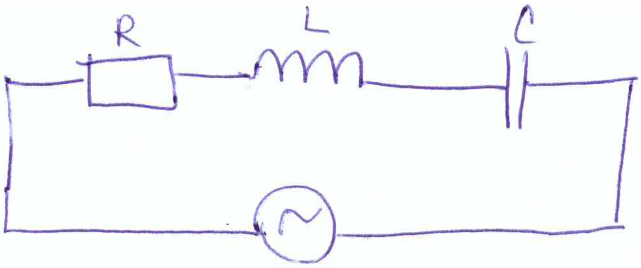

$U = U_0 \sin \Omega t$

$u_R = R i$

$|U_L| = \left| - L \frac{di}{dt} \right|$

$U_C = \frac{q}{C}$

$i = \frac{dq}{dt}$

(1)

1) $U = 0$:

vlastní tlumené kmity

$$|U_R| + |U_L| + U_C = 0$$

$$R i + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\gamma} \frac{dq}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} q = 0$$

$$q(t) = Q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) = Q_0 e^{-\frac{R}{2L} t} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t + \phi\right)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \ldots\ldots$$

2) $U = U_0 = \text{konst}$:

„konstantní vynucující síla"

$$R i + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = U_0$$

řešení tvaru $q(t) = Q_0 e^{-\frac{R}{2L} t} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t + \phi\right) + q_{part}$

předpoklad: $q_{part} = At + B$ dosadíme

$$R \frac{d q_{part}}{dt} + L \frac{d^2 q_{part}}{dt^2} + \frac{q_{part}}{C} = RA + L \cdot 0 + \frac{A}{C} t + \frac{B}{C}$$

t: $\frac{A}{C} = 0 \Rightarrow A = 0$

t^0: $\underbrace{RA}_{0} + \frac{B}{C} = U_0 \Rightarrow B = U_0 C$

$$q(t) = Q_0 e^{-\frac{R}{2L} t} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t + \phi\right) + \underbrace{C U_0}_{Q_{0}}$$

- Q_{0} je náboj na kondenzátoru, který získá kondenzátor přiložením napětí U_0
- tento náboj je v čase konstantní

3) $U = U_0 \sin \Omega t$ ... periodická vynucující síla, Ω obecná libovolná

~~řešení~~ rovnice: $Ri + L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{q}{C} = U_0 \sin \Omega t$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\gamma}\frac{dq}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} q = \frac{U_0}{L}\sin \Omega t$$

má řešení $q(t) = \underbrace{Q_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi)}_{\text{s časem se utlumí (podle R)}} + \underbrace{q_{part}}_{\text{s časem se neutlumí, uvidíme}}$

předp: $q_{part} = A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)$

$$\frac{dq_{part}}{dt} = A\Omega\cos(\Omega t) - B\Omega\sin(\Omega t)$$

$$\frac{d^2q_{part}}{dt^2} = -A\Omega^2\sin(\Omega t) - B\Omega^2\cos(\Omega t)$$

dosadíme do rovnice (stačí partikulární, protože $Q_0e^{-\gamma t}\cos(\omega t+\phi)$ je řešením homogenní rovnice, dalo by toto po dosazení nulu):

$$\frac{d^2q_{part}}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq_{part}}{dt} + \frac{1}{LC}q_{part} = \frac{U_0}{L}\sin(\Omega t)$$

$$-A\Omega^2\sin(\Omega t) - B\Omega^2\cos(\Omega t) + \frac{R}{L}A\Omega\cos(\Omega t) - \frac{R}{L}B\Omega\sin(\Omega t) + \frac{1}{LC}A\sin(\Omega t) + \frac{1}{LC}B\cos(\Omega t) = \frac{U_0}{L}\sin(\Omega t)$$

separujeme členy před $\sin(\Omega t)$ a $\cos(\Omega t)$:

$\sin(\Omega t)$: $-A\Omega^2 - \frac{R}{L}B\Omega + \frac{1}{LC}A = \frac{U_0}{L}$

$\cos(\Omega t)$: $-B\Omega^2 + \frac{R}{L}A\Omega + \frac{1}{LC}B = 0$

oddělíme A a B

$$A\left[\frac{1}{LC} - \Omega^2\right] - \frac{R}{L}\Omega B = \frac{U_0}{L}$$

$$A\frac{R}{L}\Omega + B\left[\frac{1}{LC} - \Omega^2\right] = 0$$

a řešíme např. sčítací metodou

$$A\left[\frac{1}{LC}-\Omega^2\right]-\frac{R}{L}\Omega B=\frac{U_0}{L} \qquad \Big/ -\frac{R}{L}\Omega$$

$$\frac{R}{L}\Omega A+B\left[\frac{1}{LC}-\Omega^2\right]=0 \qquad \Big/ \frac{1}{LC}-\Omega^2$$

$$\left[\frac{R^2}{L^2}\Omega^2+\left[\frac{1}{LC}-\Omega^2\right]^2\right]B=-\frac{U_0R}{L^2}\Omega$$

$$A\left[\frac{1}{LC}-\Omega^2\right]-\frac{R}{L}\Omega B=\frac{U_0}{L} \qquad \Big/ \left[\frac{1}{LC}-\Omega^2\right]$$

$$\frac{R}{L}\Omega A+B\left[\frac{1}{LC}-\Omega^2\right]=0 \qquad \Big/ \frac{R}{L}\Omega$$

$$\left[\Omega^2\frac{R^2}{L^2}+\left[\frac{1}{LC}-\Omega^2\right]^2\right]A=\frac{U_0}{L}\left[\frac{1}{LC}-\Omega^2\right]$$

od řešení $A\sin\Omega t+B\cos\Omega t$ chceš přejít k
$A_V\sin(\Omega t+\psi)$, takže

$$A_V\sin(\Omega t)\cos\psi+A_V\cos(\Omega t)\sin\psi=A\sin(\Omega t)+B\cos(\Omega t)$$

porovnáním členů u $\sin(\Omega t)$ a $\cos(\Omega t)$ dostaneme:

$$\left.\begin{aligned}A_V\cos\psi&=A\\A_V\sin\psi&=B\end{aligned}\right\}\Rightarrow \operatorname{tg}\psi=\frac{B}{A} \quad \text{... fáz. posun}$$

$$A_V^2=A^2+B^2 \quad \text{... výchylka}$$

vyjádříme oboje:

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{B}{A}=\frac{-\frac{\cancel{U_0}\Omega R}{\cancel{L}L}}{\frac{\cancel{U_0}}{\cancel{L}}\left[\frac{1}{LC}-\Omega^2\right]}=-\frac{\Omega\overbrace{\frac{R}{L}}^{2\gamma}}{\left[\underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}-\Omega^2\right]}$$

$$A_V^2=A^2+B^2=\frac{\frac{U_0^2}{L^2}\cancel{\left[\left[\frac{1}{LC}-\Omega^2\right]^2+\frac{\Omega^2R^2}{L^2}\right]}}{\left[\Omega^2\frac{R^2}{L^2}+\left[\frac{1}{LC}-\Omega^2\right]^2\right]^{\cancel{2}}}=\frac{\overbrace{\frac{U_0^2}{L^2}}^{\frac{F_{vyn\,max}}{m}}}{\left[\Omega^2(2\gamma)^2+(\omega_0^2-\Omega^2)^2\right]}$$

$$\boxed{A_V}=\frac{\frac{U_0}{L}}{\left[(2\gamma)^2\Omega^2+(\omega_0^2-\Omega^2)^2\right]^{1/2}}=\boxed{\frac{\frac{F_{vyn\,max}}{m}}{\sqrt{4\gamma^2\Omega^2+(\omega_0^2-\Omega^2)^2}}}\ !$$

hledaný výsledek

Rezonance nastává <=> $A_V = max$ pro určité $\Omega = \Omega_r$

$$\frac{dA_V}{d\Omega} = \frac{F_{vyn\,max}}{m}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{8p^2\Omega + 2(\omega_0^2-\Omega^2)\cdot 2\Omega}{\left(4p^2\Omega^2 + (\omega_0^2-\Omega^2)^2\right)^{3/2}} = 0$$

$$4\Omega\left[2p^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)\right] = 0$$

pominem-li $\Omega = 0$, pak $\Omega^2 = \omega_0^2 - 2p^2$

$$\boxed{\Omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2}}$$

a amplituda má velikost

$$A_r = \frac{\frac{F_{vyn\,max}}{m}}{\sqrt{4p^2(\omega_0^2-2p^2) + (\cancel{\omega_0^2} - \cancel{\omega_0^2} + 2p^2)^2}} = \boxed{\frac{\frac{F_{vyn\,max}}{m}}{2p\sqrt{\omega_0^2 - p^2}}}$$