Orientovaný obsah

1

$x, y \in \mathbb{R}^2 \qquad P(x,y)$

1. $P(cx,y) = c\,P(x,y) \qquad P(x,cy) = c\,P(x,y)$

2. $P(x+v,y) = P(x,y) + P(v,y)$

   $P(x,y+z) = P(x,y) + P(x,z)$

3. $P(e_1,e_2) = 1$

4. $P(x,y) = -P(y,x) \Rightarrow P(x,x) = -P(x,x)$

   $2P(x,x) = 0 \qquad P(x,x) = 0$

Věta: Jestliže $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, tak $P(x,y) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$

Důkaz.

$$P(x,y) = P(x_1e_1 + x_2e_2,\ y_1e_1 + y_2e_2) = \text{[illegible]},\ y_1e_1 + y_2e_2) + P(x_2e_2,\ y_1e_1 \ldots$$

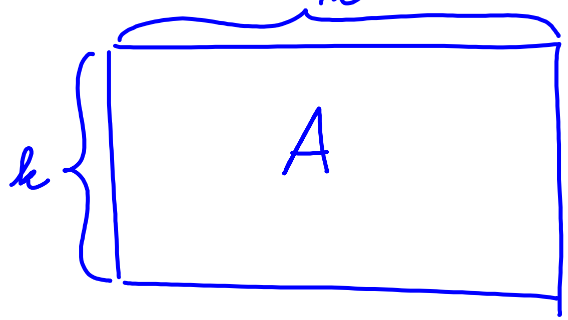
$$= P(x_1e_1, y_1e_1) + P(x_1e_1, y_2e_2) + P(x_2e_2, y_1e_1) + P(x_2e_2, y_2e_2) =$$

$$= x_1y_1 \underbrace{P(e_1,e_1)}_{=0} + x_1y_2 P(e_1,e_2) + x_2y_1 \underbrace{P(e_2,e_1)}_{=-P(e_1,e_2)} + x_2y_2 \underbrace{P(e_2,e_2)}_{=0} =$$

$$= (x_1y_2 - x_2y_1) \underbrace{P(e_1,e_2)}_{=1} = x_1y_2 - x_2y_1 = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

3 HODNOST MATICE

Uvažujme matice typu $k \times n$



Sloupce matice $s_1(A), s_2(A), \dots, s_n(A) \in \mathbb{K}^k$

Řádky matice $r_1(A), r_2(A), \dots, r_k(A) \in \mathbb{K}^n$

4

Řádková hodnost je

$$h_r(A) = \dim_{\mathbb{K}} \left[r_1(A), r_2(A), \dots, r_k(A) \right] \leq n$$

jinak $h_r(A)$ je maximální počet lin. nezávislých řádků

Sloupcová hodnost matice A je

$$h_s(A) = \dim \left[s_1(A), s_2(A), \dots s_n(A) \right] \leq k$$

= maximální počet lin. nezávislých sloupců

5

<u>Věta:</u> Řádková a sloupcová hodnost jsou stejné, jejich společnou hodnotu nazýváme hodností matice A.

<u>Důkaz:</u> 1. krok je

<u>Lemma:</u> Při řádkových elem. úpravách se řádková hodnost nemění. Totéž platí pro sloupcové elem. operace a sloupcovou hodnost.

<u>Důkaz lemmatu:</u> Provedeme pro případ, kdy k 1. řádku přičteme c-násobek 2. řádku

$$A \rightsquigarrow A'$$

$$s_1(A), s_2(A), \ldots \qquad s_1(A)+c\,s_2(A), s_2(A), \ldots$$

6

Ukážeme si, že $[s_1(A), \underline{s_2(A)}, \underline{\ldots}] = [s_1(A) + c\, s_2(A), \underline{s_2(A)}, \underline{\ldots}]$

Inkluze $\supseteq$ plyne z toho, že

$$s_1(A) + c\, s_2(A) \in [s_1(A), s_2(A), \ldots]$$

Inkluze $\subseteq$ plyne z toho, že

$$s_1(A) = \big(s_1(A) + c\, s_2(A)\big) - c\, s_2(A) \in [s_1(A) + c s_2(A), s_2(A$$

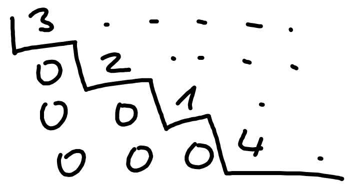
Pro ostatní elem operace je to ještě jednodušší.

7

Důkaz věty.

Mějme matici A. Její sloupcová hodnost je dána max počtem lin. nezávislých sloupců. Použijme algoritmus, který vybírá ze sloupců lin. nezávislé se stejným lin. obalem.

$$A \xrightarrow[\text{operace}]{\text{el. řádk.}} B \quad \boxed{\text{matice ve schod. tvaru}}$$



$h_s(A)$ = počet ~~k~~ ved. koeficientů v matici B = počet nenulových řádků matice $B = h_r(B)$ neboť B je ve schod. tvaru

8

<u>Důkaz:</u> ~~Pozadim~~ jsme dokázali, že

$$h_s(A) = h_r(B) = h_r(A)$$

$$A \underset{\text{operace}}{\overset{\text{el. řádk.}}{\rightsquigarrow}} B$$

9

OBECNÉ VĚTY O SOUSTAVÁCH LIN. ROVNIC

Frobeniova věta (o řešitelnosti soustav lin. rovnic)

Soustava lin. rovnic $Ax = b$

kde A je tvaru $k \times n$, $x \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathbb{K}^k$,

má řešení, právě když

$$h(A) = h(A|b).$$

10

Důkaz: $\Longrightarrow$ Nechť má soustava $Ax = b$ řešení $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Potom soustavu $Ax = b$ můžeme přepsat takto:

$$s_1(A)\,x_1 + s_2(A)\,x_2 + \dots + s_n(A)\,x_n = b$$

$$Ax = \left(s_1(A), \dots\ s_n(A) \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

$$b \in [s_1(A), s_2(A), \dots\ s_n(A)]$$

$$\Longrightarrow [s_1(A), \dots\ s_n(A)] = [s_1(A), \dots, s_n(A), b]$$

$$\dim[\quad] = h_s(A) = h_s(A|b) = \dim[\dots]$$

11

$\Leftarrow$ Necht $h(A) = h(A|b)$

(1) $\dim [s_1(A), \dots s_n(A)] = \dim [s_1(A), \dots s_n(A), b]$

(2) $[s_1(A), \dots s_n(A)] \subseteq [s_1(A), \dots s_n(A), b]$

1) a (2) $\Longrightarrow$ $[s_1(A), \dots s_n(A)] = [s_1(A), \dots, s_n(A), b]$

$\Longrightarrow b \in [s_1(A), \dots, s_n(A)]$

$\exists x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{K} : b = x_1 s_1(A) + x_2 s_2(A) + \dots x_n s_n(A)$

$\Longleftrightarrow b = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Soustava má řešení.

12

<u>Věta:</u> (o dimenzi prostoru řešení homogenní soustavy)

Homogenní soustava $A x = 0$,

kde A je matice $k \times n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ má prostor řešení

podprostorem $\mathbb{K}^n$ dimenze $\boxed{n - h(A)}$.

Rovina v $\mathbb{R}^3$ procházející počátkem

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$$

$$n - h(a_1\ a_2\ a_3) = 3 - 1 = 2$$

13

Premica v $\mathbb{R}^3$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

$$\dim = n - h \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

14

Důkaz: $\quad A \quad k \times n$

$$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k$$

$$\varphi(x) = Ax$$

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{ x \in \mathbb{K}^n ; \ \varphi(x) = Ax = 0 \}$$ = množina řešení

homogenní soustavy

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi = n - \dim \operatorname{Im}\varphi$$

$$\underbrace{\dim \mathbb{K}^n}_{n} = \underbrace{\dim \operatorname{Ker}\varphi}_{\text{chceme}} + \dim \operatorname{Im}\varphi$$

$$n = \text{chceme} + \dim \operatorname{Im}\varphi$$

15

$\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim [\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots \varphi(e_n)] = \dim [Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n]$

$= \dim [s_1(A), s_2(A), \ldots s_n(A)] = h_s$ tj. $h(A)$

$\dim \operatorname{Ker} \varphi = n - \dim \operatorname{Im} \varphi = n - h(A).$

Věta o struktuře řešení

Nechť $R(A, b)$ je množina řešení soustavy $Ax = b$

nechť $R(A, 0)$ je množina řešení homogenní rovnice $Ax = 0$.

~~Potom~~ Nechť $\bar{x}$ je jedno řešení soustavy $Ax = b$. Potom

16

$$\mathcal{R}(A|b) = \{\bar{x} + y \in \mathbb{K}^n, \quad y \in \mathcal{R}(A,0)\}$$
$$= \bar{x} + \mathcal{R}(A,0)$$

Důkaz: $\subseteq$ Nechť $x \in \mathcal{R}(A|b)$. Potom

$$x = \bar{x} + (x - \bar{x})$$, kde pro $x - \bar{x}$ platí

$$A(x-\bar{x}) = Ax - A\bar{x} = b - b = 0$$

Tedy $x - \bar{x} \in \mathcal{R}(A|0)$

$\supseteq$ Nechť $\bar{x}$ je pevné řešení $Ax = b$ a y je řešení $Ax = 0$

Potom $A(\bar{x}+y) = A\bar{x} + Ay = b + 0 = b \Rightarrow \bar{x}+y \in \mathcal{R}(A|b)$.