

Zbierka príkladov pre predmet F3060

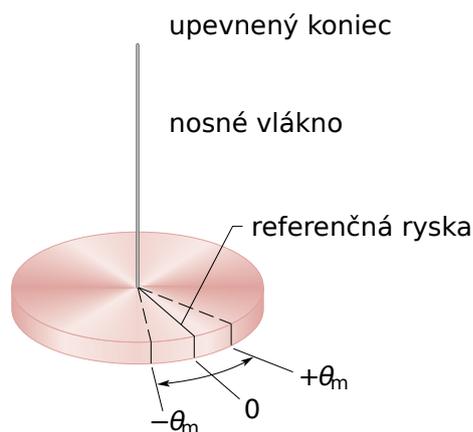
Kmity, vlny, optika

Juraj Rusnačko
Ústav fyziky kondenzovaných látok, MU

4. januára 2018

1 Voľné kmity

- 1.1 Dve pružiny s totožnými tuhosťami k sú upevnené na protíľahlé strany závažia hmotnosti m . V rovnováhe sú obe pružiny nenapnuté. Určte vlastnú frekvenciu kmitov sústavy.
- 1.2 Závažie je súčasne zavesené na dvoch rovnobežných pružinách, ktoré majú rovnakú rovnovážnu dĺžku. Tuhosti pružín sú k_1, k_2 . Popíšte vlastné kmity sústavy.
- 1.3 Popíšte vlastné kmity systému s dvoma sériovo spojenými pružinami s tuhosťami k_1, k_2 . Závažie o hmotnosti m je pripojené k druhej pružine.
- 1.4 Vibrácia **intersticiálneho** kyslíku ^{16}O v kremíku má frekvenciu 33.2×10^{12} Hz (33.2 Thz). Aká je tuhosť väzby? Na akej frekvencii vibruje izotop ^{18}O za predpokladu, že sa tuhosť väzby nezmení?
- 1.5 Gravitačná sila pôsobiaca na časticu, ktorá je umiestnená vo vnútri homogénnej gule je priamo úmerná vzdialenosti od stredu gule (dokážte! návod: použite Gaussovu integrálnu vetu). Ak budeme za takúto guľu považovať Zem a vyvrtáme pozdĺž jej priemeru tunel od pólu k pólu, ako dlho bude trvať než sa teleso, ktoré spadne do takéhoto tunelu prepadne na opačnú stranu zemegule? Odpor vzduchu zanedbajte.
- 1.6 U kmitov s frekvenciou $f = 50$ Hz bola v čase $t_1 = 0$ ms pozorovaná výchylka $x_1 = 30$ mm a v čase $t_2 = 12$ ms výchylka $x_2 = -14$ mm. Určte amplitúdu kmitov a fázu v čase 0 (fázovú konštantu).
- 1.7 Tuhé teleso o hmotnosti M je voľne nasadené na vodorovnú os, ktorou prechádza vo vzdialenosti d od ťažiska. Moment zotrvačnosti vzhľadom k osi rotácie je I (trenie je zanedbateľné).
 - a) Napíšte diferenciálnu rovnicu, ktorá popisuje zmenu uhlu pootočenia telesa θ s časom. Uhol pootočenia odčítajte od rovnovážnej polohy telesa.
 - b) Ak teleso vykonáva malé kmity tak, že $\sin \theta \approx \theta$, aká je ich perióda?



Obr. 1: Torzné kyvadlo.

- 1.8 V predchádzajúcej úlohe je moment zotrvačnosti tuhého telesa vzhľadom k osi prechádzajúcej ťažiskom rovný I_T . Nájdite výraz pre periódu malých kmitov ako funkciu d a I_T a ukážte, že:
- existujú dve hodnoty d , d_1 a d_2 , ktoré zodpovedajú danej perióde;
 - perióda je rovná $T = 2\pi\sqrt{\frac{d_1+d_2}{g}}$;
 - perióda je minimálna, ak $d = \sqrt{\frac{I_T}{M}}$, a nájdite túto minimálnu hodnotu periódy.
- 1.9 Uvažujte fyzické kyvadlo pozostávajúce zo železnej tyče dĺžky $l = 1$ m a hmotnosti $m_{\text{tyč}} = 2$ kg, ku ktorej je na konci pripevnený hliníkový disk o polomere $R = 20$ cm s hmotnosťou $m_{\text{disk}} = 1$ kg. Kyvadlo je upevnené v strede tyče. Vypočítajte vlastnú frekvenciu kyvadla. Ako sa zmení, ak kyvadlo upevníme a) na konci tyče, b) v strede disku?
- 1.10 Meranie periódy fyzického kyvadla sa dá použiť na meranie tiažového zrýchlenia g . Pre jednoduchosť uvažujte homogénnu tyč dĺžky L zavesenú na jednom konci. Vyjadrite g ako funkciu L a T .
- 1.11 Na obrázku 1 je znázornené tzv. torzné kyvadlo. Ide o analógiu lineárneho oscilátora, kde dochádza k periodickému skrúteniu nosného vlákna. Určte vlastnú frekvenciu kmitov torzného kyvadla. Pomôcka: analógiou Hookovho zákona $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$ je v tomto prípade výraz pre silový moment $\mathbf{M} = -\kappa\boldsymbol{\theta}$.
- 1.12 Závažie sa pohybuje pod vplyvom potenciálu $V(x) = V_0 \cosh\left(\frac{x}{x_0}\right)$, kde V_0 a x_0 sú konštanty.
- Nájdite rovnovážnu polohu.
 - Ukážte, že frekvencia malých kmitov okolo tejto polohy je rovná frekvencii kmitov rovnakého závažia pripevneného k pružine s tuhosťou V_0/x_0^2 .
- 1.13 Odhadnite frekvenciu vlastných kmitov molekuly HCl. Závislosť interakčnej (po-

tenciálnej) energie na vzdialenosti je približne popísaná vzťahom:

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{B}{r^9}.$$

Rovnovážna vzdialenosť atómov H a Cl je $R = 0.13$ nm. Návod: Zamyslite sa nad hmotnosťami atómov H a Cl. Je nutné uvažovať o sústave dvoch telies? Vykreslite si funkciu zodpovedajúcu zadanej potenciálnej energii. Má minimum? Akej vzdialenosti toto minimum zodpovedá fyzikálne? Aký funkčný tvar by mala mať potenciálna energia v okolí minima, aby bolo možné kmity molekuly popísať jednoduchým modelom závažia na pružine?

2 Tlmené a budené kmity

- 2.1 Štandardný RLC obvod má v čase $t = 0$ s na kondenzátore náboj Q_0 a prúd v obvode je $I_0 = 0$ A. Vypočítajte časový priebeh náboja na kondenzátore. Uvažujte slabé (podkritické) tlmenie: za aký čas klesne náboj na polovičnú hodnotu? Pre prípad silného (nadkritického) tlmenia dokážte, že systém prejde rovnovážnou polohou najviac jedenkrát. Nájdite, pre aké počiatočné podmienky ňou prejde práve jedenkrát a pre aké vôbec.
- 2.2 Závažie o hmotnosti 100 g je zavesené na pružine s tuhosťou 20 N/m. Celý systém je umiestnený v odporovom prostredí, kde proti pohybu pôsobí odporová sila úmerná rýchlosti, ktorej veľkosť je $F_o = -bv$, $b = 1$ Ns/m. Nájdite výchylku a rýchlosť závažia v čase $t_1 = 0.05$ s, ak počiatočná výchylka je $x(t = 0) = 20$ mm a počiatočná rýchlosť $v(t = 0) = 0$ m/s.
- 2.3 Uvažujte RLC obvod, do ktorého je zapojený striedavý zdroj napätia $U_o \cos(\Omega t)$. Vypočítajte časovú strednú hodnotu výkonu dodaného zdrojom do obvodu (závisí len na U_o, Ω a parametroch obvodu R, L, C). Pri výpočte časovej strednej hodnoty berte do úvahy periodické riešenie zodpovedajúce ustálenému stavu, teda po odznení prechodového javu.
- 2.4 Nájdite časový vývoj náboja na kondenzátore v RLC obvode budenom dvoma zdrojmi harmonického napätia s amplitúdami U_{01}, U_{02} , uhlovými frekvenciami Ω_1, Ω_2 a počiatočnými fázami φ_1, φ_2 .
- 2.5 Zistite, aká závislosť budiacej sily vedie k lineárnej závislosti výchylky tlmeného oscilátoru na čase.
- 2.6 Prostredie obsahujúce lokálne elektrické náboje sa v elektrickom poli polarizuje a modifikuje vonkajšie pole. Polarizácia (definovaná ako hustota dipólového momentu) je v jednoduchom izotropnom prípade popísaná skalárnou susceptibilitou χ , môžeme predpokladať $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$. Uvažujme o prostredí, ktoré je tvorené navonok neutrálnymi dvojicami atómového jadra a elektrónu (jedného na atóm)

o koncentrácii n . Ak na prostredie pôsobí harmonické elektrické pole $\mathbf{E}_0 e^{i\Omega t}$, začnú elektróny vykonávať kmitavý pohyb okolo jadier, ktoré na nich pôsobia vratnou silou s efektívnou tuhosťou k . Prostredie sa takto polarizuje. Nájdite susceptibilitu χ prostredia v závislosti na frekvencii a amplitúde budiaceho poľa (tlmenie zanedbajte). Vo výpočtoch nahrad'te efektívnu tuhosť, ktorá nie je dobre meraateľná, uhlovou frekvenciou vlastných kmitov podľa vzťahu $k = m_e \omega_0^2$.

- 2.7* Určte časovú závislosť výchylky lineárneho harmonického oscilátora s tlmením γ , ktorý je budený periodickou silou obdĺžnikového tvaru:

$$F(t) = F_0 \operatorname{sgn} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{T} nt \right) \right),$$

inak povedané

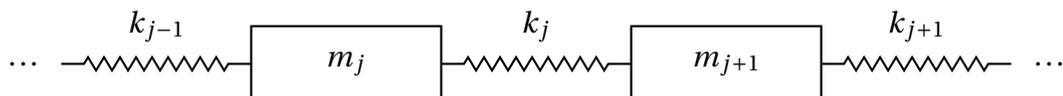
$$F(t) = \begin{cases} +F_0, & \text{pre } t \in \left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right) + nT \\ -F_0, & \text{pre } t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right) + nT \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$$

3 Viazané oscilátory

- 3.1 Uvažujte sústavu na obrázku. Vypočítajte frekvencie normálnych vibračných módov sústavy (normálny mód je taký, kde obe telesá kmitajú s rovnakou frekvenciou ω).



- 3.2* Uvážte nasledujúcu sústavu (jedná sa o jednoduchý jednorozmerný model vibrácií v pevných látkach): N závaží o hmotnosti m spojených pružinami s tuhosťou k . Zostavte pohybovú rovnicu pre j -té teleso, dosad'te riešenie $e^{iqja} e^{i\omega t}$ (a je vzdialenosť medzi závažiami, q je vlnový vektor) a určte tzv. disperznú závislosť $\omega = \omega(q)$. Ako závisí počet povolených q (počet riešení) na počte závaží? Bonus: uvážte periodické okrajové podmienky $x_j = x_{N+j}$. Čo z toho vyplýva pre povolené vlnové vektory q ?



4 Mechanické a elektromagnetické vlnenie

- 4.1 Ukážte, že obecným riešením vlnovej rovnice je $u(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct)$ kde f a g sú bližšie nešpecifikované funkcie.

4.2 Pre zadané funkcie $\psi(z, t)$ zistite, či vyhovujú vlnovej rovnici a ak áno, určte fázovú rýchlosť:

(a) $\psi(z, t) = \sin(2\pi z/a + 2\pi t/b)$, [áno, $v_f = a/b$]

(b) $\psi(z, t) = (az - bt)^2$, [áno, $v_f = b/a$]

(c) $\psi(z, t) = \frac{1}{a^2 z^2 + b}$, [nie]

(d) $\psi(z, t) = a \sin(az^2 - bt^2)$, [nie]

(e) $\psi(z, t) = A \exp(-(a^2 z^2 + b^2 t^2 - 2abzt))$, [áno, $v_f = b/a$]

(f) $\psi(z, t) = 5 \times 10^{-3} \text{ m} \times \cos\left(400 \text{ s}^{-1} \left(t + \frac{x}{1000 \text{ ms}^{-1}}\right)\right)$ – navyiac určte: amplitúdu, smer šírenia, fázovú rýchlosť, vlnový vektor, vlnóčet, vlnovú dĺžku, periódu, frekvenciu, uhlovú frekvenciu, maximálnu rýchlosť $d\psi(z, t)/dt$ a maximálne zrýchlenie $d^2\psi(z, t)/dt^2$. [áno, $A = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$, smer proti smeru osi x , $v_f = 1000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $k = 0.4 \text{ m}^{-1}$, $v = 2.5 \text{ m}$, $\lambda = 5\pi \text{ m}$, $T = 5\pi \cdot 10^{-3} \text{ s}$, $f = \frac{200}{\pi} \text{ Hz}$, $\omega = 400 \text{ rad/s}$, $v_{\max} = 2 \text{ m/s}$, $a_{\max} = 800 \text{ m/s}^2$]

4.3 Určte pomer rýchlostí zvuku vo vodíku a v hélíu za rovnakej teploty. Porovnajtie so strednou rýchlosťou molekúl $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$. [$v_{\text{He}}/v_{\text{H}_2} \doteq 0.77$, $v_f < \sqrt{\langle v^2 \rangle}$]

4.4 Ukážte, že polia \mathbf{E} a \mathbf{B} splňujúce vákuové Maxwellove rovnice taktiež vyhovujú vlnovej rovnici a určte fázovú rýchlosť elektromagnetických vln.

4.5 Uvažujte rovinnú monochromatickú vlnu, kde zložky elektrickej intenzity a magnetickej indukcie majú tvar:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t).$$

Z vákuových Maxwellových rovníc vyvod'te podmienky pre \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 , \mathbf{k} a ω . [$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$, $\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0$, $\omega \mathbf{E}_0 = -c^2 \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0$]

4.6 V prípade izotropného, nevodivého média (t.j. $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ a $\mathbf{J}_{\text{free}} = 0$) je možné za istých predpokladov vyjadriť polarizáciu ako funkciu elektrického poľa:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi(E) \mathbf{E},$$

kde $\chi(E) = \chi_1 + \chi_2 E + \chi E^2 + \dots$. Členy vyššieho rádu v tomto rozvoji (χ_2, χ_3, \dots) sú typicky malé, do úvahy teda vezmeme iba prvý člen χ_1 . Ukážte, že v tomto prípade prejde vlnová rovnica

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}_{\text{free}}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{P})$$

do tvaru

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 (1 + \chi_1) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

5 Grupová rýchlosť, šírenie elmag. žiarenia v materiále

5.1 Vypočítajte fázovú a grupovú rýchlosť pre vlny šíriace sa v prostredí s disperznou závislosťou $\omega = ck(1 + \frac{1}{2}\alpha k^2)$. [$v_f = c(1 + \frac{1}{2}\alpha k^2)$, $v_g = c(1 + \frac{3}{2}\alpha k^2)$]

5.2 Skladanie vln. Sčítajte dve vlny v nasledujúcich prípadoch:

- (a) Rovnaká frekvencia, rovnaký smer, rôzna amplitúda a fáza.
- (b) Rovnaká frekvencia, opačný smer, rôzna amplitúda.
- (c) Rôzna frekvencia, rovnaký smer, rovnaká amplitúda.

5.3 Slnečné žiarenie má intenzitu $I = 1.4 \times 10^3 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Určte amplitúdu elektrického a magnetického poľa za predpokladu, že žiarenie je možné vyjadriť ako rovinnú vlnu. [$E_0 = \sqrt{2c\mu_0 I} = 1.03 \times 10^3 \text{ V/m}$, $B_0 = E_0/c = 3.4 \times 10^{-6} \text{ T}$]

5.4 Uvažujte o prostredí bez priestorovej disperzie $\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon(\omega)$ a $\sigma(\mathbf{k}, \omega) = \sigma(\omega)$. Nájdite vzťah medzi vlnovým vektorom rovinatej vlny a komplexnou dielektrickou funkciou (druhou mocninou komplexného indexu lomu) definovanou vzťahom:

$$[N(\omega)]^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\epsilon(\omega) + i \frac{\sigma(\omega)}{\omega} \right).$$

$$[\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} N^2(\omega)]$$

5.5 Uvažujte rovinnú, homogénnu elektromagnetickú vlnu v GaAs s energiou fotónu $E = 1.5 \text{ eV}$ a $E = 2.0 \text{ eV}$. Index lomu GaAs je $n = 3.66 + 0.88i$ pre $E = 1.5 \text{ eV}$ a $n = 3.88 + 0.203i$ pre $E = 2.0 \text{ eV}$. Určte vlnovú dĺžku, vzdialenosť na ktorej poklesne amplitúda $1/e$ -krát a reálnu a imaginárnu časť komplexnej dielektrickej funkcie. [1.5 eV : $\lambda = 226 \text{ nm}$, $d = 75 \text{ nm}$, $\epsilon = 12.62 + i6.44$; 2 eV : $\lambda = 160 \text{ nm}$, $d = 243 \text{ nm}$, $\epsilon = 15.01 + i1.575$]

5.6 Určte fázovú a grupovú rýchlosť pre superpozíciu dvoch rovinných vln v plazme s disperziou $n(\omega) = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2} < 1$. [$v_f \cong \frac{c}{n(\omega)}$, $v_g \cong n(\omega)c$]

5.7 Index lomu ideálneho vodiča je

$$(n + i\kappa)^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{i\omega\gamma + \omega^2}.$$

Odvod'te tento vzťah pomocou jednoduchého modelu N voľných elektrónov v objemovej jednotke, ktorých pohyb je tlmený. Ukážte, že daný vzťah je možné dostať aj ako limitu vzťahu pre Lorentzov model dielektrika. (Toto mimo iné ukazuje, že člen $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}$ fyzikálne reprezentuje prúdovú hustotu, rovnako ako \mathbf{J}_{free} .)

5.8 Odvod'te Sellmeierov vzťah

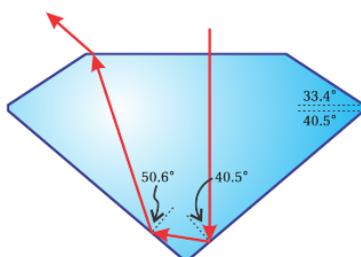
$$n^2 = 1 + \frac{A\lambda_{\text{vac}}^2}{\lambda_{\text{vac}}^2 - \lambda_{0,\text{vac}}^2},$$

pre plyn so zanedbateľnou absorpciou (tj. $\gamma = 0$ ďaleko od rezonancie ω_0) kde $\lambda_{0,\text{vac}}^2$ zodpovedá frekvencii ω_0 a A je konštanta. Ako východzí bod vám poslúži vzťah z Lorentzovho modelu dielektrika

$$(n + i\kappa)^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - i\omega\gamma - \omega^2}.$$

6 Odraz a lom na rozhraní

- 6.1 V hĺbke $h = 60$ cm pod hladinou je umiestnený bodový zdroj svetla. Určte tvar a rozmer tej časti povrchu vody, z ktorej svetlo vystupuje z vodnej hladiny do vzduchu. [kruh s polomerom $R \doteq 68$ cm]
- 6.2 Svetlo dopadá zo vzduchu kolmo na neznámy materiál. Odrazivosť rozhrania pre nepolarizované svetlo je 0.04. Pod akým uhlom musí svetlo dopadať, aby odrazené svetlo bolo lineárne polarizované? O aký materiál by sa mohlo jednať? [56.3°, sklo]
- 6.3 Lineárne polarizované svetlo dopadá zo vzduchu na rozhranie sklo/vzduch (index lomu skla je 1.73) pod uhlom 60°. Rovina polarizácie zvierá s rovinou dopadu uhol 30°. Aká časť intenzity dopadajúceho svetla sa na rozhraní odrazí? [6.25 %]
- 6.4 Diamanty majú index lomu $n = 2.42$. Veľký index lomu vedie k tomu, že úplný vnútorný odraz môže nastať pre relatívne malé uhly dopadu. Na obrázku je vyobrazená dráha lúča svetla, ktorý sa odrazí od dvoch vnútorných rozhraní diamant/vzduch. Aký je kritický uhol pre diamant? Aká časť svetla sa odrazí pri dvoch vnútorných odrazoch, ak sú uhly dopadu $\theta_1 = 40.5^\circ$ a $\theta_2 = 50.6^\circ$? Pre s-polarizáciu nájdite fázový posuv pri odrazoch ϕ_s , pričom $r_s = |r_s|e^{i\phi_s}$. [$\theta_c \doteq 24.4^\circ$, odrazí sa 100% svetla (úplný odraz), $\phi_s(1) = -66.76^\circ$, $\phi_s(2) = -91.6^\circ$]

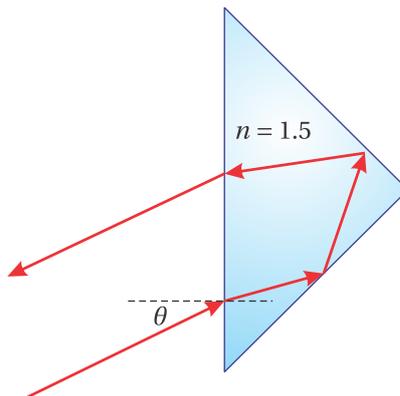


Obr. 2: Úplný odraz v briliante. (J. Peatross, M.Ware: Physics of Light and Optics)

- 6.5 Ukážte analyticky, že $R_s + T_s = 1$ (a podobne pre p-polarizáciu).

$$R_{s,p} = |r_{s,p}|^2, \quad T_{s,p} = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} |t_{s,p}|^2.$$

- 6.6 Uvažujte Fabry-Perotov interferometer s odrazivosťou $R = 0.85$. Vypočítajte f (finesse), minimálny rozlíšiteľný rozdiel vlnových dĺžok $\Delta\lambda_{\text{FWHM}}$ a rozlišovaciu schopnosť $RP = \frac{\lambda_{\text{vac}}}{\Delta\lambda_{\text{FWHM}}}$. [$f = 19.3$, $\Delta\lambda_{\text{FWHM}} = 0.00065 \text{ nm}$, $RP = 772000$]
- 6.7 Uvažujte Fabry-Perotov interferometer s $R = 0.9$, $\lambda_{\text{vac}} = 500 \text{ nm}$, $n = 1$ a $d = 5 \text{ mm}$. Predpokladajte, že maximum priepustnosti nastáva pre uhol $\theta = 0$. Aký je najbližší uhol, pre ktorý poklesne priepustnosť na polovicu maximálnej hodnoty? Môžete použiť rozvoj pre malé uhly $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$. [0.074°]
- 6.8 Na obrázku 3 je tzv. kútový odrážač, ktorý odráža svetlo paralelne s dopadajúcim zväzkom svetla. Toto platí aj v prípade, že smer dopadajúceho svetla nie je kolmý na prvé rozhranie vzduch/sklo.
- (a) Aká je maximálna hodnota vstupného uhlu θ tak, aby došlo k úplnému odrazu na oboch vnútorných povrchoch skla? Uvažujte index lomu 1.5 pre sklo a 1 pre okolitý vzduch. [4.8°]
- (b) Ak svetlo vstupuje aj vystupuje kolmo z hranolu, vypočítajte fázový rozdiel medzi s- a p-polarizovanou zložkou vystupujúceho svetla. [74°]



Obr. 3: Kútový odrážač. (J. Peatross, M.Ware: Physics of Light and Optics)

7 Polarizácia

- 7.1 Máme zdroj nepolarizovaného svetla, lineárny polarizátor a elektronickú polvlnnú doštičku. Elektronická polvlnná doštička má schopnosť priložením napätia meniť uhol natočenia jej rýchlej osi v rozsahu $\theta \in [0, \pi/4]$. Ukážte, že s vyššie popísanými optickými elementmi je možné zostaviť sústavu schopnú elektronicky prepínať medzi lineárnou polarizáciou horizontálnou a vertikálnou. Polvlnná doštička je reprezentovaná maticou

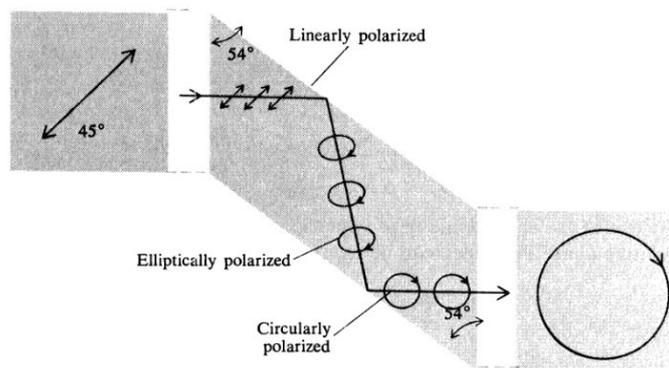
$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix},$$

kde θ je uhol natočenia rýchlej osi od osi x.

- 7.2 Optický izolátor je optický prvok zaist'ujúci, že sa svetlo po odraze nemôže vrátiť späť do zdroja. Je zložený zo štvrt'vlnnej doštičky (rychlá os pozdĺž horizontálnej osi) a jedného lineárneho polarizátoru (priepustná os zvierajúca uhol 45° s horizontálnou osou). Inak povedané, svetlo zo zdroja prejde optickým izolátorom, odrazí sa, ide opäť k optickému izolátoru, kde je ale tentokrát pohltené. Zistite, v akom poradí musia ísť vyššie spomenuté prvky za sebou, aby izolátor fungoval popísaným spôsobom? [lin. polarizátor, za ním štvrt'vlnná doštička]
- 7.3 Uvažujte optickú sústavu, ktorá pozostáva z troch lineárnych polarizátorov: prvý polarizátor s osou v smere x , druhý polarizátor s osou pod uhlom θ_x voči osi x a tretí polarizátor s osou v smere y . Vypočítajte intenzitu svetla po prechode optickou sústavou, ak vstupujúce svetlo je nepolarizované. Aký je výsledný polarizačný stav? [$I' = \frac{I_0}{8} \sin^2(2\theta_x)$, lin. pol. v smere y]
- 7.4 Akú hrúbku musí mať štvrt'vlnná doštička z kremeňa pre vlnovú dĺžku $\lambda = 600$ nm? Indexy lomu pre túto vlnovú dĺžku sú $n_o = 1.5442$ pre ordinárny smer a $n_e = 1.5533$ pre extraordinárny smer.
- 7.5 Predpokladajte, že lineárne polarizované svetlo je orientované pod uhlom α voči horizontálnej osi x . Aká časť intenzity svetla prejde lineárnym polarizátorom s priepustnou osou v smere y ? Ako sa zmení odpoveď, ak je dopadajúce svetlo kruhovo polarizované? [$\sin^2(\alpha)$, 0.5]
- 7.6 Pravotočivý kruhový polarizátor je možné skonštruovať pomocou štvrt'vlnnej doštičky (rychlá os $\theta = 45^\circ$) nasledovanej lineárnym polarizátorom orientovaným vertikálne, za ktorým sa umiestni ešte jedna štvrt'vlnná doštička, tentokrát s rýchlosťou osou $\theta = -45^\circ$. Vypočítajte Jonesovu maticu pre tento systém a ukážte, že pravotočivé kruhovo polarizované svetlo sústavou prejde a ľavotočivé je pohltené.
- $$\left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \right]$$
- 7.7 Fresnel vymyslel metódu výroby kruhovo polarizovaného svetla z lineárne polarizovaného svetla. Na obrázku 4 je vyobrazený Fresnelov sklenený hranol, na ktorý dopadá svetlo polarizované lineárne pod uhlom 45° voči prednej hrane hranola. Svetlo sa pri priechode hranolom dvakrát úplne odrazí a vystúpi z hranola. Pri každom úplnom odraze dochádza k fázovému rozdielu Δ medzi s- a p-polarizovanou zložkou svetla, ktorý je rovný $\pi/4$. Po dvoch odrazoch sa dosiahne fázový rozdiel $\pi/2$, teda vystupujúce svetlo je kruhovo polarizované. Ukážte, že hranol má popísanú funkciu, ak je vrcholový uhol hranolu približne 54° .
- 7.8 Lineárny polarizátor rotuje s uhlovou frekvenciou ω medzi dvoma skríženými lineárnymi polarizátormi. Ukážte, že intenzita vystupujúceho svetla je modulovaná s frekvenciou rovnou štvornásobku frekvencie rotácie polarizátoru ω

$$I = \frac{I_1}{8} (1 - \cos(4\omega t)),$$

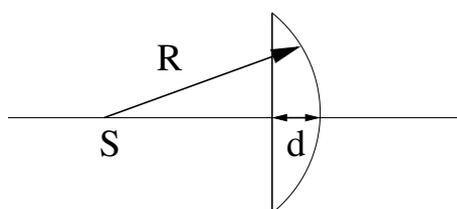
kde I_1 je intenzita svetla vystupujúceho z prvého polarizátoru a I je konečná intenzita vystupujúceho svetla.



Obr. 4: Fresnelov hranol. (G. Fowles: Introduction to modern optics.)

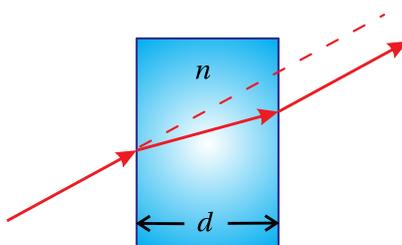
8 Geometrická optika

- 8.1 Vypočítajte ohniskovú vzdialenosť ploskovypuklej šošovky s polomerom lámavej plochy R , indexom lomu n a hrúbkou d – vid' obrázok 5. [$f = R/(n - 1)$]



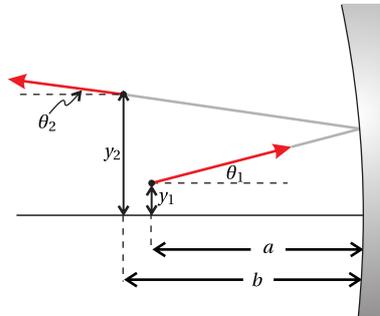
Obr. 5: Ploskovypuklá šošovka.

- 8.2 Nájdite polohu hlavných rovín tlustej šošovky tvaru gule o polomere R a indexe lomu n . Akú podmienku musí spĺňať index lomu, aby ležali ohniská vo vnútri gule? [obe hlavné roviny prechádzajú stredom gule ($p_1 = p_2 = -R$), ohniská vo vnútri gule pre $n < 1$ alebo $n > 2$]
- 8.3 Odvod'te optickú maticu skleneného kváдру o šírke d (vid' obrázok 6). Nápoveda: použite matice pre lom na zakrivenom rozhraní, pričom polomer krivosti pošlite do nekonečna. $\begin{bmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



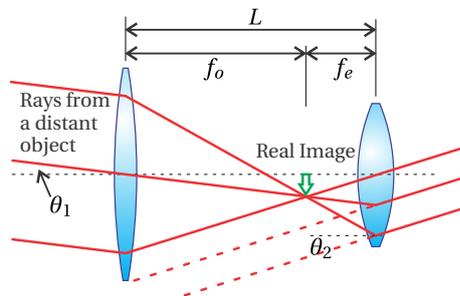
Obr. 6: Sklenené okno. (J. Peatross, M. Ware: Physics of Light and Optics)

- 8.4 Lúč svetla popísaný vektorom $\begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$ sa šíri na vzdialenosti a , odrazí sa od zrkadla a prejde vzdialenosť b . Nájdite výsledný lúč $\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$. $\left[\begin{pmatrix} (1 - 2b/R)y_1 + (a + b - 2ab/R)\theta_1 \\ (-2/R)y_1 + (1 - 2a/R)\theta_1 \end{pmatrix} \right]$



Obr. 7: Zrkadlo. (J. Peatross, M. Ware: Physics of Light and Optics)

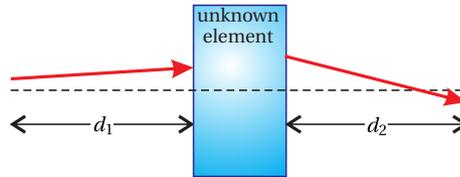
- 8.5 Teleskop pozostáva z dvoch šošoviek – objektívu s ohniskovou vzdialenosťou f_o a okuláru s ohniskovou vzdialenosťou f_e (viď obrázok 8). Funkciou teleskopu je zobrazit' lúče dopadajúce pod uhlom θ_1 na odpovedajúce lúče vysupujúce pod väčším uhlom θ_2 , pričom θ_2 má závisieť iba na θ_1 , nie na mieste, kde lúč do teleskopu vstupuje (teda nie na súradnici y_1). Vypočítajte uhlové zväčšenie teleskopu. $[-f_o/f_e]$



Obr. 8: Schéma teleskopu. (J. Peatross, M. Ware: Physics of Light and Optics)

- 8.6 Odvod'te optickú maticu pre tlustú šošovku vyrobenú z materiálu n_2 obklopenú tekutinou s indexom lomu n_1 . Polomery lámavých plôch sú R_1 , R_2 a hrúbka šošovky je d . $\left[\begin{pmatrix} 1 + \frac{d}{R_1} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) & d \frac{n_1}{n_2} \\ - \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{d}{R_1 R_2} \left(2 - \frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right) & 1 - \frac{d}{R_2} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \end{pmatrix} \right]$
- 8.7 Ukážte, že optická matica pre tlustú šošovku prejde na maticu popisujúcu tenkú šošovku, ak sa hrúbka šošovky pošle do nuly. Ďalej použite maticu pre tlustú šošovku na odvodenie optickej matice pre sklenené okno (polomery lámavých plôch sú nekonečné).
- 8.8 Pomocou optických matic ukážte, že tlustá šošovka zodpovedá umiestneniu okna medzi dve tenké šošovky.

- 8.9 Zložitý optický element je reprezentovaný neznámou optickou maticou so zložkami A, B, C, D (viď obrázok 9). Objekt umiestnený vo vzdialenosti d_1 pred optickú sústavu vytvorí obraz vo vzdialenosti d_2 za sústavou. Predpokladajte, že ak $d_1 = l$, tak $d_2 = 2l$. Taktiež, ak $d_1 = 2l$, tak $d_2 = 3l/2$ so zväčšením $-1/2$. Aké zložky má optická matica $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$? [$A = 1, B = l, C = -1/l, D = 0$]



Obr. 9: Neznámy optický element. (J. Peatross, M. Ware: Physics of Light and Optics)

- 8.10 Uvažujte tlustú šošovku (obr. 10), kde $d = 5$ cm, $R_1 = 5$ cm, $R_2 = -10$ cm, $n = 1.5$. Vypočítajte optickú maticu pre túto šošovku. Kde sa nachádzajú hlavné roviny šošovky a aká je jej efektívna ohnisková vzdialenosť f_{eff} ?

$$\left[\begin{pmatrix} 2/3 & 10/3\text{cm} \\ -2/15\text{cm}^{-1} & 5/6 \end{pmatrix}, p_1 = -5/4\text{cm}, p_2 = -5/2\text{cm}, f_{\text{eff}} = 7.5\text{cm} \right]$$

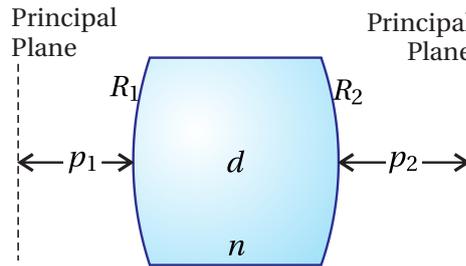


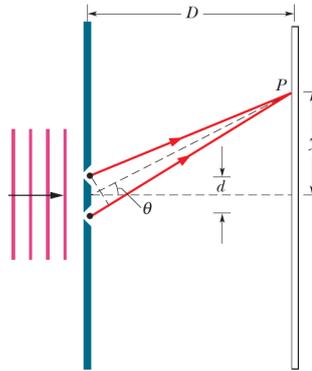
Figure 9.31

Obr. 10: Tlustá šošovka. (J. Peatross, M. Ware: Physics of Light and Optics)

9 Interferencia a difrakcia

- 9.1 Určte odrazivosť antireflexnej tenkej vrstvy. Substrát má index lomu n , vrstva má index lomu $n_1 = \sqrt{n}$ a hrúbka vrstvy je $d = \frac{\lambda}{4\sqrt{n}}$. [$R = \left| \frac{(1-\sqrt{n})^2(1+\sqrt{n})}{(1+\sqrt{n})^2-\sqrt{n}(1-\sqrt{n})^2} \right|^2$]
- 9.2 Uvažujte difrakčnú mriežku so 100 vrypmi/mm. Postupne sú použité dva zdroje s vlnovými dĺžkami λ_1 a λ_2 . Na tienidle vzdialenom 1 m sa prekrýva tretie maximum prvého zdroja so štvrtým maximum druhého. Určte λ_2 , ak je $\lambda_1 = 800$ nm. Ako ďaleko na tienidle sú od seba vzdialené druhé maximá? [$\lambda_2 = 600$ nm, $\Delta x = 0.04$ m]
- 9.3 Na obrázku je štandardné usporiadanie dvojštrbinového experimentu. Tienidlo je od štrbiny vzdialené $D = 4$ m, vzdialenosť y je 20.5 cm, vzdialenosť štrbín je

$d = 4.5 \mu\text{m}$ a vlnová dĺžka svetla $\lambda = 580 \text{ nm}$. Zistite, v akej časti interferenčného obrazca bod P leží – určte index minima/maxima na ktorom leží, eventuálne indexy minima a maxima medzi ktorými leží. Aký je pomer intenzity I_P v bode P k intenzite v prostriedku (na osi) obrazca I_{cen} ? [P leží medzi nultým maximom a prvým minimom, $I_P/I_0 \doteq 0.1$]



Obř. 11: Dvojštrbinový experiment. (Halliday, Resnick, Walker: Physics)

- 9.4 Sklenená šošovka s indexom lomu $n_2 = 1.5$ je pokrytá antireflexnou vrstvou MgF_2 s indexom lomu $n_1 = 1.38$. Určte minimálnu hrúbku vrstvy d_{min} tak, aby sa minimalizoval spätný kolmý odraz do vzduchu ($n_0 = 1$). Výpočet vykonajte pre monochromatický zväzok s vlnovou dĺžkou ze stredy viditeľnej oblasti $\lambda = 550 \text{ nm}$. [$d_{\text{min}} = 100 \text{ nm}$]
- 9.5 Vypočítajte intenzitný profil interferenčného obrazca dvojštrbiny, pričom neuvažujte konečnú šírku štrbín. [$I = I_0 \cos^2(\pi d \sin \theta / \lambda)$]
- 9.6 Nájdite polomer 1. Fresnelovej zóny. [$R_1 \approx \sqrt{l\lambda}$]
- 9.7 Majme difrakčný otvor s priemerom $d = 1 \text{ mm}$, vzdialenosť zdroja od difrakčného tienidla $l' = 5 \text{ m}$ a vzdialenosť difrakčného a pozorovacieho tienidla postupne $l = 10 \text{ cm}$, 50 cm a 5 m . Sú pre vlnovú dĺžku $\lambda = 500 \text{ nm}$ splnené podmienky Fraunhoferovej aproximácie? [nie, nie, áno]
- 9.8 Pre difrakciu na kruhovom otvore s polomerom R je rozloženie intenzity na pozorovacom tienidle úmerné Besselovej funkcii, $I(x, y) \sim \left[2\pi R^2 \frac{J_1(k\rho R/l)}{k\rho R/l} \right]^2$, kde $\rho = \sqrt{(x + x_s l/l')^2 + (y + y_s l/l')^2}$, x_s, y_s sú súradnice zdroja, x, y sú súradnice na pozorovacom tienidle a vzdialenosti l, l' sú popísané v predchádzajúcom príklade. Besselova funkcia J_1 má prvý nulový bod (zodpovedá minimu intenzity) pre argument rovný približne 3.83, v nule má maximum. Dva zdroje svetla budeme považovať za rozlíšiteľné, ak hlavné maximum prvého zdroja bude ležať v prvom minime druhého zdroja alebo ďalej. Nájdite podmienku rozlíšiteľnosti. [ak $y_s = 0$, tak $x_s \geq 1.22 l' \lambda / 2R$]

9.9 Dokáže orol z výšky $h = 1$ km rozoznať myšie mlád'a dĺžky 5 cm v svetle o vlnovej dĺžke 600 nm? Predpokladajte, že rozlišovacia schopnosť orla je obmedzená jedine difrakciou svetla na zornici jeho oka s priemerom 5 mm. [nedokáže]

9.10 Jediná úzka štrbina má cez seba umiestnenú masku tak, že jej funkcia priepustnosti nie je schodová funkcia, ale kosínus $E(x', y', 0) = E_0 \cos(\pi x'/L)$ pre $-L/2 < x' < L/2$ a $E(x', y', 0) = 0$ inak. Vypočítajte intenzitu difrakčného obrazca vo Fraunhoferovej limite a kvalitatívne porovnajte s obrazcom od štrbiny so schodovým

profilom priepustnosti.
$$I(x) \sim \cos^2\left(\frac{kxL}{2z}\right) \left(\frac{1}{\frac{kx}{z} + \frac{\pi}{L}} - \frac{1}{\frac{kx}{z} - \frac{\pi}{L}}\right)^2$$

9.11 Aký je minimálny polomer šošovky teleskopu na to, aby dokázal rozlíšiť planétu podobnú Jupiteru (polomer orbity 8×10^8 km) od jej hviezdy, ak sú od Zeme vzdialené 10 svetelných rokov? [$R > 0.035$ m]

9.12 Vypočítajte intenzitu difrakčného obrazca od difrakčnej mriežky, ktorá je zložená z N obdĺnikových otvorov s rozmermi Δx , Δy navzájom vzdialenými h . Polohy otvorov sú

$$x'_n = \left(n - \frac{N+1}{2}\right)h, \quad y'_n = 0.$$

$$\left[I(x, y, z) = \frac{\sin^2\left(\frac{Nkhx}{2z}\right)}{\sin^2\left(\frac{khx}{2z}\right)} \left[I_0 \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\lambda^2 z^2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \Delta x}{\lambda z} x\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \Delta y}{\lambda z} y\right) \right] \right]$$

9.13 Ak na difrakčnú mriežku dopadá svetlo obsahujúce dve blízke vlnové dĺžky λ_1 a λ_2 , m -té maximá difrakčného obrazca budú v

$$x_1 = \frac{mz\lambda_1}{h} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{mz\lambda_2}{h}.$$

Tieto maximá sú vzdialené $\Delta x_\lambda \equiv x_2 - x_1 = \frac{mz}{h} \Delta\lambda$, kde $\Delta\lambda \equiv \lambda_2 - \lambda_1$. Povieme, že dva píky sú rozlíšiteľné, ak sa ich vzdialenosť rovná šírke píku $\Delta x_\lambda = \Delta x_{\text{peak}}$. Použitím tejto podmienky ukážte, že rozlišovacia schopnosť mriežky je $RP \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$.

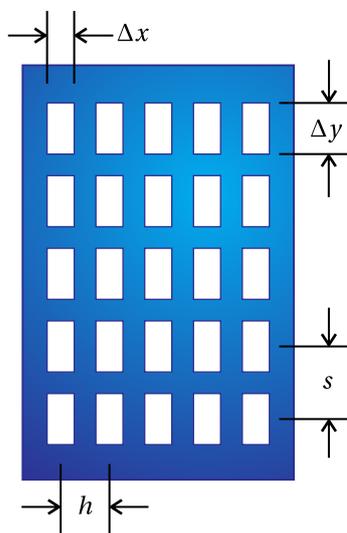
9.14 V noci 18. apríla 1775 bol poslaný signál z veže kostola Old North Church. Prijímateľom bol Paul Revere, ktorý bol vzdialený 1.8 míle od kostola. Dohodnutý signál bol "jeden ak po zemi, dva ak po mori". Ak mali v tme Paulove zrenice priemer 4 mm, aká bola minimálna vzdialenosť lampiónov tak, aby mohol správne interpretovať signál? Prepodkladajte, že prevažujúca vlnová dĺžka v spektre svetla lampiónov je 580 nm. Index lomu sklovca v oku na výsledok nemá vplyv. [0.51 m]

9.15 Rovinná vlna dopadá na difrakčnú mriežku zloženú z N^2 rovnomerne rozložených otvorov o rozmeroch Δx , Δy (viď obrázok 12). Polohy otvorov sú

$$x_n = h\left(n - \frac{N+1}{2}\right) \quad \text{a} \quad y_n = s\left(n - \frac{N+1}{2}\right).$$

Nájdite a vykreslite difrakčný obrazec vo Fraunhoferovej limite.

$$I(x, y, z) = \frac{\sin^2\left(\frac{Nkx}{2z}\right) \sin^2\left(\frac{Nky}{2z}\right)}{\sin^2\left(\frac{kx}{2z}\right) \sin^2\left(\frac{ky}{2z}\right)} \left[I_0 \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\lambda^2 z^2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \Delta x}{\lambda z} x\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \Delta y}{\lambda z} y\right) \right]$$



Obr. 12: Dvojrozmerné pole otvorov. (J. Peatross, M. Ware: Physics of Light and Optics)