

# Príklady na cvičenia pre predmet F3060

## Kmity, vlny, optika

Juraj Rusnačko  
Ústav fyziky kondenzovaných látok, MU

14. 12. 2016

### 1 Cvičenie 1

- 1.1 Teleso o hmotnosti  $m$  kmitá na pružine tuhosti  $k$ . Zostavte a vyriešte pohybovú rovnicu pre teleso, gravitáciu neuvažujte.
- 1.2 Určte časovú závislosť výchylky telesa z príkladu 1. v prípade, že poznáte počiatkové podmienky  $x(0) = x_0$ ,  $v(0) = v_0$ .
- 1.3 Vypočítajte časovú strednú hodnotu kinetickej a potenciálnej energie lineárneho harmonického oscilátora.
- 1.4 Zostavte a vyriešte pohybovú rovnicu pre matematické kyvadlo použitím zákona zachovania mechanickej energie.

### 2 Cvičenie 2

- 2.1 Vypočítajte frekvenciu vlastných kmitov pre obecné fyzické kyvadlo.
- 2.2 Teleso hmotnosti  $m$  je zavesené na pružine o tuhosti  $k$ . Berúc do úvahy gravitačné pôsobenie Zeme, vypočítajte rovnovážnu polohu telesa a popíšte, ako gravitácia ovplyvní kmity oscilátora.
- 2.3 Pružina v nezaťaženom stave má dĺžku  $d$ . Na pružinu zavesíme teleso o hmotnosti  $m$ , pružina sa predĺži o  $s$ . Na takto zavesené teleso dopadne ďalšie teleso s hmotnosťou  $m$  z výšky  $s$  a spojí sa s ním. Určte rovnovážnu polohu takejto sústavy dvoch telies, časovú závislosť výchylky sústavy, jej amplitúdu a strednú hodnotu mechanickej energie.
- 2.4 Určte časový vývoj výchylky tlmeného lineárneho harmonického oscilátora, ak má tlmiaca sila tvar  $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$ .
- 2.5 Stredom Zeme je vyvítaný rovný tunel, ktorý spája dve miesta na opačných stranách planéty. Teleso vypustíme do takéhoto tunela z jednej strany Zeme s nulovou počiatkovou rýchlosťou. Opíšte pohyb telesa (Zem považujte za homogénnu guľu o hmotnosti  $6 \times 10^{24}$  kg a polomere  $R = 6371$  km.)

### 3 Cvičenie 3

- 3.1 Uvažujte tlmený a budený harmonický oscilátor s obecnou periodickou budiacou silou  $\mathbf{F}(t)$ . Napíšte rozklad  $\mathbf{F}(t)$  pomocou Fourierovho radu a využite linearitu pohybovej rovnice – ukážte, že riešením pohybovej rovnice je

$$x(t) = \sum_j a_j y_j(t) + b_j z_j(t),$$

kde  $y_j(t)$  a  $z_j(t)$  sú riešenia pohybových rovníc s pravou stranou rovnou  $\cos(\omega_j t)$ , resp.  $\sin(\omega_j t)$ .

- 3.2 Uvažujte RLC obvod obsahujúci dva zdroje striedavého prúdu  $\hat{U}_1$  a  $\hat{U}_2$  s frekvenciami  $\omega_1$  a  $\omega_2$ . Určte časovú závislosť náboja na kondenzátore  $Q(t)$ .
- 3.3 Dve matematické kyvadlá o totožných dĺžkach závesu  $l$  a hmotnostiach závaží  $m$  sú zavesené vedľa seba. Závažia sú spojené horizontálnou pružinou o tuhosti  $k$  tak, že pre nevychýlené závažia je pružina nenatiahnutá. Popíšte kmity sústavy – predpokladajte, že pružina ostáva celý čas v horizontálnej polohe a že platí aproximácia malých kmitov sústavy  $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$ .
- 3.4 Uvažujte sústavu dvoch viazaných lineárnych oscilátorov vo forme závaží, každé o hmotnosti  $m$ , navzájom spojené pružinou o tuhosti  $k$ . Z druhej strany sú obe závažia spojené s nehybnou stenou ďalšou pružinou o tuhosti  $k$ . Určte vlastné frekvencie tzv. normálnych módov sústavy (obe telesá kmitajú s rovnakou frekvenciou).

### 4 Cvičenie 4

- 4.1 Ukážte, že obecným riešením vlnovej rovnice je  $u(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct)$  kde  $f$  a  $g$  sú bližšie nešpecifikované funkcie. Navyše ukážte, že vlnovej rovnici vyhovuje funkcia  $A \cos(kx - \omega t)$ .
- 4.2 Pre zadané funkcie  $\psi(z, t)$  zistite, či vyhovujú vlnovej rovnici a ak áno, určte fázovú rýchlosť:

(a)  $\psi(z, t) = \sin(2\pi z/a + 2\pi t/b)$ ,

(b)  $\psi(z, t) = (az - bt)^2$ ,

(c)  $\psi(z, t) = \frac{1}{a^2 z^2 + b}$ ,

(d)  $\psi(z, t) = a \sin(az^2 - bt^2)$ ,

(e)  $\psi(z, t) = A \exp(-(a^2 z^2 + b^2 t^2 - 2abzt))$ ,

(f)  $\psi(z, t) = 5 \times 10^{-3} \text{ m} \times \cos\left(400 \text{ s}^{-1} \left(t + \frac{x}{1000 \text{ ms}^{-1}}\right)\right)$  – navyše určte: amplitúdu, smer šírenia, fázovú rýchlosť, vlnový vektor, vlnočet, vlnovú dĺžku, periódu, frekvenciu, uhlovú frekvenciu, maximálnu rýchlosť  $d\psi(z, t)/dt$  a maximálne zrýchlenie  $d^2\psi(z, t)/dt^2$ .

- 4.3 Ukážte, že polia  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  splňujúce vákuové Maxwellove rovnice taktiež vyhovujú vlnovej rovnici a určte fázovú rýchlosť elektromagnetických vln.

## 5 Cvičenie 5

- 5.1 Určte pomer rýchlostí zvuku vo vodíku a v hélíu za rovnakej teploty. Porovnajete so strednou rýchlosťou molekúl  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ .
- 5.2 Určte tvar vlny, ktorá vznikne súčtom dvoch postupných vln s rovnakou amplitúdou, frekvenciou a vlnovou dĺžkou cestujúcich proti sebe.
- 5.3 Vyšetrite vplyv okrajových podmienok na možné frekvencie a vlnové dĺžky stojatých vln, menovite uvažujte prípady: oba konce pevné, jeden koniec pevný a jeden voľný, oba konce voľné. Pevný koniec v  $x_0$  znamená  $u(x_0, t) = 0$  a voľný koniec v  $x_0$  zas  $du(x_0, t)/dx = 0$ . Za obecnú stojatú vlnu považujte nasledujúcu funkciu:

$$u(x, t) = a \cos(kx) \cos(\omega t) + b \sin(kx) \cos(\omega t) + c \cos(kx) \sin(\omega t) + d \sin(kx) \sin(\omega t).$$

- 5.4 Vypočítajte Fourierove koeficienty pre periodickú funkciu:

$$f(x) = x, x \in [0, L],$$

$$f(x + L) = f(x).$$

## 6 Cvičenie 6

- 6.1 Zvuk o frekvencii 440 Hz sa šíri vzduchom (rýchlosť zvuku vo vzduchu je približne 330 m/s). Vypočítajte, akou rýchlosťou sa musí pohybovať detektor voči stacionárnemu vzduchu a zdroju (a podobne zdroj voči stacionárnemu vzduchu a detektoru), aby detegovaná frekvencia bola o poltón vyššia/nížšia ako 440 Hz. V temperovanej stupnici je 12 intervalov na oktávu. Ďalej uvažujte ladičku (detektor) na ramene dĺžky  $R$  rotujúcom v horizontálnej rovine obsahujúcej zdroj. Akou uhlovou rýchlosťou sa musí rameno otáčať, aby bol pomer maximálnej a minimálnej detegovanej frekvencie 1 tón?
- 6.2 Sú zadané vlny:

$$u_1 = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad u_2 = A/r \cos(kr - \omega t).$$

Určte geometrický tvar plôch konštantnej fázy. Zo získaných poznatkov skúste zostaviť tvar pre výchylku valcovej struny. Zdôvodnite prítomnosť faktoru  $1/r$  v amplitúde vlny  $u_2$  – aký faktor bude obsahovať amplitúda valcovej vlny?

- 6.3 Vypočítajte fázovú a grupovú rýchlosť pre vlny šíriace sa v prostredí s disperznou závislosťou  $\omega = ck(1 + \frac{1}{2}\alpha k^2)$ .

- 6.4 Búrka spôsobila vlny v hlbokaj vode, ktoré sa šíria k pobrežiu vzdialenému 100 km. Vlnová dĺžka vln je 10 m. Vypočítajte čas, za ktorý dorazia vlny na pobrežie a čas medzi príchodom dvoch nasledujúcich hrebeňov vln. Disperzná závislosť pre vlny v hlbokaj vode je  $\omega = \sqrt{gk}$ ,  $g$  je tiažové zrýchlenie.

## 7 Cvičenie 7

- 7.1 Uvažujte rovinnú monochromatickú vlnu, kde zložky elektrickej intenzity a magnetickej indukcie majú tvar:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t).$$

Z vákuových Maxwellových rovníc vyvod' te podmienky pre  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{k}$  a  $\omega$ .

- 7.2 Žiarovkou o účinnosti  $\eta = 1\%$  preteká prúd  $I = 0.25$  A pri napätí  $U = 3$  V. Predpokladajte, že žiarovka vyžaruje monochromatický zväzok svetla o priereze  $S = 10 \text{ cm}^2$  a vlnovej dĺžke  $\lambda = 550$  nm. Určte:

- počet fotónov vyžiarených za 1 sekundu,
- počet fotónov v objemovej jednotke,
- intenzitu svetla a hustotu objemovú hustotu energie.

- 7.3 V roku 1848-49 Hippolyte Fizeau vykonal slávny experiment, pomocou ktorého určil rýchlosť svetla vo vzduchu (zmýlil sa asi o 5%). Zväzok svetla sa šíri od zdroja až dopadne na zrkadlo, kde sa kolmo odrazí a vracia sa späť. Svetlu do cesty vložíme rotujúce ozubené koleso. Fizeau nastavil rotáciu ozubeného kolesa tak, že všetko svetlo, ktoré prešlo medzerou medzi dvoma zubmi, dopadlo pri návrate na susedný zub. Vypočítajte frekvenciu otáčok ozubeného kolesa, ak má koleso 720 zubov a od zrkadla je vzdialené 8630 m.

## 8 Cvičenie 8

- 8.1 Vypočítajte Poyntingov vektor  $\mathbf{S}$  a hustotu energie  $\mathcal{E}$  pre rovinnú vlnu vo vákuu. Ukážte, že  $\mathbf{S}$  a  $\mathcal{E}$  vyhovujú Poyntingovmu teorému.

- 8.2 Uvažujte rovinnú vlnu:

$$\mathbf{E} = \hat{x}E_{0x} \cos(kz - \omega t + \phi_x) + \hat{y}E_{0y} \cos(kz - \omega t + \phi_y).$$

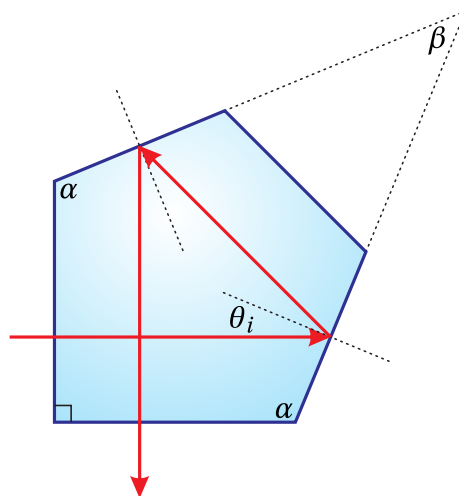
Stanovte Jonesov polarizačný vektor  $\mathbf{J}$  pre prípady:

- $E_{0y} = 0$ ,  $\phi_x = \phi_y = 0$ ,
- $E_{0x} = 0$ ,  $\phi_x = \phi_y = 0$ ,
- $E_{0x} = E_0 \cos \alpha$ ,  $E_{0y} = E_0 \sin \alpha$ ,  $\phi_x = \phi_y = 0$ ,

- (d)  $E_{0x} = E_{0y} = E_0, \phi_x = \pi/2, \phi_y = 0,$   
 (e)  $E_{0x} = E_{0y} = E_0, \phi_x = 0, \phi_y = \pi/2,$   
 (f) lineárne polarizované svetlo pod  $45^\circ$  uhlom od osi  $x$ .
- 8.3 Ukážte, že kruhovo polarizované svetlo sa dá dosiahnuť pomocou štvrt'vlnnej doštičky a lineárneho polarizátoru s osou pod uhlom  $45^\circ$  voči ose  $x$ . Záleží na poradí umiestnenia optických prvkov?
- 8.4 Uvažujte sústavu troch polarizátorov: lineárneho polarizátoru s osou v smere  $x$ , lineárneho polarizátoru s osou pod uhlom  $45^\circ$  od osi  $x$  a lineárneho polarizátoru s osou v smere  $y$ . Aký je výsledný polarizačný stav? Aký je pomer medzi intenzitou prešlého a dopadajúceho zväzku?

## 9 Cvičenie 9

- 9.1 "Pentaprism" (vid' obrázok 1) je optický element, ktorý sa mimo iné používa vo fotoaparátoch a iných optických prístrojoch. Svetlo je po prechode hranolom kolmé na smer dopadu a obraz je neprevrátený. Zistite uhol  $\beta$  z geometrie hranolu. Ak má sklo index lomu 1.5, určte aká časť intenzity svetla prejde hranolom a aká časť sa "stratí" pri odrazoch (viacnásobné odrazy zanedbajte).



**Obr. 1:** Geometria hranolu.

- 9.2 Uvažujte rozhranie vzduch/voda (index lomu 1.33). Svetlo dopadá na rozhranie pod uhlom  $30^\circ$  a je:
- lineárne polarizované pod uhlom  $50^\circ$  voči rovine dopadu,
  - nepolarizované.

Určte odrazivosť rozhrania. Aký musí byť uhol dopadu, aby bolo odrazené svetlo polarizované lineárne v rovine kolmej na rovinu dopadu? Aký musí byť uhol dopadu, aby došlo k úplnému odrazu?

## 10 Cvičenie 10

- 10.1 Svetlo dopadá na vrstvu oleja hrubú  $2 \mu\text{m}$  a interferuje na nej (v odrazenom svetle). Pre aké vlnové dĺžky monochromatického svetla nastane zosilnenie/zoslabenie? Index lomu oleja je približne 1.5.
- 10.2 Svetlo dopadá na vrstvu oleja hrubú  $d$  pod uhlom  $\alpha$  a interferuje na nej (v odrazenom svetle). Pre aké vlnové dĺžky monochromatického svetla nastane zosilnenie/zoslabenie? Index lomu oleja je približne 1.5.
- 10.3 Monochromatické svetlo dopadá na dve úzke štrbiny, ktoré sú vzdialené  $d$ . Vypočítajte podmienku pre interferenčné maximum/minimum pre obraz v rovine vzdialenej  $L$  od štrbín, ak platí  $d \ll L$ .
- 10.4 Vypočítajte intenzitný profil interferenčného obrazca dvojštrbiny.