Součty a průniky podprostorů (1)

V a W jsou podprostory ve vekt. prostoru U

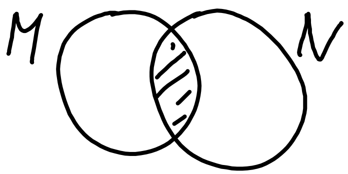
$$V + W = \{ v + w \in U \,;\, v \in V,\ w \in W \}$$

Věta o dimenzích součtu a průniku

Nechť U je prostor konečné dimenze. Potom pro podprostory $V, W \subseteq U$ platí

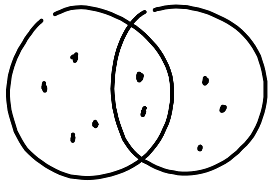
$$\dim V + \dim W = \dim (V + W) + \dim (V \cap W)$$

Analogie M, N množiny konečné. $|M|$ a $|N|$ počet jejich prvků



$$|M| + |N| = |M \cup N| + |M \cap N|$$

(2)



$|M| = 6 \quad |N| = 5 \quad |M \cup N| = 9 \quad |M \cap N| = 2$

Myšlenka důkazu:

Vezmeme bázi $V \cap W$: $u_1, u_2, \ldots, u_k$ $\qquad \dim(V \cap W) = k$

Doplníme ji na bázi V: $u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_p$ $\qquad \dim V = k+p$

Doplníme ji na bázi W. $u_1, u_2, \ldots, u_k, w_1, w_2, \ldots, w_r$ $\qquad \dim W = k+r$

Chceme dokázat, že báze $V+W$ je

$u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_r$ $\qquad \dim V+W \stackrel{?}{=} k+p+r$

③

Je-li $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r$ báze $V+W$, je $\dim V+W = k+p+r$ a dokazovaný vzorec skutečně platí.

Technický důkaz, že jde skutečně o bázi

(1) $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r$ generují $V+W$

$$V+W = \{v+w \in U,\ v \in V,\ w \in W\} = \{v+w = a_1u_1 + \dots + a_ku_k + b_1v_1 + \dots + b_pv_p +$$
$$+\ c_1u_1 + \dots + c_ku_k + d_1w_1 + \dots + d_rw_r \in U\} = \{(a_1+c_1)u_1 + \dots b_1v_1 + \dots d_1w_1 + \dots\}$$

Každý vektor podprostoru $V+W$ je lin. kombinací vektorů $u_1, \dots u_k, v_1, \dots v_p, w_1, \dots, w_r$

(4)

(2) Vektory $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r$ jsou lin. nezávislé

Nechť $a_1u_1 + \dots + a_ku_k + b_1v_1 + \dots + b_pv_p + c_1w_1 + \dots + c_rw_r = 0$. $(*)$

Potom

$$V \ni \underbrace{a_1u_1 + \dots + a_ku_k + b_1v_1 + \dots + b_pv_p}_{u} = -c_1w_1 - \dots - c_rw_r \in W$$

Vektor $u \in V \cap W$ a musí být lin. kombinací vektorů v bázi $V \cap W$

$$a_1u_1 + \dots + a_ku_k + b_1v_1 + \dots + b_pv_p = u = d_1u_1 + d_2u_2 + \dots + d_ku_k$$

$$(a_1 - d_1)u_1 + \dots + (a_k - d_k)u_k + b_1v_1 + \dots + b_pv_p = \vec{0}$$

Vektory $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_p$ tvoří bázi V a jsou tedy LN. Proto

$$a_1 - d_1 = a_k - d_k = \underline{b_1 = \dots = b_p = 0}.$$

③

Dosadíme $b_1 = 0$ do rovnice (*)

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + c_1 w_1 + \dots + c_r w_r = \vec{o}$$

$u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_r$ tvoří bázi W, jsou tedy LN a proto

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = c_1 = \dots = c_r = 0.$$

Tím je dokázáno, že všechny koeficienty v rovnici (*) jsou nulové, tedy vektory $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r$ jsou LN.

Použití věty v příkladu

Máme U, $V, W \leq U$, $\dim U = 6$, $\dim V = 3$, $\dim W = 4$ a spočítáme $\dim V \cap W = 1$. $\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$

6

$= 3+4-1 = 6$

Tímе $V+W \subseteq U$, $\dim V+W = \dim U = 6 \Rightarrow V+W = U$.

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Definice: Nechť U a V jsou vekt. prostory nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $\varphi: U \to V$ se nazývá lineární, jestliže splňuje tyto podmínky

① $\varphi(u_1+u_2) = \varphi(u_1)+\varphi(u_2)$ pro všechna $u_1, u_2 \in U$

② $\varphi(au) = a\varphi(u)$ pro všechna $u \in U$, $a \in \mathbb{K}$

9 7

Z této definice plyne, že lineární zobrazení musí splňovat toto.

$$\underline{\varphi(au_1 + bu_2)} \underset{(1)}{=} \varphi(au_1) + \varphi(bu_2) \underset{(2)}{=} \underline{a\varphi(u_1) + b\varphi(u_2)}$$

$$\underline{\varphi(\vec{o})} = \varphi(0 \cdot u) \underset{(2)}{=} 0 \cdot \varphi(u) = \underline{\vec{o}}$$

Příklady

(1) Ze střední školy

lineární funkce $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\boxed{\varphi(x) = ax + b}$

$\varphi(0) = b$, pro $b \neq 0$ to $\boxed{\text{NENÍ}}$ lineární ...

(8)

$\varphi(x_1+x_2) = a(x_1+x_2)+b = a \ldots$

$\varphi(x_1)+\varphi(x_2) = ax_1+b+ax_2+b = ax_1+ax_2+2b$ $\#$ pro $b \neq 0$

Lineární zobrazení je $\varphi(x) = ax$

Navíc. každé lin zobrazení $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je tvaru

$$\varphi(x) = ax$$

Dk: Nechť $\varphi(1) = a$

$$\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) = x \cdot \varphi(1) = x \cdot a = ax.$$

(2) NEJDŮLEŽITĚJŠÍ $\varphi: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^r$

$\varphi(x) = Ax$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ A matice typu $r \times n$

9

$$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}$$ násobení maticí

1) $\varphi(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \varphi(x)+\varphi(y)$

(2) $\varphi(ax) = A(ax) = a\,Ax = a\,\varphi(x)$

3 Speciální případ předchozího

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(x) = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

Každé lin zobrazení z $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ je tvaru

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ je báze $\mathbb{R}^3$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \varphi\left(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \right) \overset{\text{z linearity}}{=} x_1 \underset{\mathbb{R}}{\underset{\Cap}{\varphi(e_1)}} + x_2 \underset{\mathbb{R}}{\underset{\Cap}{\varphi(e_2)}} + x_3 \underset{\mathbb{R}}{\underset{\Cap}{\varphi(e_3)}}$$

$$= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

kde $a_1 = \varphi(e_1)$, $a_2 = \varphi(e_2)$, $a_3 = \varphi(e_3)$.

(4) U vekt. prostor, α jeho báze, $\dim U = n$, V vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

(11)

Zobrazení $(\ )_\alpha : U \longrightarrow K^n$ $\qquad \alpha = (u_1, \dots, u_n)$

$$u \longmapsto (u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad u = \sum a_i u_i$$

je lineární: $(u+v)_\alpha = (u)_\alpha + (v)_\alpha$

$(au)_\alpha = a(u)_\alpha$ $\qquad$ ověřit na DÚ z definice

(5) derivace $\quad C^1(0,1)$ prostor funkce na $(0,1)$ se spojitou derivací

$\varphi : C^1(0,1) \longrightarrow C(0,1)$ ← spojité funkce na $(0,1)$

$\varphi(f) = f'$ je lin zobrazení

12

neboť $(f+g)' = f' + g'$

$$(af)' = af'$$

6 $C[a,b]$ spojité funkce na intervalu $[a,b]$

$$\varphi : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

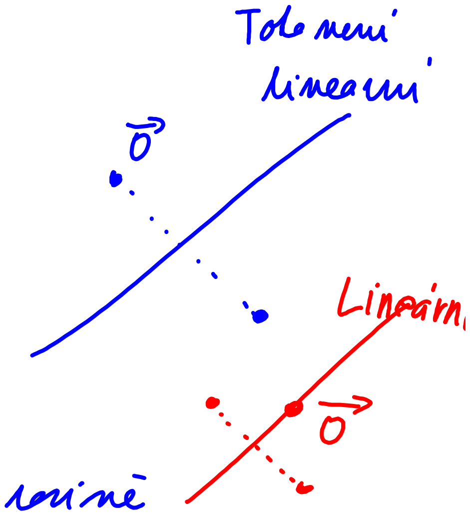
$\varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ je lin. zobrazení

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b c f(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx$$

7) Některá zobrazení ze středoškolské geometrie

- stejnolehlost se středem v počátku



- otáčení kolem počátku o pevný úhel v rovině
- otáčení kolem přímky procházející počátkem v prostoru
- symetrie podle přímky procházející počátkem
- symetrie podle roviny procházející počátkem v prostoru

14

Věta: Nechť U je prostor konečné dimenze, $\varphi: U \to V$ lin. zobrazení.
Potom φ je jednoznačně určeno svými hodnotami na vektorech nějaké báze.

Důkaz: $u_1, u_2, \dots u_n$ je báze v U.
Nechť u je libovolný vektor v U. Potom

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

právě jedním způsobem. Potom

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = a_1 \varphi(u_1) + a_2 \varphi(u_2) + \dots + a_n \varphi(u_n)$$

$\varphi(u)$ je jednoznačně určeno pomocí $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n)$.

15

Lineární zobrazení a podprostory

$\varphi : U \to V$ lineární

$\bar{U} \subseteq U$, $\bar{V} \subseteq V$ podprostory

Věta: $\varphi(\bar{U}) \subseteq V$ je vekt. podprostor

$\varphi^{-1}(\bar{V}) = \{ u \in U,\ \varphi(u) \in \bar{V} \} \subseteq U$ je vekt. podprostor

Důkaz: 2. tvrzení

$u_1, u_2 \in \varphi^{-1}(\bar{V})$. To znamená, že $\varphi(u_1), \varphi(u_2) \in \bar{V}$.

Potom také $\varphi(u_1) + \varphi(u_2) \in \bar{V}$, neboť $\bar{V}$ je podprostor

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \in \bar{V} \Rightarrow u_1 + u_2 \in \varphi^{-1}(\bar{V})$$

16

Definice Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární. Obraz zobrazení φ je

$$\operatorname{Im} \varphi = \{ \varphi(u) \in V ;\ u \in U \} = \varphi(U)$$

a jádro zobrazení φ je

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{ u \in U,\ \varphi(u) = \vec{o} \} = \varphi^{-1}\{\vec{o}\}$$

kernel = jádro

Podle předchozí věty jsou obě tyto množiny vektorovými podprostory.

17

Zobrazení $\varphi : U \to V$ je surjektivní nebo na, jestliže

$$\operatorname{Im} \varphi = V.$$

Zobrazení $\varphi : U \to V$ je prosté, jestliže platí

$$\varphi(u) = \varphi(v) \implies u = v$$

Věta: Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ je prosté, právě když

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{\vec{o}\}$$

Důkaz: Nechť $\operatorname{Ker} \varphi = \{\vec{o}\}$. Nechť $\varphi(u) = \varphi(v)$. potom

$$\varphi(u) - \varphi(v) = \vec{o}$$
$$\varphi(u - v) = \vec{o}$$

18

To znamená, že $u - v \in \operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{o}\}$. Proto $u - v = \vec{o}$, a tedy $u = v$.

Nechť φ je prosté. Nechť $u \in \operatorname{Ker}\varphi$. Potom

$$\underline{\varphi(u)} = \vec{o} = \underline{\varphi(\vec{o})}$$

Z toho, že φ je prosté plyne $u = \vec{o}$. Tedy $\operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{o}\}$.

<u>Příklad</u>. $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ $\quad \varphi(x) = Ax$

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = 0\} = \left\{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\right.$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Jádro jsou všechna řešení hom. soustavy.
φ je prosté, pokud soustava má pouze nulové řešení.

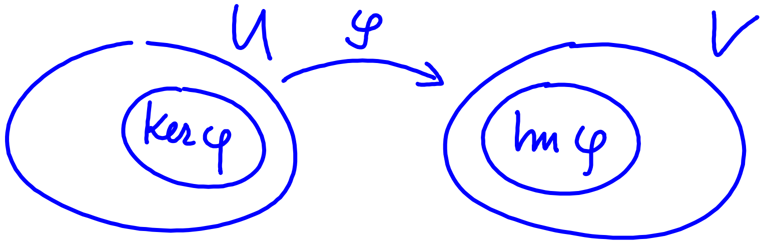
19

Věta o dimenzích jádra a obrazu

Nechť $\varphi : U \to V$ je lin zobrazení a U je prostor konečné dimenze. Pak

$$\dim U = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$$

Důkaz:



Nechť $u_1, u_2, \dots, u_k$ je báze $\operatorname{Ker} \varphi$. Doplňme tuto bázi na bázi $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ celého prostoru U.

20

Chceme najít bázi $\operatorname{Im}\varphi$. Dokážeme, že ji tvoří vektory

$$\varphi(u_{k+1}), \varphi(u_{k+2}), \ldots, \varphi(u_n)$$

Pokud to je pravda, tak

$$\dim U = n = k + n - k = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi .$$

(a) $\varphi(u_{k+1}), \ldots, \varphi(u_n)$ generují $\operatorname{Im}\varphi$.

Typický prvek v $\operatorname{Im}\varphi$ je $\varphi(u)$, $u \in U$

$$u = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n$$

$$\varphi(u) = \varphi(a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n) = a_1 \underbrace{\varphi(u_1)}_{=\vec{o}} + \ldots + a_k \underbrace{\varphi(u_k)}_{=\vec{o}} + a_{k+1}\varphi(u_{k+1}) + \ldots$$

$$\ldots + a_n \varphi(u_n)$$

$$= a_{k+1}\varphi(u_{k+1}) + \ldots + a_n \varphi(u_n)$$

21

(b) $\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ jsou LN

nechť $a_{k+1}\varphi(u_{k+1}) + \dots + a_n \varphi(u_n) = \vec{o}$

$$\varphi(a_{k+1}u_{k+1} + \dots + a_n u_n) = \vec{o}$$

$$a_{k+1}u_{k+1} + \dots + a_n u_n \in \operatorname{Ker}\varphi \quad (\text{báze } u_1, \dots, u_k)$$

$$a_{k+1}u_{k+1} + \dots + a_n u_n = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_k u_k$$

$$-b_1 u_1 - \dots - b_k u_k + a_{k+1}u_{k+1} + \dots + a_n u_n = \vec{o}$$

Protože $u_1, \dots u_n$ je báze prostoru U, jsou tyto vektory LN a tedy

$$-b_1 = -b_2 = \dots = -b_k = a_{k+1} = \dots = a_n = 0$$

Tedy $\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ jsou LN