Teoretická fyzika – Základy teoretické mechaniky – Příklady

Michal Lenc ï podzim 2013

1. Variaļní princip

PŚíklad 1. OdvoŅte SnellŢv zákon pro lom a odraz na rovinném rozhraní dvou prostŚedí, charakterizovaných indexy lomu n_1 a n_2.

PŚíklad 2. SpoļtĎte explicitnĎ úļinek vyjádŚený pomocí poļáteļních a koncových souŚadnic a poļáteļního a koncového ļasu pro jednorozmĎrné pŚípady, popsané Lagrangeovou funkcí

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \quad , \quad L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + g\,x \quad , \quad L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\,\omega^2}{2}x^2 \quad .$$

Návod: je výhodné psát Śešení ve tvaru

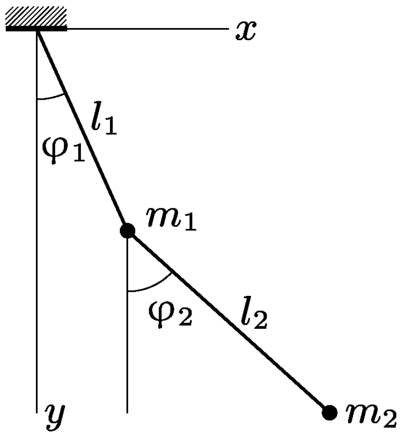
$$x = x_i\,\frac{t_f - t}{t_f - t_i} + x_f\,\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \quad , \quad x = x_i\,\frac{t_f - t}{t_f - t_i} + x_f\,\frac{t - t_i}{t_f - t_i} - \frac{g}{2m}\left(t_f - t\right)\left(t - t_i\right)$$

a

$$x = x_i\,\frac{\sin\omega\left(t_f - t\right)}{\sin\omega\left(t_f - t_i\right)} + x_f\,\frac{\sin\omega\left(t - t_i\right)}{\sin\omega\left(t_f - t_i\right)} \quad .$$

2. Kmity

PŚíklad 3. Pro dvojité rovinné kyvadlo v homogenním gravitaļním poli (znaļení na obrázku)



je Lagrangeova funkce

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{m_1 + m_2}{2}\,l_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}\,l_2^2\,\dot{\varphi}_2^2 + m_2\,l_1\,l_2\,\dot{\varphi}_1\,\dot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \\ & \left(m_1 + m_2\right)g\,l_1\cos\varphi_1 + m_2\,g\,l_2\cos\varphi_2 \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

Odvoďte a vyřešte Lagrangeovy rovnice za předpokladu malých kmitů ($\varphi_1 \ll 1, \varphi_2 \ll 1$).

Příklad 4. Určete Lagrangeovy rovnice pro soustavu popsanou Lagrangeovou funkcí

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{m\,\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \alpha\, x\, y \tag{2}$$

a najděte jejich řešení.

3. Pohyb v centrálním poli

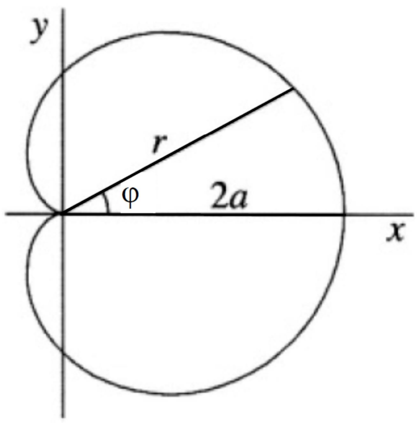
Pohyb se děje v rovině, Lagrangeova funkce v polárních souřadnicích je

$$L = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] - U\left(r\right) \quad . \tag{3}$$

Příklad 5. Odvoďte pro Lagrangeovu funkci (3) Lagrangeovy rovnice. Z těchto rovnic odvoďte zákon zachování momentu hybnosti a rovnici trajektorie

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = -\frac{m}{L^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}U\left(\frac{1}{u}\right) \quad , \quad u \equiv \frac{1}{r} \quad , \quad L = m\,r^2\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \text{konst.} \tag{4}$$

Příklad 6. Jaký tvar musí mít potenciální energie v (3), aby měla trajektorie tvar kardioidy $r = a\left(1 + \cos\varphi\right)$, $a = \text{konst.}$?



(Při řešení úlohy je vhodné užít rovnici trajektorie ve tvaru (4).)

Příklad 7. Najděte řešení pohybových rovnic s potenciální energií v (3) danou vztahem

$$U\left(r\right) = -\frac{\alpha}{r^2} \quad , \quad \alpha > 0 \quad .$$

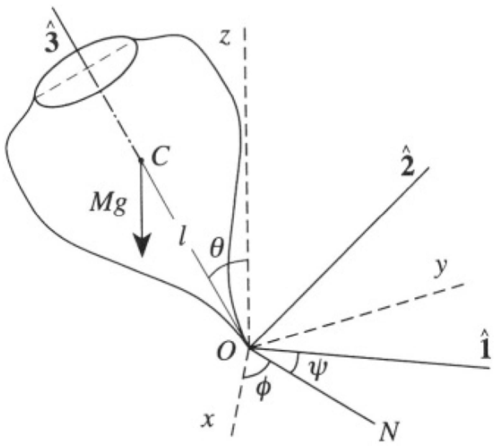
Příklad 8. Částice s energií E a momentem hybnosti vzhledem k počátku souřadné soustavy velikosti L vstupuje do oblasti přitažlivého potenciálového pole. Pohyb je popsán Lagrangeovou funkcí (3). Spočtěte hodnotu $r_{\min}$ největšího přiblížení k počátku.

4. Tuhé těleso

Příklad 9. Setrvačník v gravitačním poli (viz obrázek) má hmotnost M a jeho počáteční (nestabilní) poloha a rychlost naklánění osy jsou $\theta(0)=0$, $\dot\theta(0)=0$. Lagrangeova funkce je

$$L=\frac{1}{2}I_1\left(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta\right)+\frac{1}{2}I_3\left(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta\right)^2-M\,g\,l\cos\theta \quad , \tag{5}$$

kde θ,φ,ψ jsou Eulerovy úhly, I_1 a I_3 momenty setrvačnosti a l je vzdálenost středu hmotnosti C od pevného bodu rotace O.



Odvoďte nejprve integrály pohybu a pak ukažte, že časová závislost úhlu náklonu je dána vztahem (není potřeba vztah integrovat)

$$\dot\theta^2=\frac{4M\,g\,l}{I_1}\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{I_3^2\,\omega_3^2}{I_1^2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} \quad . \tag{6}$$

Ze vztahu (6) určete konečný úhel náklonu.

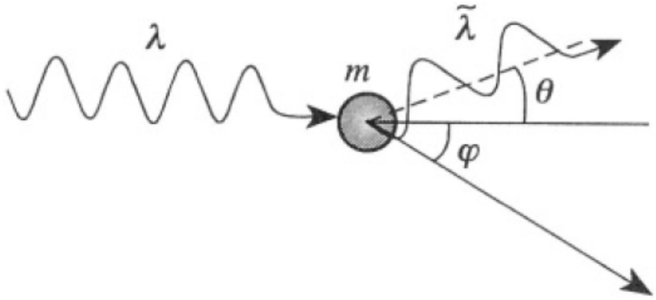
Příklad 10. Vyřešte Eulerovy rovnice pro symetrický setrvačník ($I_1=I_2\neq I_3$) a popište slovně výsledný pohyb.

5. Relativita

Příklad 11. Stanovte odchylku od vertikály pro těleso, volně padající z výšky h v homogenním gravitačním poli Země. Uvažujte pouze veličiny prvního řádu v úhlové rychlosti rotace Země.

Příklad 12. Proton s $\gamma=1\big/\sqrt{1-v^2/c^2}$ dopadá na proton v klidu $\gamma=1$. Po pružné srážce mají oba protony stejnou energii. Jaký je úhel mezi směry jejich pohybu?

Příklad 13. Odvoďte vztah pro změnu vlnové délky $\Delta\lambda = \tilde{\lambda} - \lambda$ při Comptonově rozptylu rentgenového záření.



Příklad 14. Elektron a positron s hmotnostmi m_e, které jsou vázány v positroniu (analogie vodíkového atomu, jen místo protonu je positron) s vazebnou energií E_b anihilují na dvojici fotonů. Spočtěte nejprve za předpokladu, že positronium jako celek je v klidu energii, hybnost, rychlost a frekvenci fotonů. Potom předpokládejme, že se positronium pohybuje rychlostí $\vec{v}$ od pozorovatele (obrázek). Spočtěte frekvenci a rychlost fotonu měřenou pozorovatelem.

Příklad 15. Skalární (komplexní) funkce ψ je řešením vlnové rovnice

$$g^{ik} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \, \partial x^k} = 0 \quad , \quad g^{ik} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \quad , \quad x^i = (ct, x, y, z) \quad . \tag{7}$$

Ukažte, že čtyřrozměrný vektor (hvězdička označuje komplexně sdruženou veličinu)

$$j^i = g^{ik} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x^k} \right)$$

splňuje rovnici kontinuity.

6. Pružná tělesa

Příklad 16. Určete složky tensoru napětí v kouli poloměru R, když deformace je způsobena pouze jejím vlastním gravitačním polem.

Příklad 17. Vypočtěte napětí v tenké kulové skořepině (s vnitřním poloměrem $R - \Delta R/2$ a vnějším poloměrem $R + \Delta R/2$, přitom $\Delta R \ll R$), s tlakem $p = 0$ uvnitř a tlakem p zevně

7. Tekutiny

PŚíklad 18. Urļete tvar povrchu nestlaļitelné kapaliny ve válcové nádobŊ rotující kolem své osy konstantní úhlovou rychlostí Ω.

PŚíklad 19. Rozepiġte ve válcových souŚadnicích do sloģek Navierovu ï Stokesovu rovnici pro nestlaļitelnou tekutinu

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \mathrm{grad}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p + \nu\, \Delta \vec{v} \quad . \tag{8}$$

PŚíklad 20. Jaký je rozdíl v rychlosti zvuku ve vzduchu, chápeme-li proces jako isotermický nebo adiabatický? Který popis je správný a proļ?