INVERZNÍ MATICE

Elementární řádkové operace (EŘO)

- vynásobení řádku nenulovým číslem
- výměna 2 řádků
- přičtení c-násobku j-té řádku k i-tému řádku ($j \neq i$)

Příklad: K 1. řádku přičteme 3-násobek 2 řádku ... operace e

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{EŘO}} e(A) = \begin{pmatrix} a_{11}+3a_{21} & a_{12}+3a_{22} & a_{13}+3a_{23} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}$$

2

$$E_k = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{k} \Big\} k \quad \overset{\text{EŘO}}{\rightsquigarrow} \quad e(E_k) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$e(E_k) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+3a_{21} & a_{12}+3 \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ & \\ a_{k1} & a_{k2} \cdot \end{pmatrix}$$

$$e(E_k) \cdot A = e(A)$$

③

Věta: Nechť A je matice $k \times n$. Nechť e je elementární řádková operace. Potom platí

$$e(A) = e(E_k) \cdot A$$

kde E_k je jednotková matice $k \times k$. Matice $e(E_k)$ se nazývá elementární matice.

Důkaz jsme provedli pro jednu operaci. Pro další typy operací jde o cvičení na násobení matic (udělejte si sami!)

4

Definice Inverzní matice k matici A typu $n \times n$ je matice B typu $n \times n$ taková, že

$$A \cdot B = B \cdot A = E_n$$

Minule jsme si ukázali, že k dané matici existuje nejvýše jedna inverzní, kterou značíme A^{-1}.

VĚTA Ke každé elementární matici $n \times n$ existuje inverzní matice

Důkaz:

5

Výměna 1. a 3 řádku

$$e(E_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & \end{pmatrix}$$

Důkaz jinak podle 1 věty

$$e(E_n) \cdot \underbrace{e(E_n)}_{A} =$$

$$= e(e(E_n)) = E$$

$$[e(E_n)]^{-1} = e(E_n)$$

$$e(E_n) \cdot e(E_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

2. řádek násobíme číslem $c \neq 0$

$$e(E_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad \left[e(E_n)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$$= \tilde{e}(E_n)$$

$$e(E_n) \cdot \tilde{e}(E_n) = e\left(\tilde{e}(E_n)\right) = E_n$$

7

k 3 řádku přičteme c-násobek 1 řádku

$$e(E_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ & & & & & \end{pmatrix} \qquad [e(E_n)]^{-1} = \tilde{e}(E_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -c & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Rovnosti plynou z 1. věty.

$$e(E_n) \cdot \tilde{e}(E_n) = e(\tilde{e}(E_n)) = E$$

$$\tilde{e}(E_n) \cdot e(E_n) = \tilde{e}(e(E_n)) = E$$

8

Věta Inverzní matice k součinu matic

Nechť A a B jsou matice $n \times n$ a nechť obě mají inverzní matice A^{-1}, resp. B^{-1}. Potom rovněž součin matic $A \cdot B$ má inverzní matici a platí

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Důkaz:

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} =$$

$$(B^{-1} A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = \ldots\ldots\ldots\ldots = E_n$$

9

Důsledek Mají-li matice $A_1, A_2, \dots A_k$ inverzní matice, pak i součin

$$A_1 A_2 \dots A_k$$

má inverzi a platí

$$(A_1 A_2 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$$

Důkaz z předchozí věty indukcí.

10

Algoritmus pro výpočet inverzní matice k matici A

$$(A \mid E) \xrightarrow{\text{EŘO}} (\tilde{A} \mid \tilde{B}) \xrightarrow[\text{②}]{\text{EŘO}} (E \mid A^{-1})$$

A: matice $n \times n$

E: druhá je jednotková

$\tilde{A}$: matice ve schodovitém tvaru

A^{-1}: ZDE DOSTANEME INVERZI

① jestliže $\tilde{A}$ obsahuje nulový řádek, pak A^{-1} neexistuje

② jestliže $\tilde{A}$ neobsahuje nulový řádek, provádíme EŘO na $\tilde{A}$ zdola nahoru tak, abychom dostali jednotkovou matici

Zpětná Gaussova eliminace

11

<u>Příklad</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\tilde{A}$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & . \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$/\!/ \ A^{-1}$

Matice nemá nul. řádek

12

Zkouška

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13

Důkaz správnosti algoritmu

V průběhu algoritmu provádíme následující

$$(A \mid E) \xrightarrow{\text{ERO}} \left(\tilde{A} = E_k \cdot E_3 (E_2 \cdot E_1 A)\right), \quad E_k \dots (E_2 (E$$

= násobení matice A a matice E zleva elem. řádk. maticemi

$$= \left(E_k E_{k-1} \dots E_1 A,\ E_k E_{k-1} \dots E_1 \right)$$

Kdyby A měla inverzi, pak také $\tilde{A} = E_k E_{k-1} \dots E_1 A$ má inverzi, tedy $\tilde{A}$ nemá nulový řádek

Tedy: jestliže $\tilde{A}$ má nulový řádek, pak $\tilde{A}$ nemá inverzi a ani A nemá inverzi.

Jestliže $\tilde{A}$ nemá nulový řádek, lze $\tilde{A}$ pomocí elem. řádk. operací převést na jednotkovou matici

$$(\tilde{A} \mid \quad) = \begin{pmatrix} \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ & & \bullet & 0 & 0 \\ 0 & & & \bullet & 0 \\ & & & & \bullet \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ERO}} (E \mid \quad)$$

Na úhlopříčce matice $\tilde{A}$ jsou čísla $\neq 0$, pod ní jsou 0.

$$\left(\underbrace{E_p E_{p-1} \cdots E_1 A}_{= E} \;\middle|\; \underbrace{E_p E_{p-1} \cdots E_1}_{\text{Toto je inverze k } A}\right)$$

15

Dokážeme, že $E_p E_{p-1} \dots E_1$ je inverze k A.

1 $\underline{E_p E_{p-1} \dots E_1 A} = E$ podle našeho výpočtu

2 $A \cdot (E_p E_{p-1} \dots E_1) = E$ potřebujeme rovněž dokázat

Vezměme si rovnost 1

$$E_p E_{p-1} \dots E_1 A = E \quad \Big/ \; E_p^{-1} \text{ zleva}$$

$$\underbrace{E_p^{-1} E_p}\, E_{p-1} \dots E_1 A = E_p^{-1} \cdot E$$

$$E_{p-1} \dots E_1 A = E_p^{-1} \quad \Big/ \; E_{p-1}^{-1} \text{ zl}$$

$$E_{p-2} \dots E_1 A = E_{p-1}^{-1} \cdot E_p^{-1}$$

atd

až dostaneme $\quad A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots E_{p-1}^{-1} E_p^{-1}$

Teď provedeme násobení 2

$$A\left(E_p E_{p-1} \ldots E_1\right) = \left(E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots \cdot E_{p-1}^{-1} \underbrace{E_p^{-1}\right) \cdot \left(E_p}_{E} E_{p-1} \cdot \ldots E\right.$$

$$= E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots \underbrace{E_{p-1}^{-1} E_{p-1}}_{E} E_{p-2} \ldots E_1 = \ldots\ldots = E$$

To jsme chtěli dokázat

17

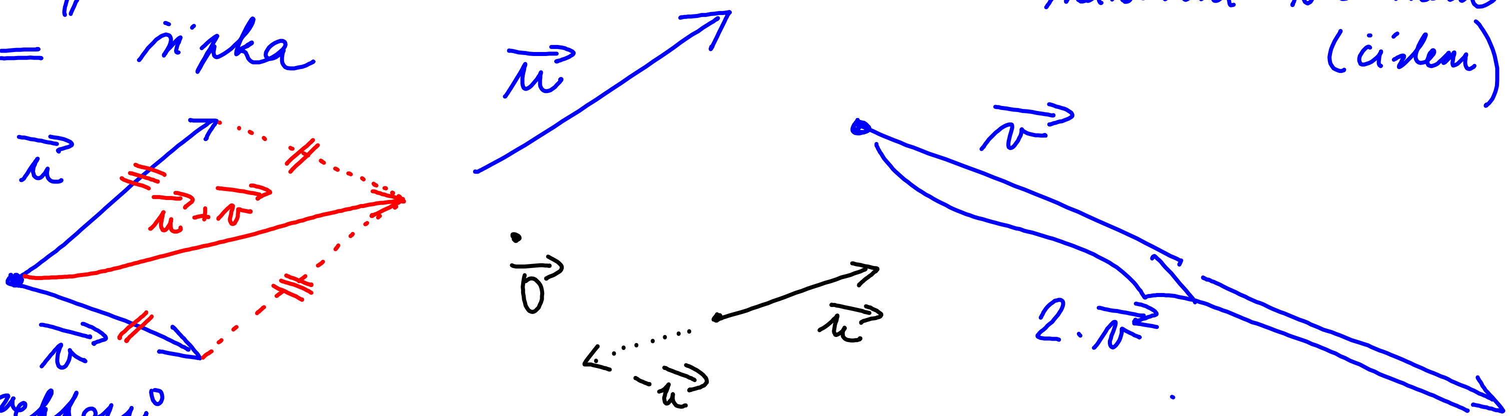
TEĎ TO ZAČNE !

Vektorové prostory

Vektory a šipky v rovině a prostoru

vektor "=" šipka

násobení skalárem (číslem)



Součet vektorů

18

Definice vektorového prostoru

Vektorový prostor $\mathbb{V}$ nad tělesem $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ je neprázdná množina společně s operacemi sčítání vektorů: $+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ $\left((\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} + \vec{v} \right)$ a násobení skalárem: $\bullet : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ $\left((a, \vec{u}) \longmapsto a \bullet \vec{u} \right)$, které mají následující vlastnosti:

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(3) $\exists$ nulový vektor $\vec{0}$: $\forall \vec{u} \in \mathbb{V}$ $\quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

(4) $\forall \vec{u} \in \mathbb{V}$ $\exists (-\vec{u}) \in \mathbb{V}$ $\quad \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

19

(5) $\forall a \in \mathbb{K},\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$. $\quad a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (a \cdot \vec{u}) + (a \cdot \vec{v})$

(6) $\forall a, b \in \mathbb{K},\ \forall \vec{u} \in V \quad (a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$

(7) $\forall a, b \in \mathbb{K},\ \forall \vec{u} \in V \quad a \cdot (b \cdot \vec{u}) = (a b) \cdot \vec{u}$

(8) $\forall \vec{u} \in V \quad 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

<u>Příklad 1</u> $\quad V = \mathbb{R}^3$

výše uvedené

vlastnosti.

$\vec{u} = (x_1, x_2, x_3) \qquad \vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

$\vec{v} = (y_1, y_2, y_3) \qquad c \cdot \vec{u} = (c x_1, c x_2, c x_3)$

Takto definované sčítání a násobení má