1

Lineární nezávislost vektorů

Vše se odehrává ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Definice: Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ jsou lineárně závislé, jestliže existují k. hodnoty čísel $a_1, a_2, \dots a_k \in \mathbb{K}$ tak, že

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \neq (0, 0, \dots, 0) \quad a \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{0}$$

Pozn. Vždy platí $0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_k = \vec{0}$. Tato je triviální lin. kombinace.

$\approx$

2

pokud jsou vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$ lin. závislé, tj. existuje $(a_1, \ldots a_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k = \vec{O},$$

vezmeme i takové, že $a_i \neq 0$. Potom

$$a_i u_i = -a_1 u_1 - a_2 u_2 - \ldots - a_{i-1} u_{i-1} - a_{i+1} u_{i+1} - \ldots - a_k u_k$$

$a_i \neq 0$, proto lze násobit a_i^{-1}. Dostaneme

$$u_i = -\frac{a_1}{a_i} u_1 - \frac{a_2}{a_i} u_2 - \ldots - \frac{a_{i-1}}{a_i} u_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i} u_{i+1} - \ldots - \frac{a_k}{a_i}$$

u_i je lineární kombinací ostatních vektorů

<u>Věta</u>: Vektory $u_1, \ldots, u_k$ jsou lin. závislé, právě když jeden z nich je lin. kombinací ostatních.

Dokázali jsme $\Rightarrow$

(3)

Důkaz opačné implikace

Nechť např. u_2 je lin. kombinací ostatních

$$u_2 = b_1 u_1 + b_3 u_3 + \dots + b_k u_k$$

Potom

$$\vec{0} = b_1 u_1 + (-1) u_2 + b_3 u_3 + \dots + b_k u_k$$

a současně $(b_1, -1, b_3, \dots, b_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

Tedy $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou lin. závislé.

Příklad: $u_1 = (1,2,1)$, $u_2 = (1,-1,1)$, $u_3 = (3,0,3)$ $\in \mathbb{R}^3$

jsou lineárně závislé? Řešíme rovnici v neznámých a_1, a_2, a_3

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = \vec{0}$$

Taká rovnice má vždy řešení $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ (triviální řešení). Nás ale zajímá, zda existuje i nějaké netriviální řešení

$$a_1(1,2,1) + a_2(1,-1,1) + a_3(3,0,3) = (0,0,0)$$

Porovnáním souřadnic dostaneme homogenní soustavu o neznámých a_1, a_2, a_3

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + 3a_3 &= 0 \\ 2a_1 - a_2 &= 0 \\ a_1 + a_2 + 3a_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3$ volíme za parametr

Soustava má netriviální řešení, např. $(1,2,-1)$.

Vektory jsou lin. závislé

5

Definice lineární nezávislosti

Výrok $(\forall x)\ A(x) \Rightarrow B(x)$ lin nezávislost

má negaci $(\exists x)\ A(x) \wedge \neg B(x)$ lin závislost

Lin. závislost

$$\exists (a_1, a_2, \dots a_k) \in \mathbb{R}^k \quad \underbrace{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{o}}_{A} \wedge \underbrace{(a_1, a_2, \dots a_k) \neq (0, 0, \dots}_{\neg B}$$

Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou lin. nezávislé, jestliže

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{K}^k \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{0} \Longrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

6

<u>Ekvivalentní definice</u> Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ jsou LIN. NEZÁVISLÉ jestliže rovnice

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{0}$$

v neznámých $a_1, a_2, \dots, a_k \in K$ má <u>pouze</u> triviální řešení, tj $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$

<u>Příklady</u>: Co znamená, že u_1 je lin závislý?

$\exists a \neq 0$

$$a \cdot u = \vec{0}$$

$$a^{-1}(a\, u) = a^{-1} \cdot \vec{0}$$

$$(a^{-1} a)\, u = \vec{0}$$

$$u = \vec{0}$$

u_1 je lin závislý právě když $u_1 = \vec{0}$.

7

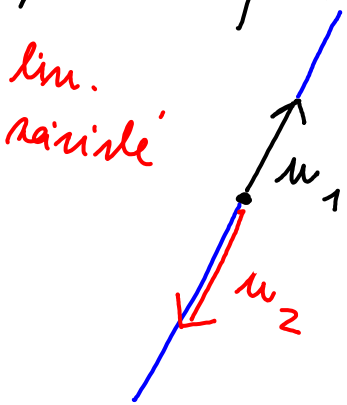
Co znamená, že vektory u_1, u_2 jsou lin. závislé?

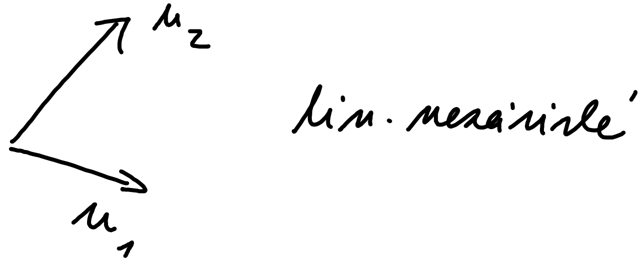
$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = \vec{o}$$

$a_1 \neq 0$ nebo $a_2 \neq 0$

Nechť $a_1 \neq 0$ $\qquad u_1 = -\frac{a_2}{a_1} u_2$

Jeden z vektorů je násobkem druhého. Jestliže jeden z vektorů je $\neq \vec{o}$, pak druhý leží na přímce, kterou tento vektor určuje

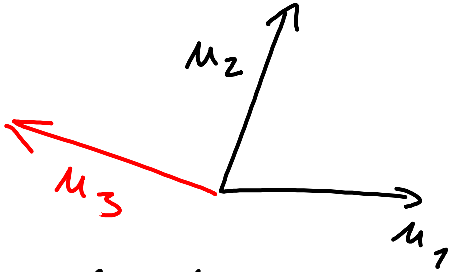




(8)

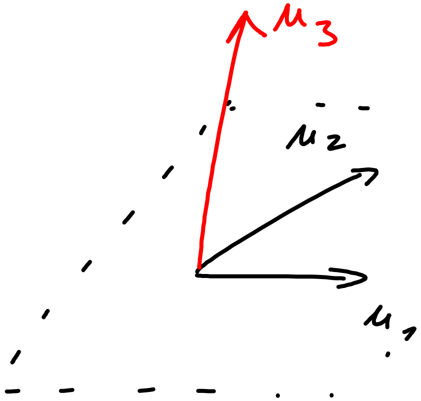
Jak vypadají 3 lin. závislé (a přitom nenulové) vektory?

Jeden je lin. kombinací ostatních:



lin. kombinace u_1 a u_2 vyplní celou rovinu

u_1, u_2, u_3 jsou lin. závislé



rovina určená u_1 a u_2

u_3 neleží v této rovině

u_1, u_2, u_3 jsou lin. nezávislé

9

Jednoduché vlastnosti, které lze dokázat z definic

(1) Jestliže některý z vektorů $u_1, u_2, \dots, u_k$ je roven $\vec{o}$, pak $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou lin. závislé

(2) Jestliže $u_1, u_2, \dots, u_\ell, u_{\ell+1}, \dots, u_k$ jsou lin. nezávislé, pak $u_1, u_2, \dots, u_\ell$ jsou rovněž lin. nezávislé

Důkazy za domácí úlohu — viz také odpovědník

Řekneme, že vektory $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ generují prostor V, jestliže

$$(*) \quad \forall v \in V \ \ \exists (a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n \quad v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

(jinak pomocí definice lin obalu

$$(*) \iff [u_1, u_2, \dots, u_n] = V$$

Řekneme, že prostor V je prostorem konečné dimenze, jestliže existuje konečná množina vektorů, která generuje prostor V.

11

Příklady ①

$V = \mathbb{R}^3 \quad e_1 = (1,0,0), \ e_2 = (0,1,0), \ e_3 = (0,0,1)$

$u \in V \quad u = (x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

$\mathbb{R}^3$ je prostor konečné dimenze

② $\mathbb{R}_4[x]$ polynomy stupně nejvýše 4 s reálnými koeficienty

$1, x, x^2, x^3, x^4$

$p(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ = lin. kombinace $x^4, x^3, x^2, x, 1$

$\mathbb{R}_4[x]$ je prostor konečné dimenze

12

3) $\mathbb{R}[x]$ prostor všech polynomů s reálnými koeficienty

Zde neexistuje konečná množina generátorů.

Důkaz sporem. předp. že existuje a nechť je konečná

polynomy $p_1, p_2, \dots, p_k$

n = max ze stupňů těchto polynomů

Potom polynom

x^{n+1} nelze napsat jako lin. kombinaci polynomů

$p_1, p_2, \dots, p_k$

$\mathbb{R}[x]$ není vektor. konečné dimenze.

13

BÁZE VEKTOROVÉHO PROSTORU

Nechť V je prostor konečné dimenze. Vektory $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ nazýváme bází prostoru V, jestliže platí:

(1) $u_1, u_2, \dots, u_n$ jsou lin. nezávislé

(2) $u_1, u_2, \dots, u_n$ generují prostor V (každý vektor $v \in V$ je lin. kombinací $u_1, u_2, \dots, u_n$)

(14)

Příklady

(1) $V=\mathbb{R}^3$ $\quad e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$

jsou lin. nezávislé a generují $\mathbb{R}^3$, tedy tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$

$u_1=(1,0,1)$, $u_2=(0,1,1)$, $u_3=(0,0,1)$

jsou rovněž lin. nezávislé a generují $\mathbb{R}^3$, tedy tvoří bázi.

Důkaz, že u_1,u_2,u_3 tvoří bázi

LN Má rovnice $a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=\vec{o}$ netriviální řešení?

GE Má rovnice $a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=\vec{v}$ řešení na každé $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$?

(15)

LN Poračunimo vrednost dodajamo tem sistemu

$$a_1 + 0\cdot a_2 + 0\cdot a_3 = 0$$
$$0\cdot a_1 + 1\cdot a_2 + 0\, a_3 = 0$$
$$1\, a_1 + 1\cdot a_2 + 1\cdot a_3 = 0$$

$\therefore$ Zapišimo nehomogeni sistem

$$a_1 + 0\cdot a_2 + 0\cdot a_3 = b_1$$
$$0\cdot a_1 + 1\cdot a_2 + 0\cdot a_3 = b_2$$
$$1\cdot a_1 + 1\cdot a_2 + 1\cdot a_3 = b_3$$

$b_1 = b_2 = b_2 = 0$ pa je rešitev je samo $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

Vektorji so LN.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right)$$

$a_1 = b_1$

$a_2 = b_2$

$a_3 = b_3 - b_2 - b_1$

b_1, b_2, b_3 poljubne: sistem ima rešitev: u_1, u_2, u_3 generirajo $\mathbb{R}^3$.

16

Další příklady

$\mathbb{R}_3[x]$ polynomy stupně ≤ 3

báze $1, x, x^2, x^3$

Chceme dokázat následující 2 věci

1. Každý vekt. prostor konečné dimenze má bázi.
2. Každé dvě báze daného prostoru mají stejný počet prvků.

17

Věta o výběru lin nezávislých generátorů

Nechť $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ jsou lin. nezávislé vektory.
Nechť $u_1, u_2, \dots, u_l \in V$ jsou nějaké další vektory.
Potom z vektorů $u_1, u_2, \dots, u_l$ lze vybrat některé
$u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ tak, že platí:

1. $v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ jsou lin. nezávislé
2. $[v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}] = [v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_l]$

($\subseteq$ platí vždy!)

18

Důsledek 1 Každý vekt. prostor konečné dimenze má bázi.

Dk. Jestliže V je prostor konečné dimenze, pak existují vektory $u_1, u_2, \dots, u_\ell \in V$ tak, že $V = [u_1, u_2, \dots, u_\ell]$.

Použijeme předchozí větu, kde množina vektorů $v_1, v_2, \dots, v_k$ je prázdná.

Věta nám říká: existují $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ tak, že

1. $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ jsou lin. nezávislé
2. $[u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}] = [u_1, u_2, \dots, u_\ell] = V$

tj. $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ generují V. Tedy $u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ tvoří bázi prostoru V

19

Důkaz pomocí indukce podle ℓ (počet vektorů $u_1, u_2, \dots u_\ell$)

$\ell = 1$

příklad $v_1, v_2, \dots, v_k$ lin. nezávislé a u_1

Dvě možnosti:

(i) $v_1, v_2, \dots v_k, u_1$ jsou lin nezávislé

Pak vektor u_1 vybereme. Je zřejmé, že vlastnosti ① a ② z tvrzení věty jsou splněny.

1) $v_1, v_2 \dots v_k, u_1$ lin. nezávislé

2) $[v_1, v_2, \dots v_k, u_1] = [v_1, v_2, \dots, v_k, u_1]$

20

(2) $v_1, v_2, \dots, v_k, u_1$ jsou lin. závislé

Pak existují $(k+1)$-tice $a_1, a_2, \dots a_k, a_{k+1}$ tak, že

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} u_1 = \vec{o}$$

a $$(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}) \neq (0, 0, 0, \dots, 0)$$

Nejdřív dokážeme, že $a_{k+1} \neq 0$. Kdyby ne, pak

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{a_{k+1}}} u_1 = \vec{o}$$

a $$(a_1, a_2, \dots, a_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

Tedy $v_1, v_2, \dots, v_k$ by byly lin. závislé, to je spor s předpokladem.

Jestliže $a_{k+1} \neq 0$, pak lze u_1 vyjádřit jako lin. kombinaci $v_1, v_2, \dots, v_k$.

21

$\frac{1}{a_{k+1}}$ $\quad a_{k+1} u_1 = -a_1 v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_k v_k$

$$u_1 = -\frac{a_1}{a_{k+1}} v_1 - \frac{a_2}{a_{k+1}} v_2 - \dots - \frac{a_k}{a_{k+1}} v_k = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_k v_k \quad (*)$$

Tvrzení věty dokážeme pro vybranou množinu, která je pevná (u_1 v tomto případě nevybereme) Potom

1) $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou lin. nezávislé (to víme)

2) Chceme dokázat, že

$$[v_1, v_2, \dots, v_k] = [v_1, v_2, \dots, v_k, u_1]$$

Inkluze $\subseteq$ platí vždy. Dokážeme opačnou inkluzi.

22

$w \in [v_1, v_2, \ldots v_k, u_1]$, pak

$$w = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k + d\,u_1 \overset{\text{dosazením z } (*)}{=} c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k$$
$$+ d\,(b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_kv_k) = (c_1 + d\,b_1)v_1 + (c_2 + d\,b_2)v_2 + \cdots +$$
$$+ (c_k + d\,b_k)v_k \in [v_1, v_2, \ldots, v_k]$$

Tím jsme dokázali, že

$$[v_1, v_2, \ldots, v_k, u_1] \subseteq [v_1, v_2, \ldots, v_k].$$

Tím je důkaz pro $l = 1$ ukončen.

Indukční krok nebudu dělat detailně, pouze naznačím:

příště v 15.00.