-jk\frac{2\pi}{NT_{vz}}nT_{vz}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}).e^{-j2\pi kn/N}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n).e^{-j2\pi kn/N}$$

ZPĚTNÁ DISKRÉTNÍ FT – DFT^{-1}

$$x(nT_{vz}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega).e^{jnT_{vz}k\Omega} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega).e^{j2\pi kn/N}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k).e^{j2\pi kn/N}$$

INVERZIBILITA DFT

$$\mathcal{DFT}^{-1}\{\mathcal{DFT}(x)\} = x$$

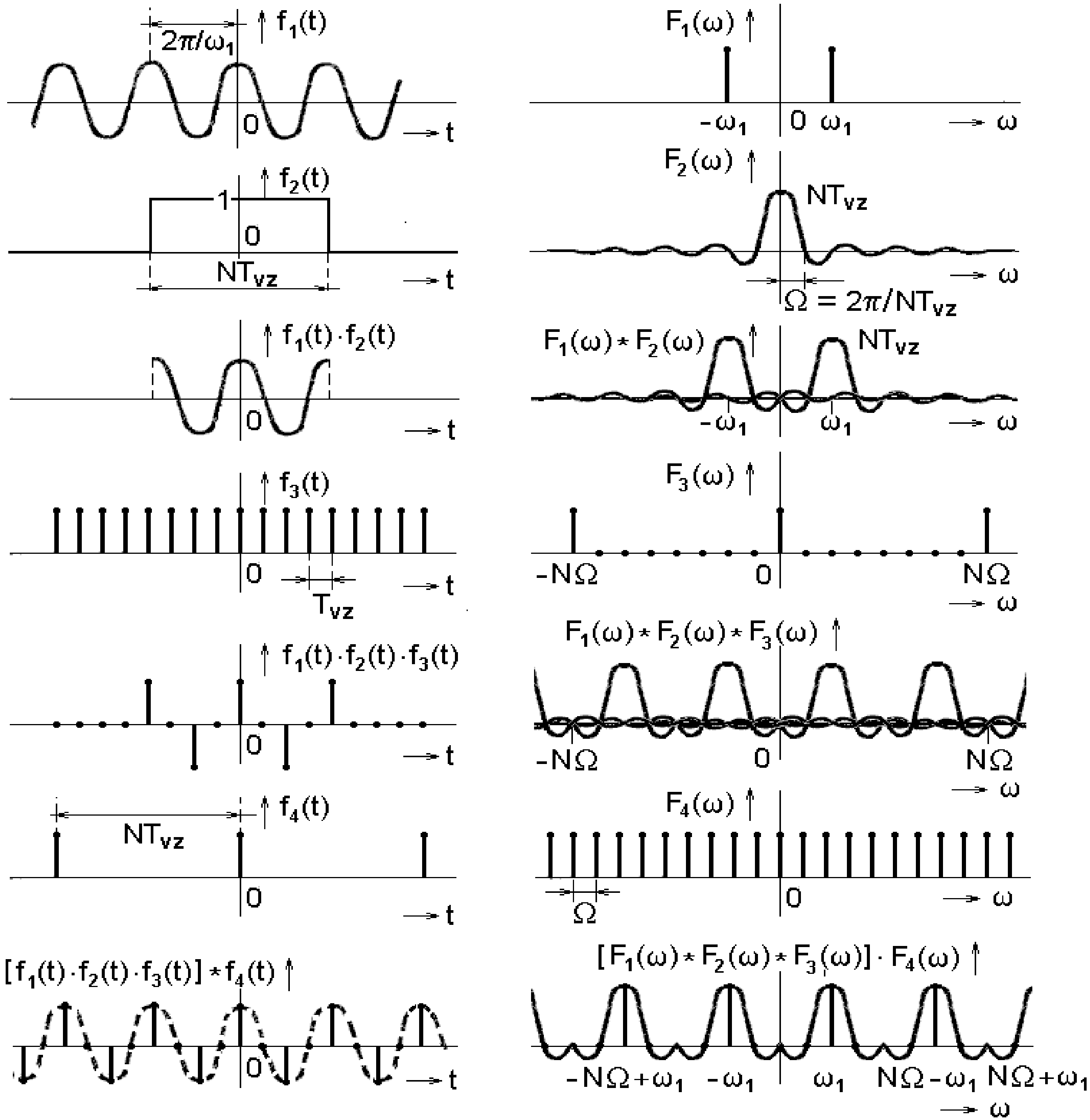
$$x(mT_{vz}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega).e^{jmT_{vz}k\Omega} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}).e^{-jk\Omega nT_{vz}}\right).e^{jmT_{vz}k\Omega} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}).\sum_{k=0}^{N-1}.e^{j(m-n)k\Omega T_{vz}} = \left| \begin{array}{l} \text{pro } m = n \text{ je } \sum_{k=0}^{N-1}.e^{j(m-n)k\Omega T_{vz}} = N \\ \text{pro } m \neq n \text{ je } \sum_{k=0}^{N-1}.e^{j(m-n)k\Omega T_{vz}} = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1-e^{j(m-n)N\Omega T_{vz}}}{1-e^{j(m-n)\Omega T_{vz}}} = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{N}x(mT_{vz}).N = x(mT_{vz}) \qquad \Omega = 2\pi / NT_{vz}$$

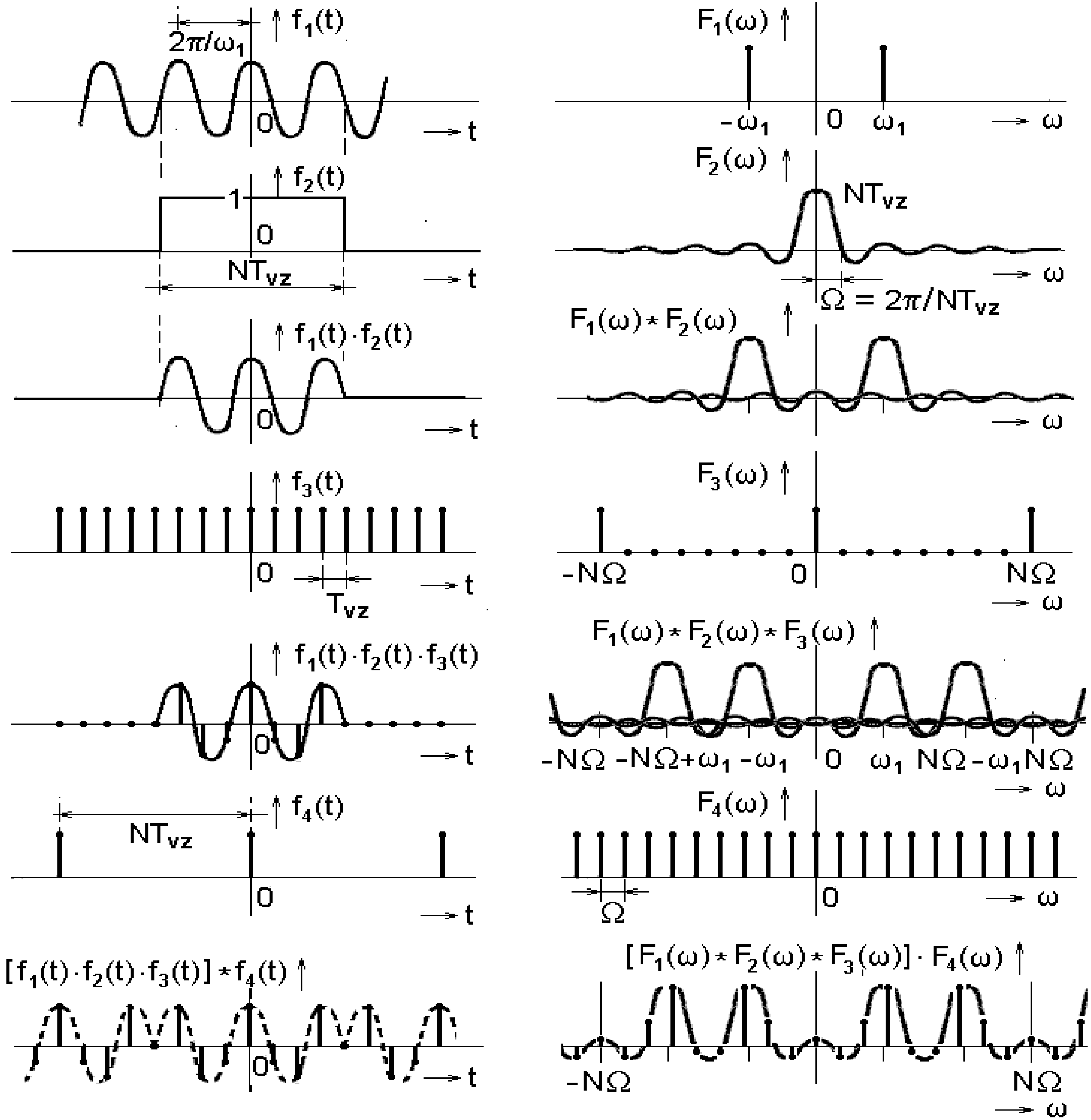
DFT

$\omega_1 = 2\Omega = 4\pi/NT_{VZ}$



DFT

$\omega_1 = 2{,}5\Omega$
$= 5\pi/NT_{VZ}$

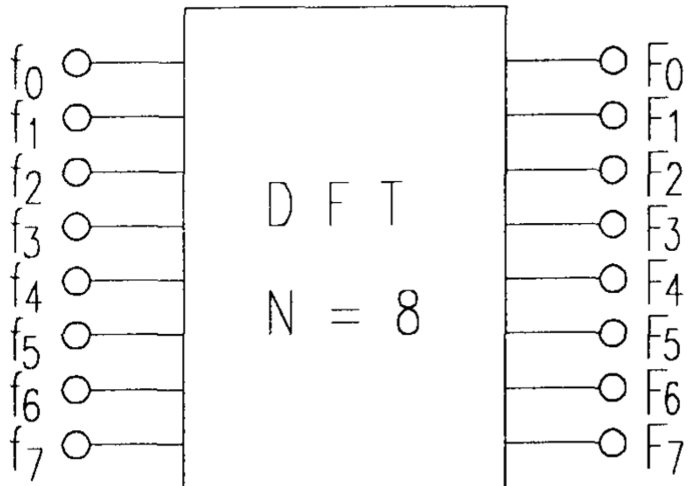


RYCHLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE - FFT

$$X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}).e^{-jk\Omega nT_{vz}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}).\left(\cos(k\Omega nT_{vz}) - j\sin(k\Omega nT_{vz})\right)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n).e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n).\left(\cos(2\pi kn/N) - j\sin(2\pi kn/N)\right)$$

- ☑ hodnoty funkcí cos a sin se používají z tabulek pro čtvrtinu periody;
- ☑ zrychlení výpočetního algoritmu se dosáhne využitím dříve vypočítaných mezivýsledků, resp. vynecháním zbytečných výpočtů – např. násobení nulou;



RYCHLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE - FFT

FFT – (Cooley, Tukey – 1965, ale před nimi již i mnozí další od 1903)

- rozklad v časové oblasti;
- rozklad ve frekvenční oblasti

jednotka pracnosti P – jedno komplexní násobení a sečítání

pracnost výpočtu jednoho vzorku spektra – N.P

pracnost celé transformace – N.N.P = N^2.P

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

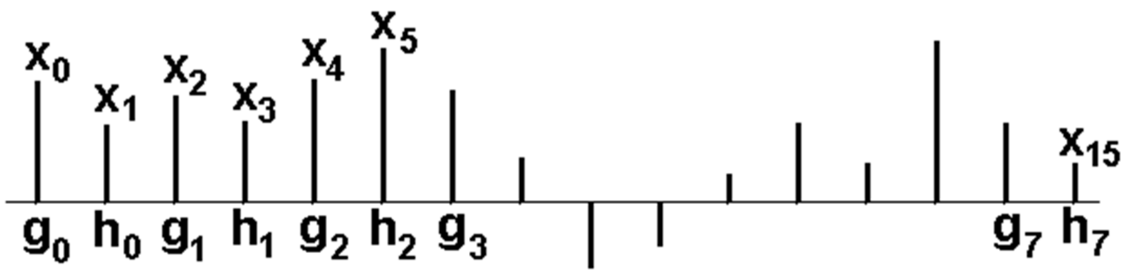
- vstupní posloupnost o sudém počtu vzorku rozdělíme na dvě dílčí posloupnosti

$\{g_i\} = \{x_{2i}\}$ - sudé prvky původní posloupnosti,

$\{h_i\} = \{x_{2i+1}\}$ - liché prvky původní posloupnosti,

$i=0,1,\ldots, N/2-1$

předpokládáme, že každá z posloupností (původní i obě dílčí), mají svou DFT



FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$G(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} g_i . e^{-\frac{j2\pi ik}{N/2}} = \sum_{i=0}^{N/2-1} g_i . e^{-\frac{j4\pi ik}{N}}$$

$$H(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} h_i . e^{-\frac{j2\pi ik}{N/2}} = \sum_{i=0}^{N/2-1} h_i . e^{-\frac{j4\pi ik}{N}}$$

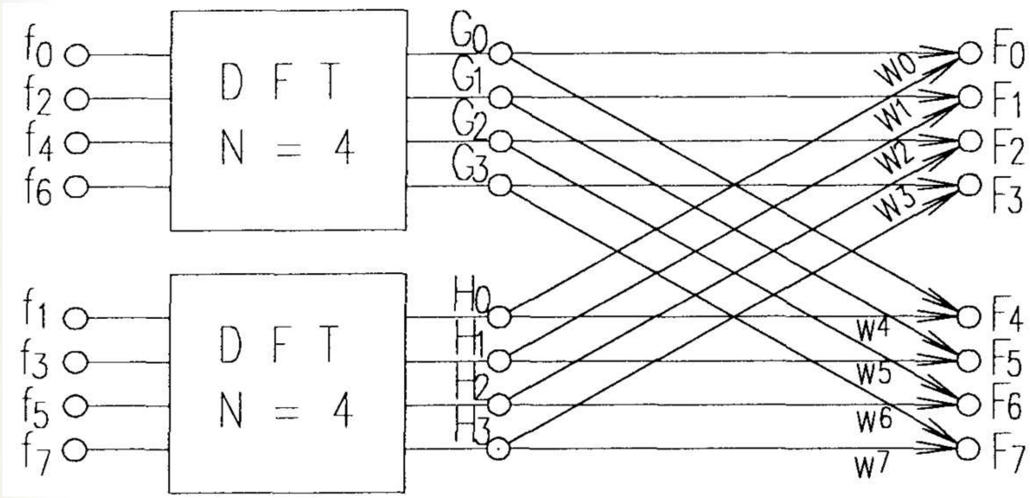
$$k \in \langle 0, N/2-1 \rangle$$

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$X(k)=\sum_{i=0}^{N-1} x_i.e^{-\frac{j2\pi ik}{N}} = x_0.e^{-j\frac{2\pi}{N}0k} + x_1.e^{-j\frac{2\pi}{N}1k} + x_2.e^{-j\frac{2\pi}{N}2k} + \ldots + x_{N-1}.e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)k} =$$

$$= \left| \begin{matrix} g_0 = x_0 & g_1 = x_2 & g_2 = x_4 & \ldots & g_7 = x_{14} \\ h_0 = x_1 & h_1 = x_3 & h_2 = x_5 & & h_7 = x_{15} \end{matrix} \right| = \sum_{i=0}^{N/2-1}\left(g_i.e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}} + h_i.e^{-\frac{j2\pi(2i+1)k}{N}} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N/2-1}\left(g_i.e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}} + h_i.e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}}.e^{-\frac{j2\pi k}{N}} \right) = G(k') + e^{-\frac{j2\pi k}{N}}.H(k') \qquad k' = k \bmod (N/2)$$



$$W^m = e^{-j\frac{2\pi}{N}m}$$

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$X(k) = G(k') + e^{-\frac{j2\pi k}{N}}.H(k') \qquad k' = k \bmod (N/2)$$

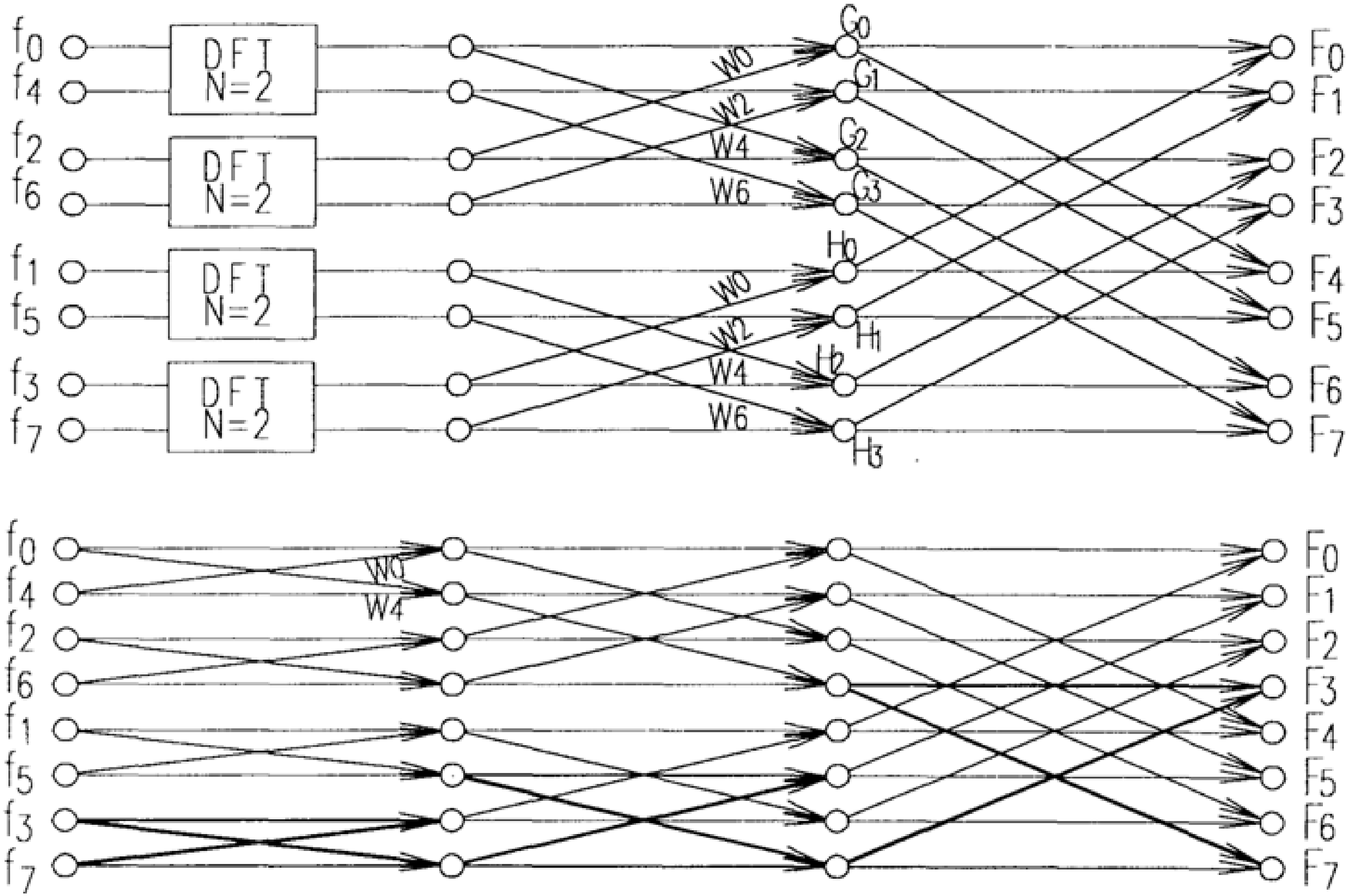
- výsledná pracnost bude součtem pracností výpočtu spekter obou posloupností

$$2.(N/2)^2.P + N.P$$

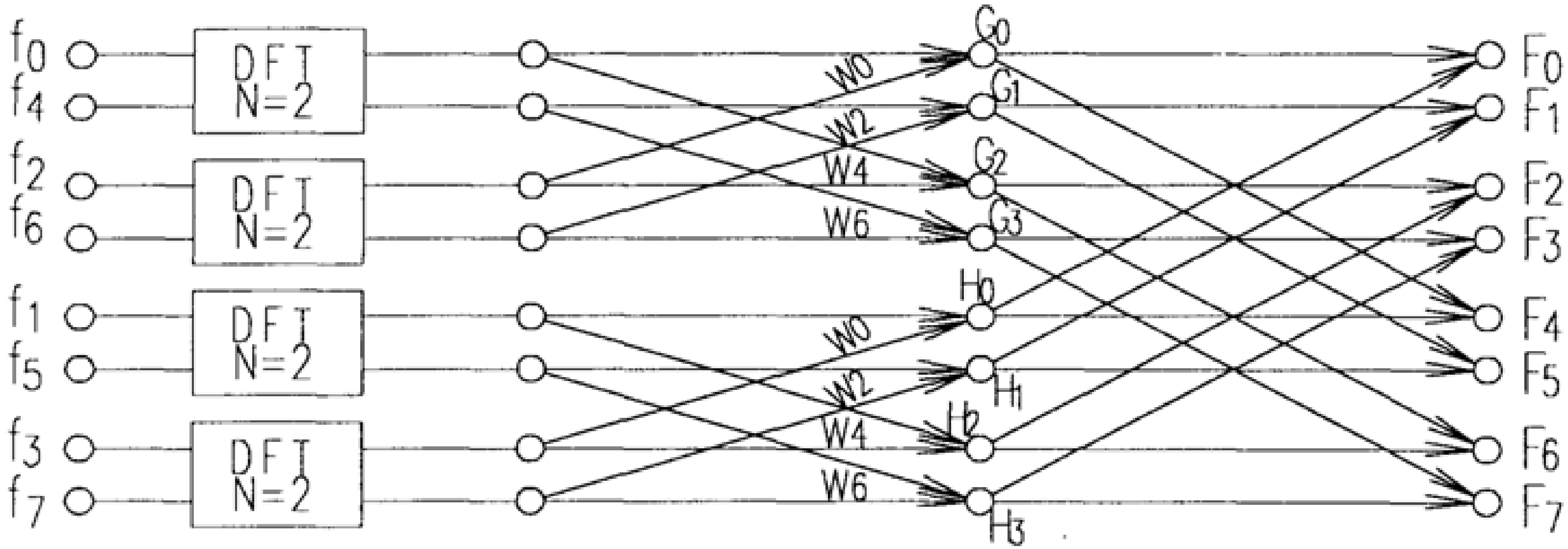
tzn. uspoření pracnosti téměř na polovinu;

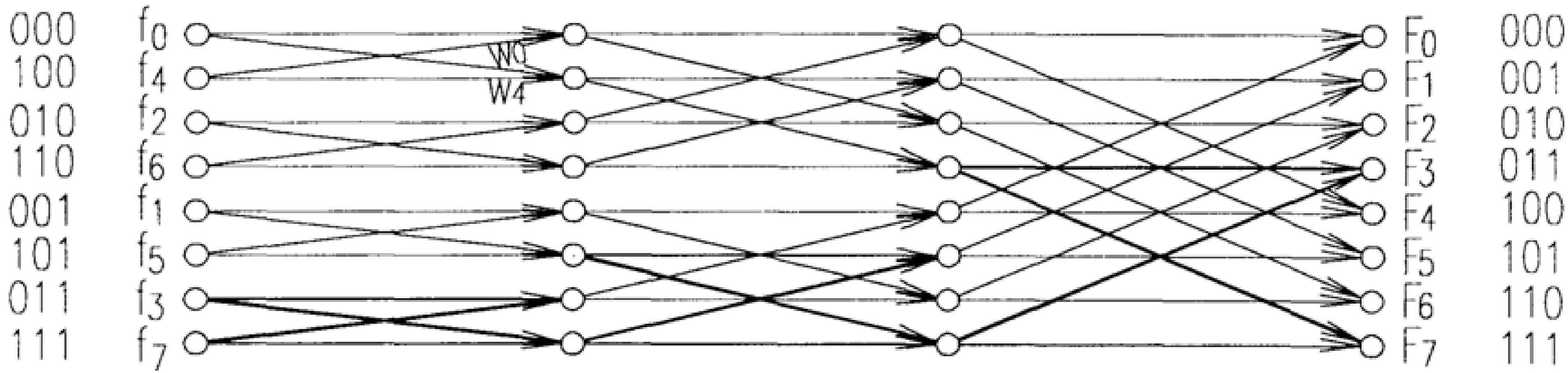
- je-li N/2 opět sudé, může se v dělení pokračovat – celkově je výhodné, je-li $N = 2^m$

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI



FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI





FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

- ☑ každý uzel v grafu představuje jedno komplexní násobení a součet
- ☑ N uzlů ve vrstvě; celkem m vrstev $m=\log_2 N$
- ☑ celková pracnost:

$$P.N.m = P.N.\log_2 N$$

to představuje při N=8 úsporu 60%, při N=1024 již téměř 99% a při $N=131072=2^{17}$ dokonce 99,99%

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

- ☑ výstup je uspořádán přirozeně; vstup je v bitově inverzním pořadí;
- ☑ opakující se struktury „motýlků“ obsahujících 4 uzly a 4 hrany